этого не должно быть. Однако уже при $\gamma = 0{,}99$ формула (4.1) дает большую на 0,82% ПМ, чем (1.3). Для еще более близких к единице значений γ различие в этих ПМ становится почти незаметным, что свидетельствует о слабом влиянии формы сосуда в указанных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука. 1980. 448 с.
2. *Келдыш М. В.* Удар пластинки о воду, имеющую конечную глубину // Тр. ЦАГИ. 1935. Вып. 152. С. 13—20.
3. *Полунин А. М.* Влияние стенок на присоединенную массу тел различной формы при вертикальном ударе (плоская задача) // Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп. 1966. Вып. 21. С. 98—115.
4. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение. 1976. 199 с.
5. *Риман И. С., Крепс Р. Л.* Присоединенные массы тел различной формы // Тр. ЦАГИ. 1947. Вып. 635. 46 с.
6. *Гуревич М. И.* Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуцилиндра // ПММ. 1939. Т. 3. Вып. 2. С. 3—12.
7. *Уиттекер Э., Ватсон Д.* Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 515 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука. 1967. 299 с.
9. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Плоская задача об ударе по жидкой полосе // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ. 1984. С. 99—121.
10. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Динамическое взаимодействие упругих пластин с идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 171.

Москва

Поступила в редакцию 13.I.1987

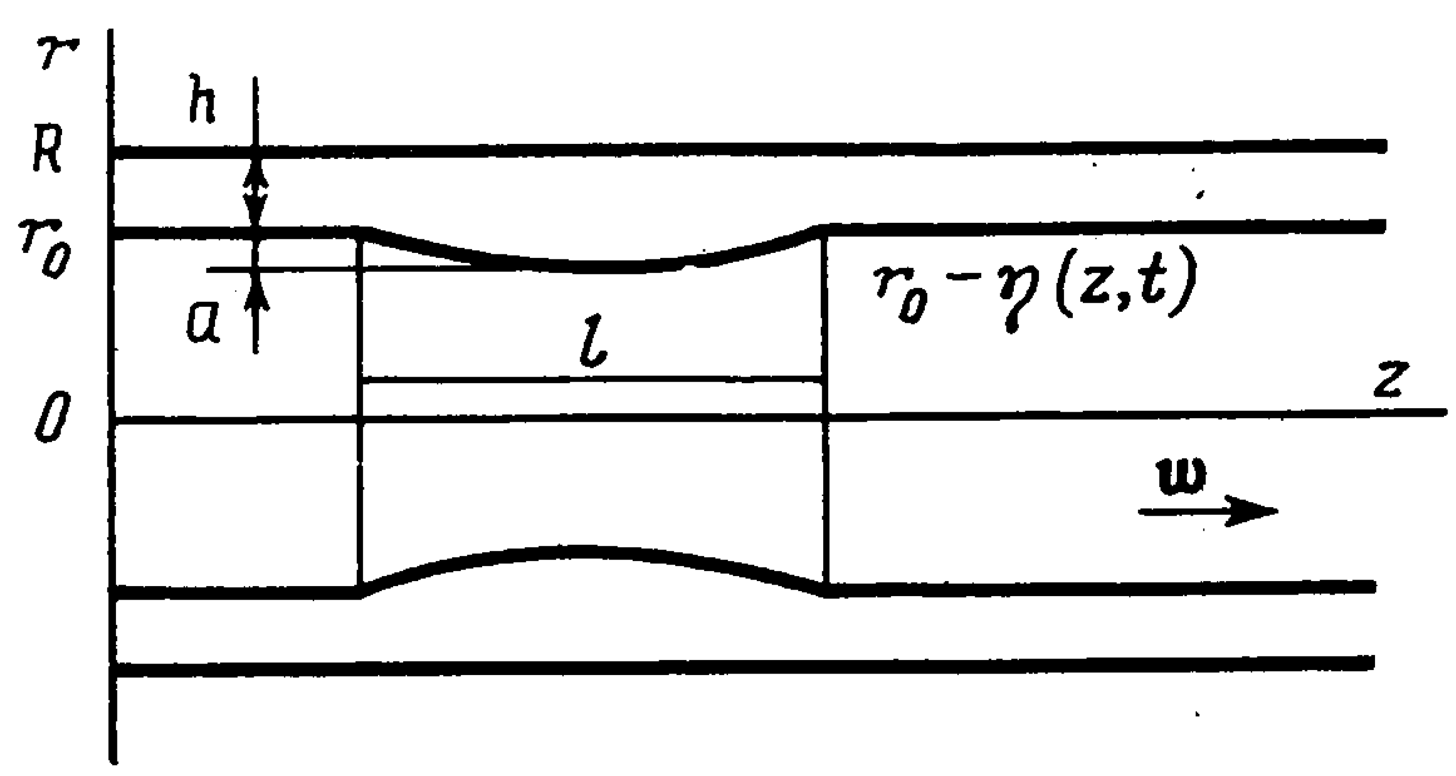
УДК 532.59 : 534

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ СОЛИТОНЫ В ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Браже Р. А.

