

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ПЛАСТИНЫ ПО ЖИДКОЙ ПОЛОСЕ
ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

Веклич Н. А., Малышев Б. М.

При помощи теории дwoякопериодических функций комплексной переменной получены решения ряда плоских задач об ударе пластины по конечной полосе из идеальной несжимаемой жидкости. Подробно рассматриваются два типа граничных условий, соответствующих удару по жидкости в прямоугольном сосуде, и удару по свободному слою. В задаче с граничным условием первого типа в случае удара жесткой пластины получены формулы для определения присоединенной массы, являющиеся удобной для расчетов модификацией известных решений [1, 2]. Исследуется зависимость присоединенной массы пластины от размеров сосуда. Дается сравнение этой зависимости с результатами [1—6]. Оценивается влияние формы сосуда на присоединенную массу. Определяется функция скоростей для опертго слоя и слоя, помещенного между стенками, при ударе пластины.

Полученные выражения для функции скоростей могут быть использованы при решении задач гидроупругости о динамическом взаимодействии конструкций с жидкостью, приближенном анализе начального этапа пробивания преград ударниками, когда учитываются только инерционные свойства соударяющихся материалов, тестовой проверке численных и иных приближенных методов решения плоских задач гидромеханики.

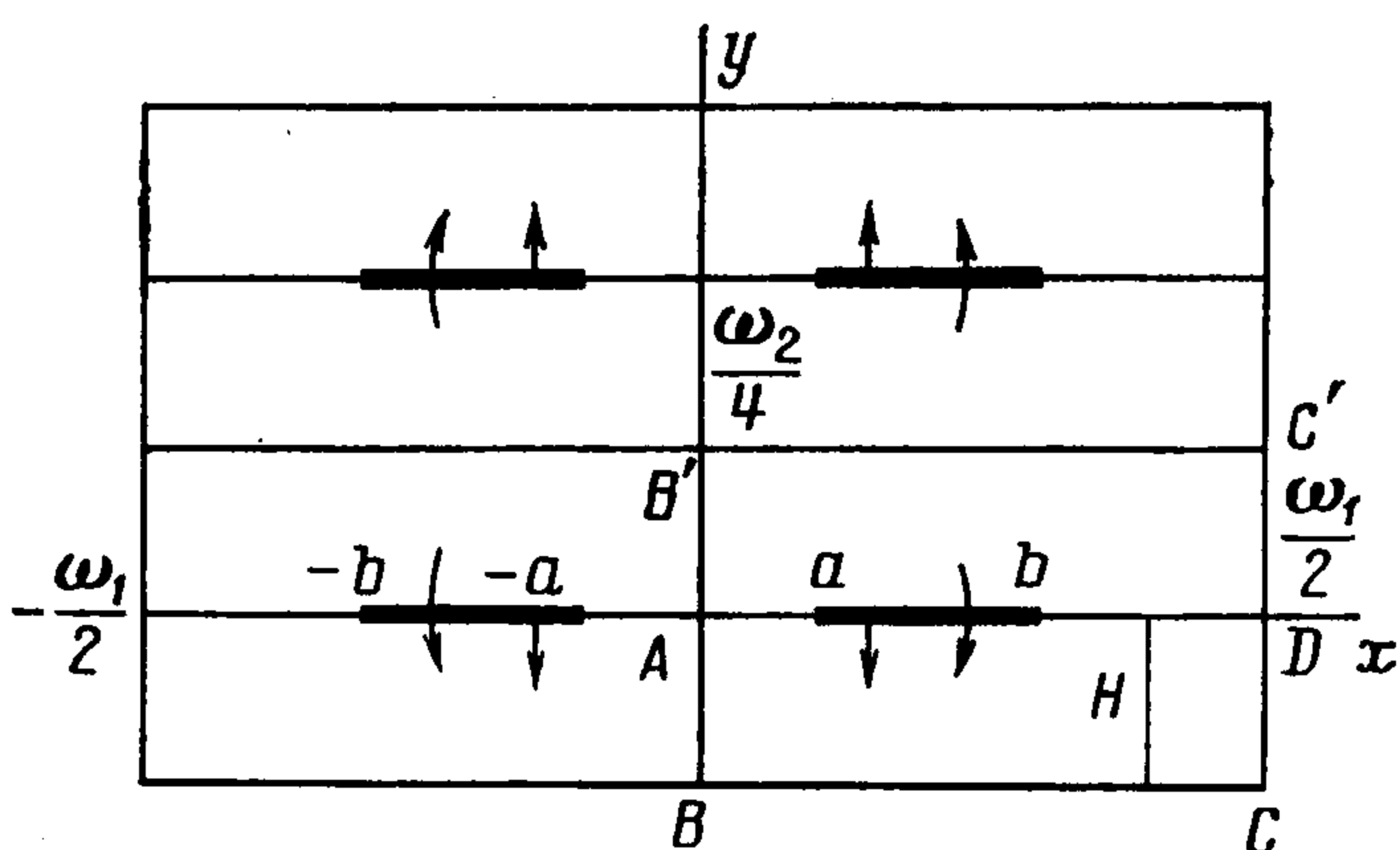
1. Удар пластины по несжимаемой жидкости в прямоугольном сосуде. Впервые постановка и решение этой задачи были даны [1] при помощи сигма- и дзета-функций Вейерштрасса. Эти функции не очень удобны для расчетов на ЭВМ. Чтобы избежать сложных преобразований решения и получить более совершенные расчетные формулы, задачу полезно рассмотреть дополнительно.

