Для высших резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) всегда $\Delta < 0$, и следовательно, имеет место устойчивость. Для упругой оболочки в аналогичной ситуации ($p_0 = 1$, $p_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots$) выполнено условие $\Delta = 0$ и нейтральная кривая определяется уравнением

$$\beta_{1,2} \approx 2\pi\alpha/\lambda^2, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданович А. Е.* Динамическая устойчивость упруговязкой ортотропной цилиндрической оболочки // Механика полимеров. 1973. № 4. С. 714—721.
2. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
24.VI.1986

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Полубаринова А. И.

Излагается метод представления функций двух переменных, заданных в квадрате $\sigma = [0, \pi] \times [0, \pi]$, в виде комбинации полиномов и дифференцируемых тригонометрических рядов. В отличие от представлений, полученных ранее [1—3], предлагается использовать разложения в тригонометрические ряды по полным на $[0, \pi]$ системам функций $\{\sin mx\}$, $\{1, \cos mx\}$, $m = 1, 2, \ldots$, в двойные ряды — по полным в σ системам функций $\{\sin mx \sin ny\}$, $\{\sin ny,\ \cos mx \sin ny\}$, $\{\sin mx,\ \sin mx \cos ny\}$, $m, n = 1, 2, \ldots$. Разложение по таким системам функций имеет некоторые преимущества по сравнению с разложениями по обычной тригонометрической системе синусов и косинусов на $[-\pi, \pi]$ и соответствующей системе функций в квадрате $[-\pi, \pi]\times[-\pi, \pi]$. Предложенный метод применен к решению задач теории оболочек с постоянными коэффициентами в случае жесткого защемления по прямоугольному контуру. Решение получено в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых выражаются через решение бесконечной линейной алгебраической системы уравнений. Получены численные значения прогибов в частном случае пологой круговой цилиндрической оболочки.

1. Формулировка и обоснование метода. Будем использовать понятие четности функций $f(x)$ на $[0, \pi]$ и $F(x, y)$ в σ, а также понятие строго определенной четности функций, введенные в [3]. Сформулируем лемму о возможности почленного дифференцирования ряда Фурье функции $f(x)$ по полным на $[0, \pi]$ системам функций $\{\sin mx\}$ и $\{1, \cos mx\}$, $m = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем считаем, что индекс l принимает значения $1, 2, \ldots, p$. Индексы k, c принимают значения $0, 1, \ldots, p$, суммирование по ним ведется от 0 до p.

Лемма. Пусть $f(x)$ — функция со строго определенной четностью. Пусть на $[0, \pi]$ существуют непрерывные производные f_x^{2l} (f_x^{2l-1}), причем $f(0) = 0$, $f_x^{2l}(0) = 0$ $(f_x^{2l-1}(0) = 0)$. Пусть, кроме того, производная f_x^{2p+2} (f_x^{2p+1}) представима в виде ряда Фурье по синусам (косинусам). Тогда ряд Фурье по синусам (косинусам) функции $f(x)$ можно почленно дифференцировать $2p + 2$ $(2p + 1)$ раз.

Доказательство леммы проводится по аналогии с доказательством леммы 1 [3].

Теорема 1. Пусть $F(x, y)$ — функция со строго определенной по x четностью и существует частная производная $F_x^{2p}(0, y)$ $(F_x^{2p-1}(0, y))$. Тогда существует и единственно представление

$$F(x, y) = \sum_k h_k(x)\,\psi_k(y) + H(x, y) \tag{1.1}$$

$$F(x, y) = \sum_k q_k(x)\,\eta_k(y) + Q(x, y)$$

где: 1) $h_k(x)$ — любые фиксированные полиномы, имеющие ту же четность, что и $F(x, y)$ по x, и обладающие свойствами: четный полином $h_k(x)$ имеет степень $2k$, нечетный —

степень $2k+1$, $d^{2k}h_k(0)/dx^{2k} \neq 0$; 2) $q_0(x) \equiv 0$, $q_k(x) = h_k'(x)$; 3) функция $H(x, y)$ $(Q(x, y))$ удовлетворяет условиям $H(0, y) = 0$, $H_x{}^{2l}(0, y) = 0$ $(Q_x^{2l-1}(0, y) = 0)$.