Показана возможность возникновения солитонов в поступательно-вращательном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Такое движение характерно для вихревых МГД-генераторов и мелкомасштабных атмосферных вихрей.

1. Уравнения движения и граничные условия. Пусть при помощи тангенциального ввода и перепада давлений в жесткой трубе с внутренним радиусом R создан поступательно-вращательный поток жидкости. Это приводит к образованию в ней цилиндрической полости радиуса r_0, заполненной воздухом или, если труба не сообщается с атмосферой, насыщенными парами жидкости (фигура). Любое возмущение $\eta(z, t)$ ради-



уса полости может распространяться вдоль оси трубы в виде плоских волн. В дальнейшем предполагается, что максимальная амплитуда возмущения a мала по сравнению с толщиной слоя жидкости h, а длина возмущения l, наоборот, велика по сравнению с h. Указанное предположение сводится к малости двух параметров: $\varepsilon = a/h$ и $\delta = h/l$. При этом толщина жидкого слоя считается малой по сравнению с радиусом трубы, так что $h = (R^2 - r_0^2)/(2r_0)$.

Вследствие аксиальной симметрии границы жидкости (но не течения) компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ жидкости в цилиндрической системе координат зависят только от расстояния r до оси потока, координаты z и времени t. Завихренность потока ω считается постоянной вдоль трубы и направленной по оси z, так что все угловые зависимости отсутствуют.

Предполагая жидкость несжимаемой, можно ввести векторный потенциал $\mathbf{A}$, такой, что $\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, и свести задачу к решению уравнения Пуассона $\Delta\mathbf{A} = -\omega$.

На свободной поверхности жидкости $r_1 = r_0 - \eta(z, t)$ (здесь и ниже индекс 1 относится к величинам, вычисляемым на свободной поверхности) кинематическое граничное условие можно записать в виде

$$v_{r1} = -\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial z} v_{z1}\right) \tag{1.1}$$

Динамическое граничное условие получается из уравнений Эйлера подстановкой в них выражения для давления во вращающейся жидкости в произвольной точке свободной поверхности

$$p_1 = p_0 + {}^1/_2\rho M^2 (r_0^{-2} - r_1^{-2})$$

где $M = v_\varphi r_1$ — постоянный удельный момент импульса жидкости. Изменение давления жидкости на свободной поверхности, вызванное ее возмущением (при $r_1 \approx r_0$), равно $dp_1 = \rho v_\varphi^2 r_0^{-1} d\eta$. Следовательно, радиальная и азимутальная проекции уравнения Эйлера выражают постоянство радиальной и азимутальной компонент скорости течения жидкости на границе с газовым вихрем, а осевая проекция дает динамическое граничное условие:

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{r1}\frac{\partial v_{z1}}{\partial r} + v_{z1}\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r_0}\frac{\partial\eta}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

Входящие в граничные условия (1.1), (1.2) v_{r1} и v_{z1} определяются компонентой A_φ векторного потенциала, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Имея в виду малую толщину слоя жидкости, решение этого уравнения можно представить в виде

$$A_\varphi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (R^2 - r^2)^n A_{\varphi n}(z, t) \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в уравнение Лапласа и разделяя члены по степеням $(R^2 - r^2)$, получим рекуррентное соотношение

$$A_{\varphi n+1} = \frac{1}{4(n+1)}\frac{\partial^2 A_{\varphi n}}{\partial z^2}\left(1 - \frac{nr^2}{R^2 - r^2}\right)^{-1} \tag{1.4}$$

Из условия на стенке трубы следует, что $\partial A_{\varphi 0}/\partial z = 0$, чего нельзя сказать о производных более высокого порядка. Таким образом, на свободной поверхности жидкости согласно (1.3)

$$A_{\varphi 1} = A_{\varphi 0} + {}^1/_4(R^2 - r_1^2) f + {}^1/_{32}(R^2 - r_1^2)^2\left(1 - \frac{r_1^2}{R^2 - r_1^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots \tag{1.5}$$

$$f(z, t) = \partial^2 A_{\varphi 0}(z, t)/\partial z^2$$

2. Линейное приближение. Линеаризуем граничные условия (1.1). (1.2), опуская квадратичные по переменным величинам члены:

$$v_{r1} = -\frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_{z1}}{\partial t} = -\frac{v_\varphi^2}{r_0}\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