Напомним, следуя работе [1], ее постановку, чтобы заодно устранить вкравшиеся туда опечатки. Рассматривается удар при падении плоской пластины на горизонтальную поверхность спокойной жидкости, заключенной в прямоугольный цилиндрический сосуд $ABCD$ (фиг. 1). В момент соприкосновения с жидкостью пластина горизонтальна. Для определения возмущенного движения в следующий после удара момент поместим начало координат в левом краю сосуда в точке A , направив ось x по свободной поверхности вправо, а ось y — перпендикулярно ей вверх. Глубину жидкости обозначим $H = -i\omega_2/4$, где ω_2 — чисто мнимая величина, ширину сосуда обозначим $\omega_1/2$, a и b — абсциссы краев пластины в момент удара.

Для определения характеристической функции $w = \varphi + i\psi$ возмущенного движения имеем следующие граничные условия. На отрезке ab известна вертикальная составляющая скорости жидкости $v(x)$. Скорость направлена вниз и равна вертикальной скорости точек пластины после удара. Стенки сосуда AB , BC и CD непроницаемые, на них нормальная скорость жидкости равна нулю. На свободной поверхности импульсивное давление равно нулю, т. е. $\varphi = 0$.

Продолжив поток через свободную поверхность вверх, придем к задаче определения течения жидкости в прямоугольнике $BB'C'S$, вызванного движением пластины ab . Стороны прямоугольника — линии тока, поэтому течение жидкости можно продолжить сквозь стороны прямоугольника на всю плоскость. Осуществив продолжение, получим дwoякопериодическое течение жидкости вне решетки с периодами ω_1 и ω_2 . Каждая две пластины, соседние по горизонтали, имеют в симметричных точках одинаковые вертикальные скорости, а пластины, соседние по вертикали, — противоположные вертикальные скорости.

Из условия $\varphi = 0$ на Aa и Db следует, что циркуляция вокруг каждой пластины должна равняться нулю.



Фиг. 1

Картина течения на фиг. 1 позволяет дать и другую механическую интерпретацию задачи. Можно, например, считать, что она состоит в исследовании течения жидкости в прямоугольном сосуде удвоенной ширины ω_1 с тонкой непроницаемой перегородкой посредине. По свободной поверхности жидкости наносится удар двух пластин симметрично относительно середины сосуда. Перегородка не влияет на возникающее течение, и при необходимости ее можно убрать. Если $a = 0$, то обе пластины сливаются и имеем симметричный удар одной пластины шириной $2b$.

Решение поставленной задачи находилось при помощи эффективных общих формул ([1], гл. III, § 9) для функции скоростей $dw/dz = u(x, y) - iv(x, y)$, $z = x + iy$. Предварительно эти формулы упрощались — сигма-функции заменялись тэта-функциями Якоби. Существенно использовалась симметрия продолженного течения. В результате преобразований оказалось возможным выразить dw/dz в виде определенного интеграла, удовлетворяющего всем сформулированным выше условиям.

Была также найдена аналогичная формула для функции скоростей dw/dz бесциркуляционного течения жидкости в прямоугольнике периодов, соответствующая удару n пластин на поверхности AD с абсциссами a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) левого и правого края каждой пластины соответственно и нормальной скоростью удара $v(x)$.

При любом положении пластин на поверхности жидкости полученные формулы (определенные интегралы) для dw/dz не содержат неопределенных постоянных. Они удобны для вычисления различных элементов течения жидкости, в частности линий тока, характеристической функции $w = \phi + i\psi$ и т. д. Необходимое разделение интегралов на действительную и мнимую части осуществляется при помощи известных формул сложения тэта-функций [7].

В общем случае интегралы берутся численно.