Теорема 2. Пусть $F(x, y)$ — функция со строго определенной по y четностью и существует частная производная $F_y{}^{2p}(x, 0)$ $(F_y^{2p-1}(x, 0))$. Тогда существует и единственно представление

$$F(x, y) = \sum_c g_c(y)\,\varphi_c(x) + G(x, y) \tag{1.2}$$

$$\left(F(x, y) = \sum_c r_c(y)\,\xi_c(x) + R(x, y)\right)$$

где: 1) $g_c(y) = h_c(y)$; 2) $r_0(y) \equiv 0$, $r_c(y) = g_c'(y)$; 3) функция $G(x, y)$ $(R(x, y))$ удовлетворяет условиям $G(x, 0) = 0$, $G_y{}^{2l}(x, 0) = 0$ $(R_x^{2l-1}(0, y) = 0)$.

Докажем теорему 1. Теорема 2 доказывается аналогично.

Будем обозначать $f_x{}^{2l}$ производную порядка $2l$ функции $f(x)$. Выпишем две линейные системы уравнений относительно неизвестных функций $\psi_k(y)$, $\eta_k(y)$

$$F(0, y) = \sum_k h_k(0)\,\psi_k(y), \quad F_x{}^{2l}(0, y) = \sum_k h_k{}^{2l}(0)\,\psi_k(y) \tag{1.3}$$

$$F_x^{2l-1}(0, y) = \sum_k q_k^{2l-1}(0)\,\eta_k(y) \tag{1.4}$$

Каждая система имеет в силу 1), 2) ненулевой определитель, так как матрицы систем треугольные, и следовательно, из (1.3) однозначно определяются $\psi_k(y)$, из (1.4) — $\eta_k(y)$. Подстановка этих функций в (1.1) однозначно определяет $H(x, y)$, $Q(x, y)$. В то же время функции $H(x, y)$, $Q(x, y)$, полученные таким образом, удовлетворяют условиям 3).

Непосредственно из теорем и леммы вытекает следующее.

Следствие. Пусть $F(x, y)$ — функция со строго определенной четностью по x, имеет непрерывную производную F_x^{2p+2} (F_x^{2p+1}), представимую своим рядом Фурье по системе функций $\{\sin mx \sin ny\}$ $(\{\sin ny, \cos mx \sin ny\})$ в σ. Тогда существует и единственно представление

$$F(x, y) = \sum_k h_k(x) \sum_n \psi_n{}^k \sin ny + \sum_{m, n} H_{mn} \sin mx \sin ny$$

$$\left(F(x, y) = \sum_k q_k(x) \sum_n \eta_n{}^k \sin ny + \sum_n Q_{0n} \sin ny + \sum_{m, n} Q_{mn} \cos mx \sin ny\right)$$

ряды в котором можно почленно дифференцировать $2p+2$ $(2p+1)$ раз по x. Если же $F(x, y)$ имеет производную F_y^{2p+2} (F_y^{2p+1}), представимую в σ своим рядом Фурье по системе функций $\{\sin mx \sin ny\}$ $(\{\sin mx, \sin mx \cos ny\})$, то существует и единственно представление

$$F(x, y) = \sum_c g_c(y) \sum_m \varphi_m{}^c \sin mx + \sum_{m, n} G_{mn} \sin mx \sin ny$$

$$\left(F(x, y) = \sum_c r_c(y) \sum_m \xi_m{}^c \sin mx + \sum_m R_{m0} \sin mx + \sum_{m, n} R_{mn} \sin mx \cos ny\right)$$

ряды в котором можно почленно дифференцировать $2p+2$ $(2p+1)$ раз по y. Индексы m и n принимают значения либо $1, 3, 5, \ldots$, либо $2, 4, 6, \ldots$ в зависимости от четности $F(x, y)$ по соответствующему аргументу.

