ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков И. И.* Прикладная магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат. 1969. 360 с.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.
3. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир. 1983. 294 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию 16.X.1987

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Беленькая Л. Х.

Рассматривается устойчивость прямолинейной формы вязкоупругой, ортотропной цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки в случае больших частот модуляции, а также вблизи резонансных частот. Граничные условия на торцах оболочки допускают периодическое продолжение по пространственным переменным, так что исследование задачи сводится к системе обыкновенных интегродифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Задаче об устойчивости цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки посвящена работа [1], где для экспоненциального ядра релаксации по методу В. В. Болотина выведена приближенная формула для критической частоты модуляции вблизи главного резонанса при малых значениях амплитуды модуляции и малых вязкостях. Исследование устойчивости прямолинейной формы рассматриваемой цилиндрической оболочки проводилось численно с применением метода цепных дробей в широком диапазоне параметров системы [1].

Ниже получена асимптотика границы устойчивости, когда частота модуляции $\omega \to \infty$, волновые числа фиксированы. В случае дробно-экспоненциальных ядер релаксации критическая нагрузка и нейтральные колебания разыскиваются в виде рядов по дробным степеням параметра ε ($\varepsilon = 1/\omega$). Для дифференциальных уравнений в случае, когда ядро релаксации в нуле не имеет особенностей, и интегродифференциальных уравнений, асимптотические разложения строятся по целым степеням ε. Показано, что при больших частотах модуляции критическое значение нагрузки близко к ее стационарному значению.

Далее, при помощи метода Ляпунова — Шмидта исследовано поведение системы, когда частота ω близка к резонансной ω_k ($\omega_k = 2\omega_*/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; ω_* — собственная частота колебаний), а коэффициенты вязкости малы. Показано, что если среднее значение нагрузки $\langle\varphi\rangle \neq 0$, то на высших резонансах ($k = 2, 3, \ldots$) она сильно сдвигает частоту собственных колебаний и вблизи k-х резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) при малых значениях вязкости имеет место устойчивость, т. е. неустойчивость вблизи старших резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) гасится вязкостью.

Если же $\langle\varphi\rangle = 0$, то вблизи k-х резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) наблюдается неустойчивость.

1. Постановка задачи. На ортотропную, вязкоупругую цилиндрическую оболочку действует продольная периодическая нагрузка $\varphi(\omega\tau) = \beta(1 + \mu\cos\omega\tau)$, где β — среднее осевое давление нагрузки, μ, ω — амплитуда и частота модуляции, d, δ — безразмерные длина и толщина оболочки. Используются уравнения движения оболочки, полученные в [1]. Торцы оболочки свободно перемещаются в осевом направлении и не могут перемещаться вдоль радиуса, так что исходная система сводится к системе обыкновенных интегродифференциальных уравнений с периодическими коэффициен-

---

[1] *Беленькая Л. Х.* Численное исследование устойчивости ортотропной, вязкоупругой цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки. Ростов н/Д. 1985. 60 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.12.84, № 7898-84.

тами

$$
\begin{aligned}
&W^{\cdot\cdot} - \beta\lambda^2 (2\pi)^{-1}(1 + \mu \cos \omega\tau) W - \lambda^2 f + {}^1/_2 (nY - \lambda X) - \\
(1.1)\quad &- {}^1/_2 nQ_{44}^* (V_3 Y)(\tau) + {}^1/_2 \lambda Q_{55}^* (V_2 X)(\tau) = 0 \\
&a_{11} W + a_{12} X + a_{13} Y + a_{14} (V_1 W)(\tau) + a_{15}' (V_1 X)(\tau) + a_{15}'' (V_2 X)(\tau) + \\
&+ a_{16} (V_1 Y)(\tau) = 0 \\
&a_{21} W + a_{22} X + a_{23} Y + a_{24} (V_1 W)(\tau) + a_{25} (V_1 X)(\tau) + a_{26}' (V_1 Y)(\tau) + \\
&+ a_{26}'' (V_3 Y)(\tau) = 0 \\
&a_{31} f + a_{32} W + a_{33} (V_1 W)(\tau) + a_{34} (V_1 f)(\tau) = 0 \\
&(V_i u)(\tau) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} K_i (\tau - \theta) u(\theta)\, d\theta; \quad \lambda = \frac{\pi l}{d}, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Здесь $K_i(\theta)$ — ядра релаксации; W, X, Y, f — амплитуды перемещения, вектора поворота, функции напряжения; n, l — азимутальное и осевое квантовые числа; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots$. Безразмерные коэффициенты a_{ij}, Q_{44}^*, Q_{55}^* зависят от материальных постоянных и квантовых чисел n, l (см. сноску на с. 519).