Чтобы полнее описать возможности предлагаемого] способа исследования удара, приведем формулу для вычисления присоединенной массы пластины шириной $2b$ в сосуде конечной ширины $\omega_1 = 2d$ и глубины $H = -i\omega_2/4$. Скорость удара $v(x) = v_0 = \text{const}$, пластина расположена симметрично относительно середины сосуда. Для коэффициента присоединенной массы имеем

$$(1.1) \quad \lambda = 2\rho \int_0^b \frac{u(x, 0)}{v_0} x dx$$

где ρ — плотность жидкости, $u(x, 0)$ — горизонтальная составляющая скорости жидкости непосредственно под пластиной. Выделяя $u(x, 0)$ из выражения dw/dz при $y = 0$ и подставляя в (1.1), после перехода к безразмерным величинам и выполнения других необходимых преобразований получаем

$$(1.2) \quad \bar{\lambda} = \frac{8\gamma}{\pi^2} \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(\gamma)} \iint_{\Omega} [\xi_1 (f(1, -1) g_1^+(\xi_1) + f(-1, 1) g_1^-(\xi_1)) + \\ + \eta_1 (f(1, 1) g_1^+(\eta_1) + f(-1, -1) g_1^-(\eta_1))] dx dy, \quad \bar{\lambda} = \lambda/\lambda_{\infty} \\ \gamma = b/d, \quad \lambda_{\infty} = \pi\rho b^2/2, \quad \vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_0(0) \\ f(m, n) = (4\xi_2\eta_2 g^m(\xi_2) g^n(\eta_2))^{1/2} \\ \xi_1 = xy, \quad \eta_1 = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad \eta_2 = \frac{(x+y)^2}{4} \\ g_1^{\pm}(x) = \frac{\vartheta_1(\gamma(1 \mp x))}{\vartheta_1(\gamma x)} \pm \frac{\vartheta_0(\gamma(1 \mp x))}{\vartheta_0(\gamma x)}, \quad g(x) = \prod_{m=0}^1 \frac{\vartheta_m(\gamma(1-x))}{\vartheta_m(\gamma x)}$$

Входящие в (1.2) тэта-функции определяются следующими быстро сходящимися рядами [7]:

$$\vartheta_1(x) = 2q^{1/4} (\sin \pi x - q^2 \sin 3\pi x + \dots) \\ \vartheta_2(x) = 2q^{1/4} (\cos \pi x + q^2 \cos 3\pi x + \dots) \\ \vartheta_3(x) = 1 + 2q \cos 2\pi x + 2q^4 \cos 4\pi x + \dots \\ \vartheta_0(x) = 1 - 2q \cos 2\pi x + 2q^4 \cos 4\pi x - \dots$$

в которых для рассматриваемой задачи надо положить $q = \exp(-2\pi H/d)$. Область интегрирования Ω имеет вид треугольника $y \leq x \leq \sqrt{2} - y$, $0 \leq y \leq \sqrt{1/2}$ на вспомогательной плоскости xy .

Проверка показывает, что подынтегральная функция (1.2) имеет конечный предел при $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow 0$. В остальных точках треугольника Ω она непрерывна. Поэтому, не-

смотря на кажущийся сложный вид, интеграл (1.2) легко вычисляется методом Симпсона на основе стандартных процедур.

Расчеты $\bar{\lambda}$ по формуле (1.2) полезно сравнить с известными в литературе результатами [1, 2] для предельных случаев $H \rightarrow \infty$, d — конечное и $d \rightarrow \infty$, H — конечное. Первый из них (глубина сосуда бесконечна, а ширина конечна) соответствует удару периодической решетки пластин по полупространству. Удвоенная величина присоединенной массы из расчета на одну пластину определяется согласно [1] по формуле

$$(1.3) \quad \bar{\lambda} = \frac{8}{\pi^2 \gamma^2} \ln \sec \frac{\pi}{2} \gamma$$

Второй случай (ширина сосуда бесконечна, глубина конечна) был впервые исследован в [2]. Присоединенная масса пластины определялась [2] при помощи кратных интегралов. Можно, однако, несколько уточнить числовые результаты [2] (а заодно и опубликованные позже результаты [3]), если воспользоваться следующей формулой (К и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода):

$$(1.4) \quad \bar{\lambda} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\alpha}{k} \int_0^1 \frac{(K(k) - E(k)) f(x) + E(k)}{[1 - f(x)]^{3/2}} (1 - x^2) dx$$

$$\alpha = \pi b / (2H), \quad k = \operatorname{th} \alpha, \quad f(x) = \operatorname{sh}^2 \alpha x / \operatorname{sh}^2 \alpha$$

В (1.4) необходимо еще применить замену переменной интегрирования $x = 1 - t^2$, $0 \leq t \leq 1$. К такому интегралу был сведен соответствующий кратный интеграл работы [2] с целью повышения точности вычисления присоединенной массы пластины. Отметим, что (1.4) следует и из интеграла (1.2) но для этого требуется применить унимодулярное преобразование периодов у тэта-функций [8] и выполнить довольно громоздкие выкладки.