2. Краевая задача теории оболочек. Рассмотрим краевую задачу теории оболочек с постоянными коэффициентами в перемещениях в квадратной области σ с границей Γ

$$L_{i1}u + L_{i2}v + L_{i3}w = P^i(x, y), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = w|_\Gamma = \partial w / \partial n|_\Gamma = 0 \tag{2.2}$$

где $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности оболочки. Разложим каждую из нагрузок P^1, P^2, P^3 на четыре слагаемых различной строго определенной четности. Будем искать решение задачи (2.1), (2.2) в виде суммы четырех задач вида (2.1) с граничными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad w(x, 0) = w(0, y) = 0 \tag{2.3}$$

$$u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad w_y(x, 0) = w_x(0, y) = 0 \tag{2.4}$$

(индексом обозначена частная производная по соответствующей переменной).

В данном случае каждая из нагрузок P^1, P^2, P^3 будет являться одной из четырех составляющих исходных нагрузок. Будем использовать следующие разложения в ряды составляющих нагрузок:

$$P^1(x, y) = \Sigma P_{0n}^1 \sin ny + \Sigma P_{mn}^1 \cos mx \sin ny$$

$$P^2(x, y) = \Sigma P_{m0}^2 \sin mx + \Sigma P_{mn}^2 \sin mx \cos ny$$

$$P^3(x, y) = \Sigma P_{mn} \sin mx \sin ny$$

Здесь и всюду в дальнейшем при решении задачи (2.1), (2.3), (2.4) суммирование ведется по m и n, принимающим следующие значения:

$m = 1, 3, 5, \ldots$, если $P^3(x, y)$ — четная по x на $[0, \pi]$,

$m = 2, 4, 6, \ldots$, если $P^3(x, y)$ — нечетная по x на $[0, \pi]$;

индекс n изменяется аналогично в зависимости от четности $P^3(x, y)$ по y на $[0, \pi]$.

Система (2.1) содержит старшие производные перемещений: u_{xxx}, u_{xyy}, v_{yyy}, v_{xxy}, w_{xxxx}, w_{yyyy}, w_{xxyy} (четвертые производные w содержит оператор L_{33}). Следуя результатам п. 1, решение задачи (2.1), (2.3), (2.4) будем искать в виде

$$u = q(x) \Sigma\alpha_n \sin ny + \Sigma\alpha_{0n} \sin ny + \Sigma\alpha_{mn} \cos mx \sin ny \tag{2.5}$$

$$v = r(y) \Sigma\delta_m \sin mx + \Sigma\delta_{m0} \sin mx + \Sigma\delta_{mn} \sin mx \cos ny$$

$$w = h_0(x) \Sigma a_n^\circ \sin ny + h(x) \Sigma a_n \sin ny + \Sigma a_{mn} \sin mx \sin ny =$$
$$= g_0(y) \Sigma b_m^\circ \sin mx + g(y) \Sigma b_m \sin mx + \Sigma b_{mn} \sin mx \sin ny$$

$$g(y) = h(y), \quad q(x) = h'(x), \quad r(y) = g'(y)$$

Здесь $h_0(x) = \pi/4$, $h(x) = x(\pi - x)/8$, если $P^3(x, y)$ — функция, четная по x на $[0, \pi]$, $h_0(x) = (\pi - 2x)/4$, $h(x) = x(\pi - x)(\pi - 2x)/24$, если $P^3(x, y)$ — функция, нечетная по x на $[0, \pi]$. Выбор полиномов обусловлен простотой разложения их в ряды Фурье по соответствующим системам функции.

Граничные условия (2.3) дают $a_n^\circ \equiv 0$, $b_m^\circ \equiv 0$. Согласно результатам п. 1, все ряды в выражениях для u и v можно почленно дифференцировать при подстановке в (2.1). Ряды в первом представлении для w можно почленно дифференцировать вплоть до четвертого порядка по x и второго порядка по y. Ряды во втором представлении для w можно почленно дифференцировать вплоть до четвертого порядка по y и второго порядка по x.