Для исследования устойчивости прямолинейной формы оболочки ищем ненулевые решения системы (1.1) при $\tau_0 = -\infty$ вида

$$(1.2)\qquad (W, X, Y, f) = e^{\sigma\tau} (W_1, X_1, Y_1, f_1)$$

где W_1, X_1, Y_1, f_1 — периодические по времени функции ($p = 2\pi/\omega$); σ — комплексный параметр. Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решения (1.2) назовем решениями Флоке. Спектром устойчивости задачи (1.1) при $\tau_0 = -\infty$ назовем множество значений σ, при которых система (1.1) имеет решения Флоке. По аналогии с первым методом Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений предполагаем, что оболочка асимптотически устойчива, если спектр устойчивости системы (1.1) лежит в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}\sigma < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно значение σ_0 таково, что $\operatorname{Re}\sigma_0 > 0$.

Будем рассматривать потерю устойчивости прямолинейной формы оболочки, связанную с возникновением периодических колебаний периода p или $2p$. Обозначим β_k^1 критические значения нагрузки β, отвечающие p-периодическим возмущениям системы (1.1) ($\tau_0 = -\infty$), β_k^2 — отвечающие $2p$-периодическим возмущениям (n, l фиксированы, $k = 1, 2, \ldots N$).

2. Границы устойчивости при больших ω. Получим асимптотическую формулу границы устойчивости, когда частота модуляции $\omega \to \infty$. Положим $\omega\tau = t$ в системе (1.1) и введем малый параметр $\varepsilon = 1/\omega$. Подчиним W условию нормировки $\langle W \rangle = 1$ и положим $W = 1 + w$, $\langle w \rangle = 0$. Рассмотрим частный случай, когда ядра K_i дробно-экспоненциальные

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad &K_i(t) = A_i e^{-\gamma t} t^{\alpha-1}, \quad A_i \geqslant 0 \\
&0 < \alpha < 1, \quad \gamma > 0
\end{aligned}
$$

Систему (1.1) приводим к виду

$$
\begin{aligned}
&w^{\cdot\cdot} - \varepsilon^2\lambda^2 (2\pi)^{-1}\beta (1 + \mu \cos t)(1 + w) - \varepsilon^2\lambda^2 f + {}^1/_2 \varepsilon^2 (nY - \lambda X) - \\
(2.2)\quad &- {}^1/_2 \varepsilon^2 \delta Q_{44}^* n A_2 (V_\varepsilon Y)(t) + {}^1/_2 \varepsilon^2 \delta\lambda Q_{55}^* A_3 (V_\varepsilon X)(t) = 0 \\
&a_{11}(1 + w) + a_{12} X + a_{13} Y + \delta a_{14} A_1 (V_\varepsilon w)(t) + \delta (a_{15}' A_1 + \\
&+ a_{15}'' A_2)(V_\varepsilon X)(t) + \delta A_1 a_{16} (V_\varepsilon Y)(t) + a_{14} A_1 \bar{K} = 0 \\
&a_{21}(1 + w) + a_{22} X + a_{23} Y + \delta a_{24} A_1 (V_\varepsilon w)(t) + \delta a_{25} A_1 (V_\varepsilon X)(t) + \\
&+ \delta (a_{26}' A_1 + a_{26}'' A_2)(V_\varepsilon Y)(t) + a_{24} A_1 \bar{K} = 0 \\
&a_{31} f + (1 + w) a_{32} + a_{33} A_1 \bar{K} + a_{33} A_1 \delta (V_\varepsilon w)(t) + \delta a_{34} A_1 (V_\varepsilon f)(t) = \\
&= 0; \quad \delta \equiv \varepsilon^\alpha, \quad \bar{K} = \Gamma(\alpha)/\gamma^\alpha
\end{aligned}
$$