2. Удар пластины по свободному слою. Отмечалось [9], что правильность результатов расчетов элементов движения в задачах динамического взаимодействия пластин с жидкостью ограниченного объема может быть установлена при помощи свойства симметрии. По этому свойству, полусумма каких-нибудь характеристик течения (например, присоединенных масс пластины) при ударе по свободному слою жидкости и по слою, у которого граница непроницаема (закреплена), для слоя большой толщины должна с высокой степенью точности совпадать с соответствующей характеристикой удара пластины по полупространству. Применение этого свойства на практике позволяет избежать грубых ошибок в результатах решения задачи.

Поэтому наряду с задачей об ударе пластины по жидкости в прямоугольном сосуде полезно также рассмотреть удар по прямоугольному слою жидкости со свободной поверхностью, когда нет стенок и дна, ограничивающих движение жидкости.

На фиг. 2 показан свободный слой идеальной несжимаемой жидкости $ABCD$ толщиной $H = -i\omega_2/2$ и шириной $2d = \omega_1/2$. Удар пластины будем считать симметричным относительно середины грани AD . Ширину пластины обозначим по-прежнему $2b$, начало координат поместим в центре пластины.

Постановка задачи полностью совпадает с приведенной в п. 1, за исключением того, что грани AB , BC и CD слоя свободные, на них импульсивное давление равно нулю, т. е. $\varphi = 0$.

Продолжив поток через свободную поверхность вверх и вправо, получим двоякопериодическое течение жидкости вне решетки с периодами ω_1 и ω_2 . Соседние по горизонтали пластины имеют в симметричных точках противоположные вертикальные скорости.

Решение задачи ищем аналогично п. 1. Для функции скоростей получаем

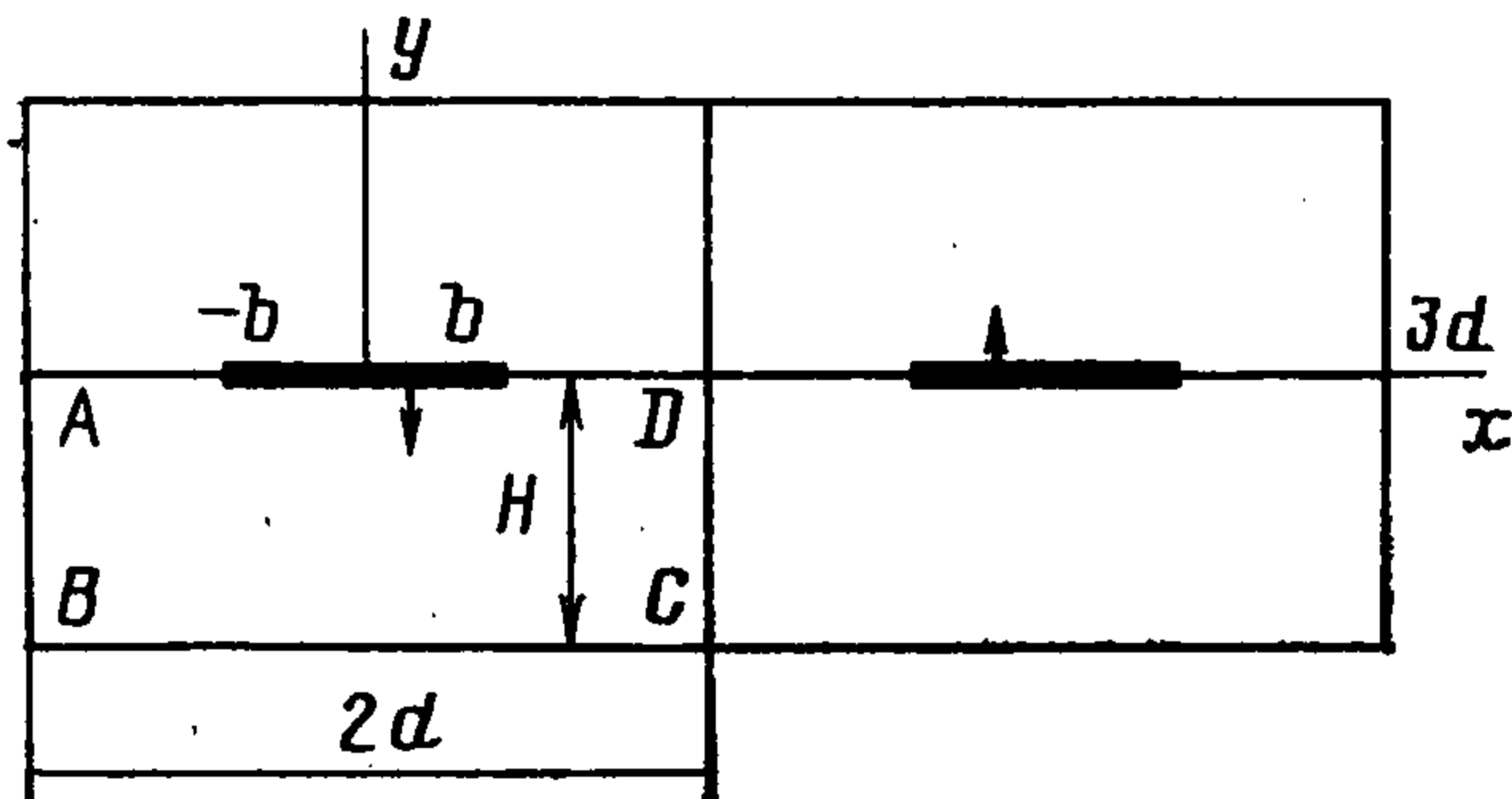
$$(2.1) \quad \frac{dw}{dz} = A \int_{-b}^b v(\xi) g_2(\xi, z) d\xi, \quad c = \frac{2b}{\omega_1}$$