Для определения десяти групп неизвестных α_n, α_{0n}, α_{mn}, δ_m, δ_{m0}, δ_{mn}, a_n, a_{mn}, b_m, b_{mn} имеется пять соотношений, получаемых после подстановки (2.5) в систему (2.1), четыре соотношения, получаемых после подстановки (2.5) в граничные условия (2.4), а также соотношение, вытекающее из тождества двух представлений для w. Пусть всюду в дальнейшем индексы i, j принимают значения 1, 2, 3. Определим элементы D_{mn}^{ij} матрицы D_{mn} соотношениями

$$D_{mn}^{i1} \cos mx \sin ny = L_{i1} (\cos mx \sin ny) \tag{2.6}$$

$$D_{mn}^{i2} \sin mx \cos ny = L_{i2} (\sin mx \cos ny)$$

$$D_{mn}^{i3} \sin mx \sin ny = L_{i3} (\sin mx \sin ny)$$

Обозначим Δ_{mn}^{ij} алгебраические дополнения элементов матрицы D_{mn}^{ij}, отнесенные к определителю матрицы D_{mn}. Выписав указанные выше десять групп соотношений и преобразовав их надлежащим образом, получим решение задачи (2.1), (2.3), (2.4) в виде

$$u(x, y) = \Sigma\alpha_{0n} \sin ny - \Sigma S_{mn}^1 \cos mx \sin ny \tag{2.7}$$

$$v(x, y) = \Sigma\delta_{m0} \sin mx - \Sigma S_{mn}^2 \sin mx \cos ny$$

$$w(x, y) = -\Sigma S_{mn}^3 \sin mx \sin ny$$

$$S_{mn}^i = \Delta_{mn}^{1i} \bar{\xi}_{mn} + \Delta_{mn}^{2i} \bar{\eta}_{mn} + \Delta_{mn}^{3i} \bar{\varkappa}_{mn}$$

$$\bar{\xi}_{mn} = \xi_n + P_{mn}^1, \quad \bar{\eta}_{mn} = \eta_m + P_{mn}^2, \quad \bar{\varkappa}_{mn} = m\zeta_n + n\varkappa_m + P_{mn}^3$$

$$\alpha_{0n} = \alpha_{0n}^1 \xi_n + \alpha_{0n}^2, \quad \delta_{m0} = \delta_{m0}^1 \eta_m + \delta_{m0}^2$$

Величины α_{0n}^k, δ_{m0}^k ($(k = 1, 2)$ выражаются через P_{0n}^1, P_{m0}^2 и постоянные коэффициенты системы (2.1). Величины ζ_n, η_m, ζ_n, $\varkappa_m$ являются решением бесконечной алгебраической системы уравнений (в системе опущены индексы m, n Δ_{mn}^{ij}, T_{mn}^{j})

$$\left(\sum_m \Delta^{11} - \alpha_{0n}^1\right)\xi_n + \sum_m m\Delta^{31}\zeta_n + \sum_m (\Delta^{21}\eta_m + \Delta^{31}\varkappa_m) = \alpha_{0n}^2 - \sum_m T^1 \tag{2.8}$$

$$\left(\sum_n \Delta^{22} - \delta_{m0}^1\right)\eta_m + \sum_n n\Delta^{32}\varkappa_m + \sum_n (\Delta^{12}\xi_n + \Delta^{32}\zeta_n) = \delta_{m0}^2 - \sum_n T^2$$

$$\sum_m m\Delta^{13}\xi_n + \sum_m m\Delta^{33}\zeta_n + \sum_m m(\Delta^{23}\eta_m + \Delta^{33}\varkappa_m) = -\sum_m mT^3$$

$$\sum_n n\Delta^{23}\eta_m + \sum_n n\Delta^{33}\varkappa_m + \sum_n n(\Delta^{32}\xi_n + \Delta^{33}\zeta_n) = -\sum_n nT^3$$

$$T^j = \sum_{i=1}^{3} \Delta^{ij}p^i$$

Решение исходной задачи (2.1), (2.2) есть сумма четырех решений задачи (2.1), (2.3), (2.4) для составляющих нагрузок P^1, P^2, P^3 различной строго определенной четности.