Будем разыскивать решения системы (2.2) и критическую нагрузку в виде рядов по степеням ε, δ. Можно показать, что если ядра K_i в нуле не имеют особенностей, то разложение следует вести по целым степеням ε:

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad &(w, X, Y, f) \sim \sum_{k,\, l=0}^{\infty} (w_{kl}, x_{kl}, y_{kl}, f_{kl})\, \varepsilon^k \delta^l \\
&\beta_1^1 \sim \sum_{k,\, l=0}^{\infty} \beta_{kl}\, \varepsilon^k \delta^l
\end{aligned}
$$

(Для дифференциальных уравнений аналогичное разложение ведется, как известно (например [2]), по целым степеням ε.) Ядро $K(\theta)$ в ряд по ε, δ раскладывать не будем. Подставляя (2.3) в систему (2.2) и приравнивая члены, содержащие ε, δ в одинаковой степени, получим цепочку систем, из которых последовательно определим w_{kl}, x_{kl}, y_{kl}, f_{kl}, β_{kl}. Необходимым и достаточным условием существования 2π-периодического решения полученных систем является выполнение условия

$$\langle G_{kl}\rangle = 0 \tag{2.4}$$

где G_{kl} — правая часть дифференциального уравнения систем.

Используя это условие, определяем асимптотическую формулу для критической нагрузки β_1^1 (квантовые числа n, l фиксированы) при $\omega \to \infty$

$$\beta_1^1 = \beta_{00} + \beta_{20}\varepsilon^2 + \beta_{40}\varepsilon^4 + \beta_{41}\varepsilon^4\delta + O(\varepsilon^6) \tag{2.5}$$
$$\beta_{20} = \lambda^2\mu^2\beta_{00}^2/(4\pi)$$

Здесь β_{00} — критическая нагрузка для стационарной задачи ($\mu = 0$), коэффициенты β_{41}, β_{40} зависят от параметров системы (в виду громоздкости выражений они не выписаны).

Как видно из (2.5), при больших частотах модуляции ω критическое значение нагрузки β близко к значению критической нагрузки для стационарного случая ($\mu = 0$).

Вычисления проведены для следующих значений модулей упругости: $A_{11} = 2{,}089\cdot10^{10}$ Н/м², $A_{12} = 0{,}276\cdot10^{10}$ Н/м², $A_{22} = 22{,}75\cdot10^{10}$ Н/м², $A_{44} = A_{55} = A_{66} = 0{,}795\cdot10^{10}$ Н/м², $A_{44}^* = A_{55}^* = A_{66}^* = 0{,}1\cdot A_{66}$. Параметры ядер релаксации: $\alpha_i = 0{,}25$, $\gamma_i = 0{,}05$. (Ядра $K_i(t)$ определяются соотношением (2.1).)

При больших значениях частоты модуляции ω критическая нагрузка, найденная численно методом цепных дробей, выходит на асимптотическое значение, вычисленное по формуле (2.5). Асимптотическая формула дает неплохое совпадение с критической нагрузкой, найденной численно, уже при $\omega = 3$, $A_1 = 1/2$, $A_2 = A_3 = 0$, $d = 2$, когда $(n, l) = (9, 10)$ (отметим, что при $\omega = 3$ существует несколько пар $(9, l)$, на которых критическая нагрузка достигает минимального значения). Для $\mu \in (0; 7]$ критическая нагрузка совпадает с асимптотическим значением (2.5) с погрешностью, не превосходящей 3,4%.