$$g_2(\xi, z) = \chi(s) \frac{g_3(z)}{|g_3(\xi)|} - \chi(t) \frac{|g_3(\xi)|}{g_3(z)}$$

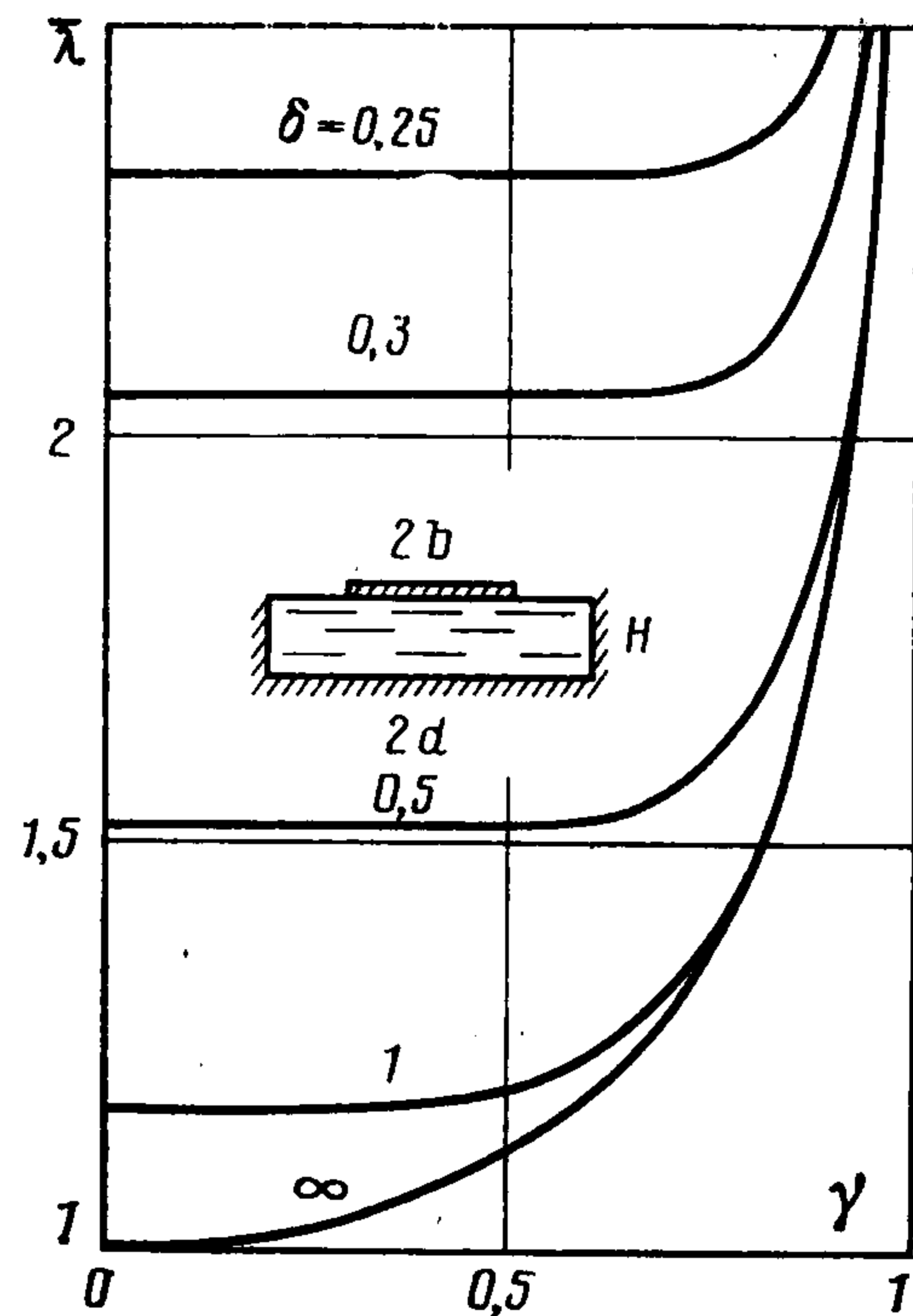
$$\chi(x) = \sum_{m=1}^2 (-1)^{m+1} \frac{\vartheta_m(x)}{\vartheta_m(p)}, \quad g_3(z) = \left(\frac{h(z)}{h(-z)} \right)^{1/2}$$

$$h(z) = \prod_{m=1}^2 \vartheta_m \left(\frac{b+z}{\omega_1} \right), \quad A = \frac{1}{2\pi} \frac{\vartheta_1'(0)}{\omega_1 \vartheta_1(c)}$$

$$v = (\xi - z)/\omega_1, \quad s = p + c, \quad t = p - c$$



Фиг. 2



Фиг. 3

В данном случае параметр тэта-функций $q = \exp(-0,5\pi H/d)$.

