Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСТУЩИХ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Потапов В. Д.

Обобщаются результаты [1, 2] исследования устойчивости растущих вязкоупругих стержней на конечном и бесконечном промежутках времени.

1. Постановка задачи об устойчивости растущего вязкоупругого тела. Рассмотрим тело, изготовленное в момент времени $t = 0$ и занимающее в трехмерном пространстве область Ω_0. На отрезке времени $[t_0, t_1]$, где $t_0 \geqslant 0$, происходит непрерывное наращивание тела. Закон наращивания, т. е. зависимость конфигурации тела от времени, считается заданным. Момент зарождения материальной частицы с координатами $\mathbf{x} = \{x_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ обозначим $\tau^* (\mathbf{x})$.

Тело находится под действием массовых $\mathbf{F}$ и поверхностных нагрузок $\mathbf{q}$, приложенных на границе тела $S_q (t)$, $\mathbf{F} = \{F_i\}$, $\mathbf{q} = \{q_i\}$. Заметим, что поверхность тела, через которую происходит наращивание материала, является частью поверхности S_q. На другой части поверхности тела $S_n (t)$ заданы перемещения, которые для определенности положим равными нулю. В дальнейшем будем предполагать, что тип граничных условий в процессе изготовления тела не меняется.

Под действием внешних сил в теле появляются перемещения $u_i (t, \mathbf{x})$, определяющие траекторию невозмущенного движения. В дальнейшем будем предполагать, что наращивание тела происходит достаточно медленно и перемещения u_i — медленно меняющиеся функции времени, в результате чего инерционными эффектами можно пренебречь.

Допустим, что в процессе роста тела его конфигурация оказывается отличной от расчетной (например, продольная ось растущего стержня вместо прямой (расчетной) в действительности оказывается искривленной). Это означает, что координаты материальных точек (при отсутствии внешних нагрузок) вместо x_i равны $x_i + \alpha v_i^\circ$. Будем считать v_i° достаточно малыми. Параметр α введен условно, его можно положить равным единице.

В таком теле перемещения будут равны $u_i^* = u_i + \alpha v_i$.

Движение тела, определяемое перемещениями u_i^*, будем называть возмущенным, а перемещения αv_i — искомыми возмущениями.

Введем норму перемещений ($V (t)$ — объем тела в момент времени t)

$$\| \mathbf{u} (t) \| = \Big(\int\limits_{V(t)} u_i (t, \mathbf{x}) u_i (t, \mathbf{x}) dV \Big)^{1/2}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование.

Определение. Невозмущенное движение растущего вязкоупругого тела называется устойчивым на бесконечном промежутке времени, если для любого как угодно малого числа $A > 0$ найдется такое число $\delta = \delta (A) > 0$, что для любых начальных смещений αv_i°, удовлетворяющих неравенству $\alpha \| \mathbf{v}^\circ \| < \delta$, соответствующие этому возмущению перемещения αv_i удовлетворяют неравенству $\alpha \| \mathbf{v} \| < A$ при $0 \leqslant t < \infty$.

Если движение растущего тела исследуется на конечном промежутке времени $[0, T]$ и задано критическое значение нормы перемещения $\| \mathbf{v} \|^*$, то можно говорить о критическом времени t^*, определяя его как момент первого достижения нормой перемещений $\alpha \| \mathbf{v} \|$ величины $\| \mathbf{v} \|^*$: $\alpha \max \| \mathbf{v}(t) \| < \| \mathbf{v} \|^*$, $0 \leqslant t < t^*$, причем $\alpha \| \mathbf{v}(t^*) \| = \| \mathbf{v} \|^*$.

Тело будем называть устойчивым на промежутке времени $[0, T]$, если $t^* > T$.