Для $\omega = 10$, $A_1 = 1/2$, $A_2 = A_3 = 0$, $(n, l) = (9, 10)$ критическая нагрузка, найденная численно, совпадает с асимптотической с погрешностью, не превосходящей 0,03% для $\mu \in (0; 1]$. Два члена формулы (2.5) дают погрешность, не превосходящую 0,3%.

При больших частотах модуляции увеличение амплитуды μ оказывает стабилизирующее влияние (критическая нагрузка с увеличением μ возрастает).

Заметим, что коэффициент β_{20} асимптотического разложения (2.5) можно определить из численных результатов (см. сноску на с. 519)

$$\beta_{20} = \lim_{\omega\to\infty} \omega^2(\beta_*^1 - \beta_{00}) \tag{2.6}$$

Здесь β_*^1 — критическая нагрузка, найденная численно при фиксированных n, l, μ, A_i, ω; β_{00} — критическая нагрузка при $\mu = 0$. Рассмотрим случай $A_1 = 1/2$, $A_2 = A_3 = 0$, $\mu = 1/2$, $(n, l) = (9, 10)$, при этих параметрах стационарная нагрузка $\beta_{00} = 0{,}1688$. Коэффициент β_{20}, найденный по формуле (2.6), совпадает с асимптотическим значением $\lambda^2\mu^2\beta_{00}^2/(4\pi)$ при $\omega = 10$ с погрешностью 3,1%, при $\omega = 20$ — с погрешностью 0,78%. Если амплитуда модуляции $\mu = 0{,}2$, то коэффициент ρ_{20}, вычисленный по формуле (2.6), совпадает с асимптотическим (2.5) при $\omega = 7$ с погрешностью 1,5%.

3. Поведение системы вблизи резонансных частот. Изучим поведение системы (1.1) в случае, когда вязкость материала оболочки мала, а частота модуляции ω близка к одной из резонансных частот $\omega_k = 2\omega_*/k$ ($k = 1, 2, \ldots$, ω_* — одна из собственных частот оболочки, определяемая квантовыми числами (n, l)).

Построим нейтральные кривые вблизи каждой из резонансных частот. Для этого удобно ввести в систему (1.1) формально малый параметр ε и заменить ядра $K_i(\tau)$ на εK_i. Можно считать, что параметр ε отвечает за наследственные свойства оболочки. Далее введем в рассмотрение расстройку d k-го резонанса, полагая

$$\alpha \equiv \omega_*^2 - \omega^2k^2/4 \tag{3.1}$$

Возможно, было бы естественней фиксировать ω_* и менять ω, однако более удобно принятая подстановка, к которой можно перейти надлежащей заменой времени.

Перепишем систему (1.1) при $\tau_0 = -\infty$, учитывая сделанные выше замечания и (3.1). Исследуем устойчивость такой системы при малых ε, α, β.

При $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$ полученная система устойчива. Если ω не совпадает ни с одной из резонансных частот ω_k, то при малых ε, β система также остается устойчивой и при $\varepsilon \to 0$ критическая нагрузка стремится к ненулевому пределу β_0. В этом случае область устойчивости на плоскости (β, ε) содержит открытый полукруг: $\beta^2 + \varepsilon^2 < \beta_0^2$, $\varepsilon > 0$. Если же частота ω стремится к одному из резонансных значений ($\alpha \to 0$) и $\varepsilon \to 0$, то критическая нагрузка стремится к нулю. При этом точки из верхней полуокрестности нуля на плоскости β, ε, лежащие в некотором криволинейном секторе, попадают в область неустойчивости.