Из формулы (2.1) можно получить различные частные случаи. Пусть, например, слой имеет бесконечную ширину ($d \rightarrow \infty$) и конечную толщину H . Если удар осуществляется жесткой пластиной, причем после удара $v(x) = v_0 = \text{const}$, то интеграл (2.1) может быть выражен через элементарные функции. Для горизонтальной составляющей скорости жидкости $u(x, 0)$ непосредственно под пластиной получаем

$$(2.2) \quad \frac{u(x, 0)}{v_0} = \text{sh} \frac{\alpha x}{b} \left[\text{sh}^2 \alpha - \text{sh}^2 \frac{\alpha x}{b} \right]^{-1/2}$$

$$\alpha = \frac{\pi b}{2H}, \quad -b < x < b$$

Легко находится также коэффициент присоединенной массы пластины:

$$(2.3) \quad \bar{\lambda} = \frac{4}{\pi \alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^1 \arcsin \frac{\text{ch} \alpha x}{\text{ch} \alpha} dx \right)$$

Эта формула удобна для вычислений на ЭВМ. Если слой жидкости очень тонкий ($H \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$), то из (2.3) получаем $\bar{\lambda} = 2\rho b H$. При ударе по слою большой толщины ($H \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0$) имеем

$$(2.4) \quad \bar{\lambda} = 1 - \alpha^2/6$$

Учитывая, что при ударе по жидкости конечной глубины [2] (закрепленный слой) при $H \rightarrow \infty$ из (1.4) получаем

$$(2.5) \quad \bar{\lambda} = 1 + \alpha^2/12$$

Можно сказать, что полусумма присоединенных масс (2.4) и (2.5) для свободного и закрепленного слоя жидкости близка к присоединенной массе пластины при ударе по полупространству.

3. Удар по опертому слою и по слою, помещенному между стенками. Видоизменим граничные условия, полагая, что на фиг. 2 вдоль грани BC расположена непроницаемая стенка, на которой нормальная скорость жидкости равна нулю. Грани AB и CD по-прежнему считаются свободными, на них $\varphi = 0$.

Продолжив поток, приходим к определению двоякопериодического течения, имеющего основные периоды $\omega_1 = 4d$ и $\omega_2 = 4iH$. Комплексная функция скоростей определяется формулой (2.1), в которой надо положить

$$(3.1) \quad c = b/d, \quad q = \exp(-\pi H/d)$$

$$\chi(x) = \sum_{m=0}^3 (-1)^{m+1} \frac{\vartheta_m(x)}{\vartheta_m(p)}, \quad h(z) = \vartheta_1 \left(2 \frac{b+z}{\omega_1} \right)$$

Определение других величин дано в (2.1).

При выводе (3.1) использовались формулы удвоения для тэта-функций [8]. Это решение сохранится, если вдоль оси y на фиг. 2 поместить тонкую непроницаемую перегородку. Получим новую механическую интерпретацию задачи — исследуется движение пластины, затопленной посредине прямоугольного сосуда и расположенной перпендикулярно свободной поверхности жидкости.

Решение (3.1) обобщает результаты, полученные в [9, 10].

Пусть теперь вдоль граней AB и CD (фиг. 2) расположены непроницаемые стенки, а грань BC свободная, на ней $\varphi = 0$. Продолженное течение будет иметь основные периоды $\omega_1 = 2d$ и $\omega_2 = 2iH$. Функция скоростей dw/dz по-прежнему определяется интегралом (2.1), в котором надо принять

$$(3.2) \quad c = \frac{b}{2d}, \quad q = \exp\left(-\frac{\pi H}{d}\right)$$

$$\chi(x) = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1(p)}, \quad h(z) = \vartheta_1\left(\frac{b+z}{\omega_1}\right)$$

Остальные величины, входящие в (2.1), не меняются.

Во всех рассмотренных примерах функция $g_3(z)$ принимает действительные положительные значения на верхних берегах разрезов (отрезков).

4. Результаты вычислений. На фиг. 3 приведены графики зависимости безразмерного коэффициента $\bar{\lambda}$ от отношения γ при разных значениях параметра $\delta = H/b$, равному отношению глубины сосуда к полуширине пластины.