В предположении малости деформаций уравнения состояния для материала принимаются в виде [3]

$$\sigma_{ij} = (E_{ijkl} - \mathbf{R}_{ijkl})\, \varepsilon_{kl}, \quad E_{ijkl} = E_{ijkl}(t - \tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{R}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \int\limits_{\tau^*(\mathbf{x})}^{t} \overset{\circ}{R}_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\tau, \mathbf{x})\, d\tau$$

$$\overset{\circ}{R}_{ijkl} = R_{ijkl}(t - \tau^*(\mathbf{x}), \tau - \tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}), \quad t \geqslant \tau^*(\mathbf{x})$$

Ядра релаксации удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \overset{\circ}{R}_{ijkl} \leqslant R^{*}_{ijkl}(t, \tau, \mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Зависимость E_{ijkl}, $\overset{\circ}{R}_{ijkl}$ не только от $\tau^*(\mathbf{x})$, но и от $\mathbf{x}$ означает, что тело может быть неоднородным.

Нетрудно убедиться в том, что деформации в точках тела в момент времени $t \geqslant \tau^*(\mathbf{x})$ определяются выражением

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{x}) = e_{ij}^{\circ}(\mathbf{x}) + e_{ij}(t, \mathbf{x}) - e_{ij}(\tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x})$$

$$e_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\{[u^*_{i,j}(t, \mathbf{x}) + u^*_{j,i}(t, \mathbf{x})] - \alpha(\overset{\circ}{v}_{i,j} + \overset{\circ}{v}_{j,i}) +$$

$$+ [u^*_{k,i}(t, \mathbf{x})\, u^*_{k,j}(t, \mathbf{x}) - \alpha^2 \overset{\circ}{v}_{k,i} \overset{\circ}{v}_{k,j}]\}$$

$$e_{ij}(\tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = e_{ij}(t, \mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = \tau^*(\mathbf{x})$$

$e_{ij}^{\circ}(\mathbf{x})$ — начальная деформация материальной частицы, присоединяемой к телу в момент времени $\tau^*(\mathbf{x})$. Если наращивание тела производится частицами без предварительного натяга, то $e_{ij}^{\circ}(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Заметим, что напряжения $\sigma_{ij}^{\circ}(\mathbf{x})$ в присоединяемых частицах, обусловленные деформациями $e_{ij}^{\circ}(\mathbf{x}) \neq 0$, должны быть согласованы с граничными условиями на поверхности тела.

Предполагая внешние нагрузки консервативными, запишем функционал [4]

$$Э = \int\limits_{V(t)} \left[\frac{1}{2} E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}(\mathbf{R}_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \right] dV -$$

$$- \int\limits_{V(t)} F_i u_i^*\, dV - \int\limits_{S_q(t)} q_i u_i^*\, dS$$

Проварьируем Э по перемещениям v_i, соответствующим моменту времени t (перемещения u_i, отвечающие невозмущенному движению, не варьируются).

Условием стационарности функционала Э является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta Э = \alpha \delta Э' + \alpha^2 \delta Э'' = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\delta Э'$, $\delta Э''$ — выражения в вариации $\delta Э$ при соответствующих степенях параметра α.

Ввиду равновесности тела в невозмущенном движении должно соблюдаться равенство $\delta Э' = 0$. В результате из равенства (1.3) следует

$$\delta Э'' = 0 \tag{1.4}$$

Далее ограничимся рассмотрением того случая, когда перемещения u_i в невозмущенном движении вязкоупругого тела малы и могут быть найдены из уравнений линейной теории наращиваемых сред. Тогда уравнение (1.4) может быть представлено в виде

$$\int\limits_{V(t)} \{\delta v_{i,j}[(E_{ijkl}-\mathbf{R}_{ijkl})v_{k,l}]+\sigma_{ij}(v_{k,i}+\overset{\circ}{v}_{k,i})\delta v_{k,j}\}\,dV=0 \tag{1.5}$$

где σ_{ij} — напряжения в невозмущенном движении, δv_i — вариации перемещений v_i.

Заметим, что уравнение (1.5) представляет собой удобный аппарат для определения характеристик напряженно-деформированного состояния наращиваемых вязкоупругих тел, который является обобщением метода Ритца применительно к указанным телам.