Для определения нейтральных кривых вблизи резонансов воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта и построим соответствующее уравнение разветвления. При $\varepsilon = \beta = \alpha = 0$ система имеет решение

$$W_0 = Ae^{ik\omega\tau/2} + A^*e^{-ik\omega\tau/2}, \quad f_0 = -a_{32}W_0/a_{31}$$
$$X_0 = \chi_0 W_0, \quad Y_0 = U_0 W_0$$

(A, A^* — неизвестные постоянные).

Будем искать периодическое решение с частотой $\omega m/2$ ($m = 1, 2$) рассматриваемой системы при малых ε, α, β в виде

(3.2) $$W = W_0 + \overline{W}, \; X = X_0 + \overline{X}, \quad Y = Y_0 + \overline{Y}, \; f = f_0 + \overline{f}$$

При этом

(3.3) $$\langle \overline{W} e^{\pm ik\omega\tau/2} \rangle = 0$$
$$(\overline{W}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{f})(\tau + 4\pi/m) = (\overline{W}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{f})(\tau)$$

Неизвестные функции $\overline{W}$, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{f}$ будем разыскивать в виде рядов по степеням α, ε, β

(3.4) $$(\overline{W}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{f}) = \sum (w_{klm}, x_{klm}, y_{klm}, f_{klm})$$
$$\alpha^k \varepsilon^l \beta^m, \quad k^2 + m^2 + l^2 > 0$$

Подставляя (3.2), (3.3) в рассматриваемую систему и учитывая (3.3), а также записывая условия разрешимости полученной системы, выводим уравнение разветвления, которое при фиксированном и достаточно малом ε задает на плоскости α, β нейтральную кривую, отделяющую область устойчивости от неустойчивости.

С точностью до величин второго порядка малости нейтральная кривая определяется уравнением

(3.5) $$\beta_{1,2} \approx [-p_0 (\operatorname{Re} E_1\varepsilon - \alpha) \pm \Delta^{1/2}]/g_{002}$$
$$g_{002} = \lambda^2 (2\pi)^{-1}(p_0^2 - |p_k|^2)$$
$$\Delta = (\operatorname{Im} E_1)^2 (|p_k|^2 - p_0^2)\varepsilon^2 + |p_k|^2 (\alpha - \varepsilon \operatorname{Re} E_1)^2$$
$$p_k = \langle \Phi e^{-ik\omega\tau} \rangle, \quad \Phi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j e^{ij\omega\tau}$$

$\Phi(\tau)$ — периодическая нагрузка с периодом $p = 2\pi/\omega$, действующая на оболочку, E_1 — коэффициент, зависящий от наследственных свойств оболочки.

Имеются следующие возможности.

1°. Если $p_0^2 < |p_k|^2$ ($g_{002} < 0$), то уравнение разветвления всегда имеет решение (3.5) и вблизи k-го резонанса ($k = 1, 2, \ldots$) при малых α, ε, β наблюдается неустойчивость.

2°. Если $p_0^2 > |p_k|^2$ ($g_{002} > 0$), то при выполнении условия $\Delta < 0$ уравнение разветвления решений не имеет и вблизи k-го резонанса ($k = 1, 2, \ldots$) при малых α, ε, β наблюдается устойчивость. В случае $\Delta \geqslant 0$ уравнение нейтральной кривой имеет вид (3.5).

3°. Если $p_0^2 = |p_k|^2$ ($g_{002} = 0$), а коэффициент при третьей степени параметра β отличен от нуля, то уравнение нейтральной кривой определяется из кубического уравнения.

Рассмотрим для примера функцию $\Phi = 1 + \mu \cos \omega\tau$, тогда $p_0 = 1$, $p_1 = p_{-1} = \mu/2$, $p_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots$ Вблизи главного резонанса ($k = 1$) при $|\mu| < 2$ и $\Delta < 0$ (случай 2°) наблюдается устойчивость при малых α, ε, β; если же $|\mu| < 2$ и $\Delta \geqslant 0$, то уравнение нейтральной кривой имеет вид (3.5).