Подставляя в левые части записанных выражений первые члены разложений v_{r1}, v_{z1} согласно (1.5) и полагая $r_1 = r_0$, а затем исключая f, находим, что радиальное смещение η свободной поверхности жидкости удовлетворяет линейному волновому уравнению

$$\partial^2\eta/\partial t^2 - c_0^2\partial^2\eta/\partial z^2 = 0, \quad c_0 = r_0^{-1}v_\varphi\sqrt{(R^2 - r_0^2)/2}$$

где c_0 — скорость распространяющейся по поверхности поступательно-вращательного потока жидкости недиспергирующей центробежной волны вида

$$\eta = a\exp[i(\omega t \mp kz)], \quad \omega = c_0 k$$

Полученный результат полностью согласуется с выводом работы [1].

3. Центробежные солитоны. Вводя безразмерные переменные

$$z' = z/l, \quad t' = c_0t/l, \quad \eta' = \eta/a, \quad v_{z1}' = v_{z1}/(\varepsilon c_0)$$

$$v_{r1}' = v_{r1}/(\varepsilon\delta c_0), \quad f' = r_0 f/(2\varepsilon c_0), \quad A_{\varphi 0}' = r_0 A_{\varphi 0}/(2\varepsilon c_0 l^2)$$

и полагая $R^2 - r_1^2 = (R^2 - r_0^2)(1 + \varepsilon\eta')$, перепишем граничные условия (1.1), (1.2) с точностью до первого неисчезающего порядка по ε и δ в виде

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t'} - \frac{\partial f'}{\partial z'} - \varepsilon\eta' \frac{\partial f'}{\partial z'} - \varepsilon f' \frac{\partial\eta'}{\partial z'} + {}^1/_2\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial (z')^3} = 0 \tag{3.1}$$

$$-\frac{\partial f'}{\partial t'} + {}^3/_2\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial (z')^2 \partial t'} + \frac{\partial\eta'}{\partial z'} + \varepsilon f' \frac{\partial f'}{\partial z'} = 0 \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.1), (3.2) можно найти η' методом возмущений [2]. Для этого в них нужно ввести разложение f' по малым параметрам: $f' = \eta' + \varepsilon f^{(1)} + \delta^2 f^{(2)}$ и сохранить члены до первого порядка по ε и δ^2. Тогда, если сложить образовавшиеся уравнения и учесть, что с рассматриваемой точностью $\partial f^{(n)}/\partial t' = \partial f^{(n)}/\partial z'$ $(n = 1, 2)$, то получится следующее выражение:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z'} + \eta' \frac{\partial\eta'}{\partial z'}\right) + \delta^2\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial z'} - \frac{\partial^3 f'}{\partial (z')^3}\right) = 0$$

Так как параметры ε и δ независимы, то стоящие при них коэффициенты должны равняться нулю. Учитывая это, запишем уравнение (3.1) в виде

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t'} - \frac{\partial\eta'}{\partial z'} - \varepsilon\eta' \frac{\partial\eta'}{\partial z'} - {}^1/_2\delta^2 \frac{\partial^3\eta'}{\partial (z')^3} = 0 \tag{3.3}$$

Возвращаясь к размерным переменным и используя преобразование $\xi = z + c_0t$, $\tau = -t$, можно свести (3.3) к уравнению Кортевега—де Вриза

$$\eta_\tau + c_0 h^{-1}\eta\eta_\xi + {}^1/_2 c_0 h^2 \eta_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{3.4}$$

решение которого в переменных z, t имеет вид

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \frac{z + Vt}{L}, \quad L = 2\sqrt{\frac{3h^3}{2\eta_0}}, \quad V = c_0\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\eta_0}{h}\right) \tag{3.5}$$

где η_0 — амплитуда солитона, определяемая начальными условиями, L — его ширина, V — скорость распространения.

Таким образом, в поступательно-вращательном потоке жидкости распространяющиеся по ее свободной поверхности центробежные волны при достаточно большой амплитуде колебаний могут принимать вид солитонов. Эти солитоны подобны солитонам на мелкой воде в случае плоской поверхности жидкости [3], но обладают рядом особенностей, связанных с вращением жидкости. Важным свойством центробежных солитонов, как видно из (3.5) и сделанного предположения о направлении завихренности потока (оно определяет знак угловой компоненты векторного потенциала), является их левовинтовой характер: направления момента импульса и скорости солитона противоположны друг другу.