Нижняя кривая соответствует случаю $\delta = \infty$ (сосуд бесконечной глубины) и рассчитывалась по формуле (1.3). При $\gamma = 0$, соответствующем задаче [2], величина $\bar{\lambda}$ вычислялась при помощи определенного интеграла (1.4). Ниже приведены результаты расчетов по формуле (1.4) (последние четыре колонки определяют ординаты графиков на фиг. 3 при $\gamma = 0$):

δ	∞	5	1	0,5	0,3	0,25
$\bar{\lambda}$	1	1,0081	1,1725	0,519	2,045	2,318

Правильность вычисления интеграла (1.4) на ЭВМ проверялась при $\delta \geq 5$ при помощи сравнения с результатами расчета по приближенной формуле (2.5), а при малых δ — по асимптотическим формулам [9].

Заметим, что при $\delta = 5$ с полученным значением присоединенной массы (ПМ) согласуется численный результат $\bar{\lambda} = 1,007$ [3, 4]. При $\delta = 1$ приводившееся в литературе [1, 2, 5] значение $\bar{\lambda} = 1,165$ также оказалось близким к полученному здесь.

Дополнительным контролем точности вычислений интеграла (1.4) служили результаты по формуле (1.2). Вычисления этого двойного интеграла показали, что для малых отношений δ коэффициент ПМ сохраняет практически неизменное значение в широком диапазоне изменения γ и определяется в основном близостью дна сосуда. Стенки сосуда практически не влияют на удар, и вблизи пластины течение в значительной степени сходно с [2].

Если же ширина пластины близка к ширине сосуда, то ПМ быстро возрастает при возрастании γ , в основном за счет близости краев пластины к стенкам сосуда. В пределе при $\gamma \rightarrow 1$ ПМ пластины практически не зависят от глубины сосуда, все графики сливаются с графиком для удельной ПМ решетки пластин на полупространстве.

Влияние формы сосуда на ПМ пластины перестает сказываться практически при $\delta > 5$ во всем диапазоне изменения γ (для малых δ при $\gamma \rightarrow 1$). В частности, при $\delta = 5$ график $\bar{\lambda}$ почти сливается с нижней кривой на фиг. 3.

Полезно также сравнить с удельной ПМ периодической решетки пластин ($\delta = \infty$) и сосудов конечной глубины ($\delta > 5$) ПМ пластины на жидкости в канале цилиндрической формы [6]. Для этого в соответствующих формулах [6] необходимо использовать равенство $\sqrt{\kappa} = \gamma$. Оказывается, различие в ПМ не превосходит 8% во всем диапазоне изменения параметра γ . Возможно, что оно еще меньше, однако для получения более обоснованной оценки необходимо было бы несколько сузить область применимости асимптотической формулы [6] для ПМ пластины при $\kappa \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow 1$):

$$(4.1) \quad \bar{\lambda} = \frac{2}{\pi^2} \left(4 \ln \frac{1}{1-\gamma^4} + 16 \ln 2 - 2 - \frac{\pi^2}{2} \right)$$

Действительно, по формуле (4.1) в интервале $0,9 < \gamma < 0,95$ ПМ пластины получается на 4—8% меньше, чем по (1.3) для прямоугольного сосуда бесконечной глубины. Но, очевидно, из-за более стесненного движения жидкости в цилиндрическом канале

этого не должно быть. Однако уже при $\gamma = 0,99$ формула (4.1) дает большую на 0,82% ПМ, чем (1.3). Для еще более близких к единице значений γ различие в этих ПМ становится почти незаметным, что свидетельствует о слабом влиянии формы сосуда в указанных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука. 1980. 448 с.
2. Келдыш М. В. Удар пластинки о воду, имеющую конечную глубину // Тр. ЦАГИ. 1935. Вып. 152. С. 13—20.
3. Полунин А. М. Влияние стенок на присоединенную массу тел различной формы при вертикальном ударе (плоская задача) // Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп. 1966. Вып. 21. С. 98—115.
4. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение. 1976. 199 с.
5. Риман И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы // Тр. ЦАГИ. 1947. Вып. 635. 46 с.
6. Гуревич М. И. Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуцилиндра // ПММ. 1939. Т. 3. Вып. 2. С. 3—12.
7. Уиттекер Э., Ватсон Д. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 515 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука. 1967. 299 с.
9. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Плоская задача об ударе по жидкой полосе // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ. 1984. С. 99—121.
10. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Динамическое взаимодействие упругих пластин с идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 171.