2. Устойчивость тела на конечном интервале времени. Примем в качестве вариации перемещений δv_i перемещения v_i. Тогда уравнение (1.5) можно представить в виде

$$(\mathbf{v}',E\mathbf{v}')=-(\mathbf{v}',\sigma\mathbf{v}')-(\mathbf{v}',\sigma\mathbf{v}^{\circ\prime})+(\mathbf{v}',\mathbf{R}\mathbf{v}') \tag{2.1}$$

$$(\mathbf{v}',E\mathbf{v}')=\int\limits_V E_{ijkl}v_{i,j}v_{k,l}\,dV,\quad (\mathbf{v}',\sigma\mathbf{v}')=\int\limits_V \sigma_{ij}v_{k,i}v_{k,j}\,dV$$

$$(\mathbf{v}',\sigma\mathbf{v}^{\circ\prime})=\int\limits_V \sigma_{ij}\overset{\circ}{v}_{k,i}v_{k,j}\,dV,\quad (\mathbf{v}',\mathbf{R}\mathbf{v}')=\int\limits_V v_{i,j}(\mathbf{R}_{ijkl}v_{k,l})\,dV$$

Допустим, что внешняя нагрузка однопараметрическая, в результате чего можно записать $\sigma_{ij}=-\beta\sigma_{ij}^{\circ}$, $\beta=\mathrm{const}$.

Введем вектор $\mathbf{v}'$ с компонентами v_{ij}. Определим скалярное произведение двух векторов $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ и норму вектора $\mathbf{v}'$ следующим образом:

$$(\mathbf{v}_1',\mathbf{v}_2')=\int\limits_V v_{i,j}^{(1)}v_{i,j}^{(2)}\,dV,\quad \|\mathbf{v}'\|=\Big(\int\limits_V v_{i,j}v_{i,j}\,dV\Big)^{1/2}$$

Будем считать нагрузки такими, при которых для любого момента времени $t\in[0,T]$, минимальное собственное значение λ_1 уравнения

$$(\mathbf{v}',E\mathbf{v}')=\lambda(\mathbf{v}',\sigma^{\circ}\mathbf{v}') \tag{2.2}$$

положительно ($\lambda_1\geqslant a>0$).

Путем разложения векторов $\mathbf{v}'(t)$ и $\mathbf{v}^{\circ\prime}$ по полной ортогональной нормированной «с весом σ_{ij}°» системе функций, соответствующих собственным значениям λ_i уравнения (2.2), из равенства (2.1) получим соотношение

$$(\lambda_1-\beta)\|\mathbf{v}'\|^2\leqslant\beta\|\mathbf{v}'\|\|\mathbf{v}^{\circ\prime}\|+(\mathbf{v}',\mathbf{R}\mathbf{v}') \tag{2.3}$$

Доопределяя функции $v_{i,j}(\tau,\mathbf{x})$ при $0\leqslant\tau<\tau^*(\mathbf{x})$ как $v_{i,j}(\tau,\mathbf{x})=0$ и принимая во внимание условие (1.2), оценим правую часть неравенства (2.3) следующим образом:

$$(\mathbf{v}',\mathbf{R}\mathbf{v}')\leqslant\|\mathbf{v}'(t)\|\int\limits_0^t R(t,\tau)\|\mathbf{v}'(\tau)\|\,d\tau \tag{2.4}$$

$$R(t,\tau)=\sup\nolimits_{\mathbf{x}}R_{\max},\quad R_{\max}=R_{\max}(t-\tau^*(\mathbf{x}),\tau-\tau^*(\mathbf{x}),\mathbf{x})$$

где $R_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $\overset{\circ}{R}_{ijkl}$.

Учитывая (2.4), из (2.3) имеем

$$(\lambda_1-\beta)\|\mathbf{v}'(t)\|\leqslant\beta\|\mathbf{v}^{\circ\prime}\|+\int\limits_0^t R(t,\tau)\|\mathbf{v}'(\tau)\|\,d\tau \tag{2.5}$$

Из интегрального неравенства (2.5) находится оценка нормы $\| \mathbf{v}'(t) \|$, что может быть сделано, например, при помощи леммы Гронуолла—Беллмана. На основании теорем вложения для нормы возмущений перемещений тела $\| \mathbf{v}(t) \|$ справедливо соотношение $\| \mathbf{v}(t) \| \leqslant C \| \mathbf{v}'(t) \|$, C — постоянная Корна [5].