Для высших резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) всегда $\Delta < 0$, и следовательно, имеет место устойчивость. Для упругой оболочки в аналогичной ситуации ($p_0 = 1$, $p_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots$) выполнено условие $\Delta = 0$ и нейтральная кривая определяется уравнением

$$\beta_{1,2} \approx 2\pi\alpha/\lambda^2, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданович А. Е.* Динамическая устойчивость упруговязкой ортотропной цилиндрической оболочки // Механика полимеров. 1973. № 4. С. 714—721.
2. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 24.VI.1986

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Полубаринова А. И.

Излагается метод представления функций двух переменных, заданных в квадрате $\sigma = [0, \pi] \times [0, \pi]$, в виде комбинации полиномов и дифференцируемых тригонометрических рядов. В отличие от представлений, полученных ранее [1—3], предлагается использовать разложения в тригонометрические ряды по полным на $[0, \pi]$ системам функций $\{\sin mx\}$, $\{1, \cos mx\}$, $m = 1, 2, \ldots$, в двойные ряды — по полным в σ системам функций $\{\sin mx \sin ny\}$, $\{\sin ny, \cos mx \sin ny\}$, $\{\sin mx, \sin mx \cos ny\}$, $m, n = 1, 2, \ldots$. Разложение по таким системам функций имеет некоторые преимущества по сравнению с разложениями по обычной тригонометрической системе синусов и косинусов на $[-\pi, \pi]$ и соответствующей системе функций в квадрате $[-\pi, \pi]\times[-\pi, \pi]$. Предложенный метод применен к решению задач теории оболочек с постоянными коэффициентами в случае жесткого защемления по прямоугольному контуру. Решение получено в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых выражаются через решение бесконечной линейной алгебраической системы уравнений. Получены численные значения прогибов в частном случае пологой круговой цилиндрической оболочки.

1. Формулировка и обоснование метода. Будем использовать понятие четности функций $f(x)$ на $[0, \pi]$ и $F(x, y)$ в σ, а также понятие строго определенной четности функций, введенные в [3]. Сформулируем лемму о возможности почленного дифференцирования ряда Фурье функции $f(x)$ по полным на $[0, \pi]$ системам функций $\{\sin mx\}$ и $\{1, \cos mx\}$, $m = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем считаем, что индекс l принимает значения $1, 2, \ldots, p$. Индексы k, c принимают значения $0, 1, \ldots, p$, суммирование по ним ведется от 0 до p.

Лемма. Пусть $f(x)$ — функция со строго определенной четностью. Пусть на $[0, \pi]$ существуют непрерывные производные $f_x{}^{2l}$ (f_x^{2l-1}), причем $f(0) = 0$, $f_x{}^{2l}(0) = 0$ ($f_x^{2l-1}(0) = 0$). Пусть, кроме того, производная f_x^{2p+2} (f_x^{2p+1}) представима в виде ряда Фурье по синусам (косинусам). Тогда ряд Фурье по синусам (косинусам) функции $f(x)$ можно почленно дифференцировать $2p + 2$ ($2p + 1$) раз.

Доказательство леммы проводится по аналогии с доказательством леммы 1 [3].

Теорема 1. Пусть $F(x, y)$ — функция со строго определенной по x четностью и существует частная производная $F_x^{2p}(0, y)$ ($F_x^{2p-1}(0, y)$). Тогда существует и единственно представление

$$F(x, y) = \sum_k h_k(x) \psi_k(y) + H(x, y) \tag{1.1}$$

$$F(x, y) = \sum_k q_k(x) \eta_k(y) + Q(x, y)$$

где: 1) $h_k(x)$ — любые фиксированные полиномы, имеющие ту же четность, что и $F(x, y)$ по x, и обладающие свойствами: четный полином $h_k(x)$ имеет степень $2k$, нечетный —