Москва

Поступила в редакцию
13.1.1987

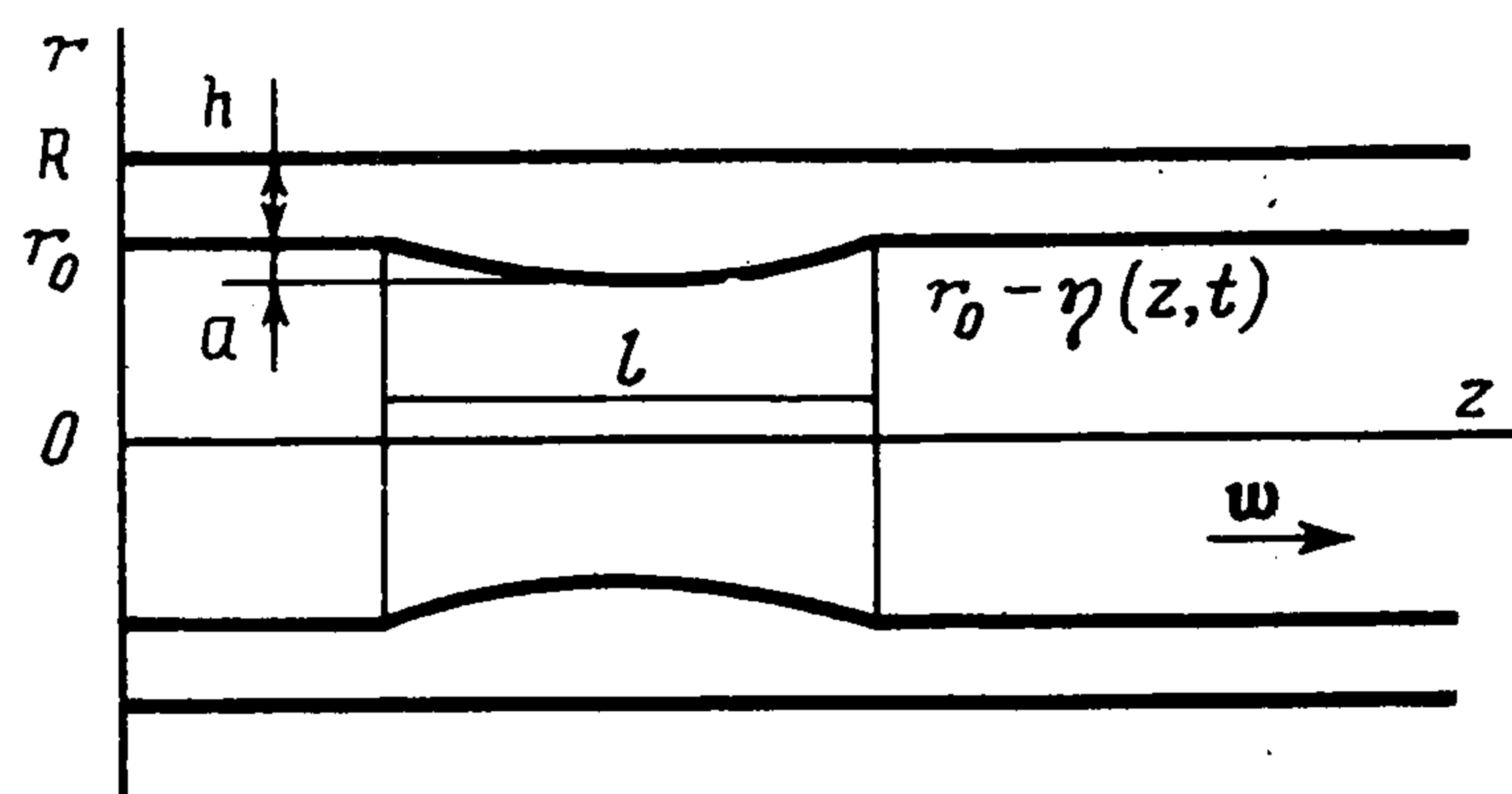
УДК 532.59 : 534

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ СОЛИТОНЫ В ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Браже Р. А.

Показана возможность возникновения солитонов в поступательно-вращательном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Такое движение характерно для вихревых МГД-генераторов и мелкомасштабных атмосферных вихрей.

1. Уравнения движения и граничные условия. Пусть при помощи тангенциального ввода и перепада давлений в жесткой трубе с внутренним радиусом R создан поступательно-вращательный поток жидкости. Это приводит к образованию в ней цилиндрической полости радиуса r_0 , заполненной воздухом или, если труба не сообщается с атмосферой, насыщенными парами жидкости (фигура). Любое возмущение $\eta(z, t)$ ради-



уса полости может распространяться вдоль оси трубы в виде плоских волн. В дальнейшем предполагается, что максимальная амплитуда возмущения a мала по сравнению с толщиной слоя жидкости h , а длина возмущения l , наоборот, велика по сравнению с h . Указанное предположение сводится к малости двух параметров: $\epsilon = a/h$ и $\delta = h/l$. При этом толщина жидкого слоя считается малой по сравнению с радиусом трубы, так что $h = (R^2 - r_0^2)/(2r_0)$.