Бесконечную систему (2.8) можно решить методом редукции [4]. В ряде конкретных задач она приводится к регулярному виду, и для законности применения метода редукции достаточно, чтобы порядок убывания коэффициентов Фурье $P_{0n}{}^1$ был не ниже $1/n$, P_{m0}^2 — не ниже $1/m$, P_{mn}^1, P_{mn}^2, P_{mn}^3 — не ниже $1/(mn)$ [4].

Заметим, что если положить $D_{mn}^{13} = D_{mn}^{23} = D_{mn}^{31} = D_{mn}^{32} \equiv 0$, то последние две группы уравнений системы (2.8) дадут бесконечную систему уравнений, полученную в [3] и соответствующую задаче об изгибе жестко защемленной пластинки. Первые две группы уравнений системы (2.8) дадут в этом случае бесконечную систему уравнений, соответствующую плоской задаче теории упругости.

Изложенный метод может быть применен к решению задач теории пластинок и пологих оболочек для различных типов граничных условий.

3. Численные результаты. Приведем результаты решения задачи о жестком защемлении по контуру пологой круговой цилиндрической оболочки в области $\bar{\sigma} = [0, l_x] \times [0, l_y]$. Оболочку описывает известная система уравнений [5]. Производя замену переменных $x = \pi\bar{x}/l_x$, $y = \pi\bar{y}/l_y$, переводящую область $\bar{\sigma}$ в σ, приходим к задаче (2.1), (2.2). Обозначим $\gamma = l_y/(R\pi)$, $\beta = l_y/l_x$ и зададим $h/R = 10^{-2}$, $\nu = 1/3$, $\beta = 1$. Здесь h — толщина оболочки, R — ее радиус, ν — коэффициент Пуассона.

γ	y; $x = \pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$1/(2\pi)$	0,374; 0,479	1,02; 1,20	1,52; 1,58	1,69
$6/(5\pi)$	0,590; 1,01	1,27; 1,27	1,40; 1,32	1,35
$1/(2\pi)$	0,311; 0,526	1,13; 1,41	1,96; 2,06	2,30
$6/(5\pi)$	—2,07; 2,02	—0,502; 4,41	4,21; 6,00	6,58

В таблице приведены значения безразмерных прогибов w для разных нагрузок и разных значений γ. При этом искомый прогиб $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}) = (Eh)^{-1}(1 - \nu^2)R^2qw(x, y)$, E — модуль Юнга, q — постоянная нагрузка. Нагрузки $P^1 = P^2 = 0$. Верхняя половина таблицы соответствует нагрузке $P^3 = q$, нижняя — нагрузке $P^3 = q \sin x \sin y$. В каждой клетке первое (второе) число дает значение безразмерного прогиба $w(\pi/2, y)$ ($w(x, \pi/2)$) для соответствующих значений y (значений x).

Система уравнений (2.8) решена методом редукции [4]. При этом в (2.8) и в суммах (2.7) m и n принимают значения 1, 3, 5, . . ., 19. Первые три знака приближенного решения не меняются при увеличении порядка суммирования в (2.7) и соответствующем увеличении числа уравнений редуцированной системы (2.8).

Приведем также значение прогиба $\bar{w}$ в центре оболочки для $\beta = 10$, $\gamma = 1/(2\pi)$ и нагрузки $P^3 = q$, сохранив прежними остальные параметры оболочки. Прогиб в центре $\bar{w}(l_x/2, l_y/2) = 3901ql_x/E$ совпадает с известным [6] значением прогиба в центре при изгибании балки длины l_x, ширины b и высоты h нагрузкой qb.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даревский В. М.* Представление функции двух переменных с помощью дифференцируемых тригонометрических рядов для решения уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 486—500.
2. *Даревский В. М.* Об одном методе решения уравнения с частными производными // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 9. С. 1661—1672.
3. *Полубаринова А. И.* Об одном методе решения уравнения в частных производных при помощи дифференцируемых тригонометрических рядов Фурье // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 1036—1040.
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.
5. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 784 с.
6. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. М.: Госстройиздат. 1960. 1046 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.XI.1987