Уравнение (3.4) может быть получено из уравнения Буссинеска

$$\eta_{tt} = c_0^2 (\eta + h^{-1}\eta^2 + h^2\eta_{zz})_{zz}$$

заменой переменных $\xi = z + c_0t$, $\tau = -\varepsilon t$ $(\varepsilon \ll 1)$ и отбрасыванием членов порядка ε^2. Последнее допускает решения в виде двух уединенных волн, описываемых уравнением

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 [\sqrt{{}^2/_3\eta_0 h^{-3}}\,(z \pm ct)]$$

и распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси z со скоростью $c = c_0\sqrt{1 + {}^2/_3\eta_0 h^{-1}}$, причем одна из волн левовинтовая, а другая правовинтовая. Преобразование $t = -\tau/\varepsilon$ означает замедление времени и эквивалентно допущению о малости скорости поступательного движения жидкости. Увеличение этой скорости, как ясно из изложенного выше, сопровождается переходом в режим преимущественного возбуждения левовинтовой уединенной волны, описываемой уравнением Кортевега — де Вриза и распространяющейся в направлении течения жидкости в случае левовинтового потока и в противоположную сторону в случае правовинтового потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков И. И.* Прикладная магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат. 1969. 360 с.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.
3. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир. 1983. 294 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию 16.X.1987

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Беленькая Л. Х.

Рассматривается устойчивость прямолинейной формы вязкоупругой, ортотропной цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки в случае больших частот модуляции, а также вблизи резонансных частот. Граничные условия на торцах оболочки допускают периодическое продолжение по пространственным переменным, так что исследование задачи сводится к системе обыкновенных интегродифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Задаче об устойчивости цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки посвящена работа [1], где для экспоненциального ядра релаксации по методу В. В. Болотина выведена приближенная формула для критической частоты модуляции вблизи главного резонанса при малых значениях амплитуды модуляции и малых вязкостях. Исследование устойчивости прямолинейной формы рассматриваемой цилиндрической оболочки проводилось численно с применением метода цепных дробей в широком диапазоне параметров системы [1].

Ниже получена асимптотика границы устойчивости, когда частота модуляции $\omega \to \infty$, волновые числа фиксированы. В случае дробно-экспоненциальных ядер релаксации критическая нагрузка и нейтральные колебания разыскиваются в виде рядов по дробным степеням параметра ε ($\varepsilon = 1/\omega$). Для дифференциальных уравнений в случае, когда ядро релаксации в нуле не имеет особенностей, и интегродифференциальных уравнений, асимптотические разложения строятся по целым степеням ε. Показано, что при больших частотах модуляции критическое значение нагрузки близко к ее стационарному значению.

Далее, при помощи метода Ляпунова — Шмидта исследовано поведение системы, когда частота ω близка к резонансной ω_k ($\omega_k = 2\omega_*/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; ω_* — собственная частота колебаний), а коэффициенты вязкости малы. Показано, что если среднее значение нагрузки $\langle\varphi\rangle \neq 0$, то на высших резонансах ($k = 2, 3, \ldots$) она сильно сдвигает частоту собственных колебаний и вблизи k-х резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) при малых значениях вязкости имеет место устойчивость, т. е. неустойчивость вблизи старших резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) гасится вязкостью.

Если же $\langle\varphi\rangle = 0$, то вблизи k-х резонансов ($k = 2, 3, \ldots$) наблюдается неустойчивость.

1. Постановка задачи. На ортотропную, вязкоупругую цилиндрическую оболочку действует продольная периодическая нагрузка $\varphi(\omega\tau) = \beta(1 + \mu\cos\omega\tau)$, где β — среднее осевое давление нагрузки, μ, ω — амплитуда и частота модуляции, d, δ — безразмерные длина и толщина оболочки. Используются уравнения движения оболочки, полученные в [1]. Торцы оболочки свободно перемещаются в осевом направлении и не могут перемещаться вдоль радиуса, так что исходная система сводится к системе обыкновенных интегродифференциальных уравнений с периодическими коэффициен-

---

[1] *Беленькая Л. Х.* Численное исследование устойчивости ортотропной, вязкоупругой цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки. Ростов н/Д. 1985. 60 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.12.84, № 7898-84.