При помощи полученной таким образом оценки нормы $\| \mathbf{v}(t) \|$ может быть выполнен анализ устойчивости наращиваемого тела на конечном промежутке времени (например, [2]).

3. Устойчивость растущего тела на бесконечном промежутке времени. Далее предполагается, что начиная с момента времени t_1 размеры тела и нагрузки, действующие на него, остаются неизменными во времени, а напряжения в невозмущенном движении $\sigma_{ij}(t, \mathbf{x})$ при $t \to \infty$ стремятся к предельным значениям, равным $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$. Полагается также, что модули упругости E_{ijkl} и ядра релаксации $\overset{\circ}{R}_{ijkl}$ материала удовлетворяют дополнительным условиям

$$\lim_{t\to\infty} E_{ijkl}(t - \tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \overset{\circ}{E}_{ijkl}(\mathbf{x})$$

$$\int_T^t \sup_{\mathbf{x}} | \overset{\circ}{R}_{ijkl} - R'_{ijkl}(t, \tau, \mathbf{x}) | \, d\tau \to 0 \text{ при } T \to \infty$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{t \geqslant T} \int_T^t R'_{ijkl}(t, \tau, \mathbf{x}) \, d\tau = \Gamma'_{ijkl}(\mathbf{x})$$

$$\Gamma^*_{ijkl}(\mathbf{x}) = \sup_{t\geqslant 0} \int_0^t R^*_{ijkl}(t, \tau) \, d\tau$$

Теорема. При соблюдении сформулированных условий растущее тело устойчиво на бесконечном промежутке времени, если справедливо неравенство $\lambda_1^* > \beta$. Под λ_1^* понимается минимальное собственное значение ($\lambda_1^* \geqslant c > 0$), отвечающее уравнению

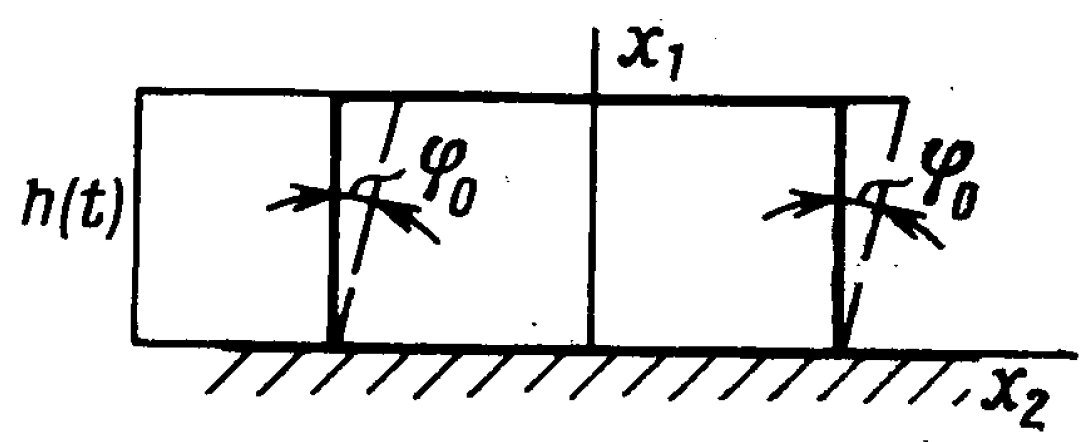
$$(\mathbf{v}', E^\circ \mathbf{v}') = \lambda (\mathbf{v}', \sigma^* \mathbf{v}')$$

$$(\mathbf{v}', E^\circ \mathbf{v}') = \int_U \overset{\circ}{E}_{ijkl} v_{i,j} v_{k,l} \, dV \quad (\mathbf{v}', \sigma^* \mathbf{v}') = \int_U \sigma_{ij}^* v_{k,i} v_{k,j} \, dV$$

(U — объем тела при $t \geqslant t_1$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -\beta \sigma_{ij}^*(\mathbf{x})$).

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство аналогичных теорем об устойчивости неоднородно стареющего вязкоупругого (не растущего) тела [6] и наращиваемого стержня [2].

4. Примеры. Остановимся на двух примерах, которые иллюстрируют важность учета фактора роста для правильной оценки работоспособности наращиваемых тел.



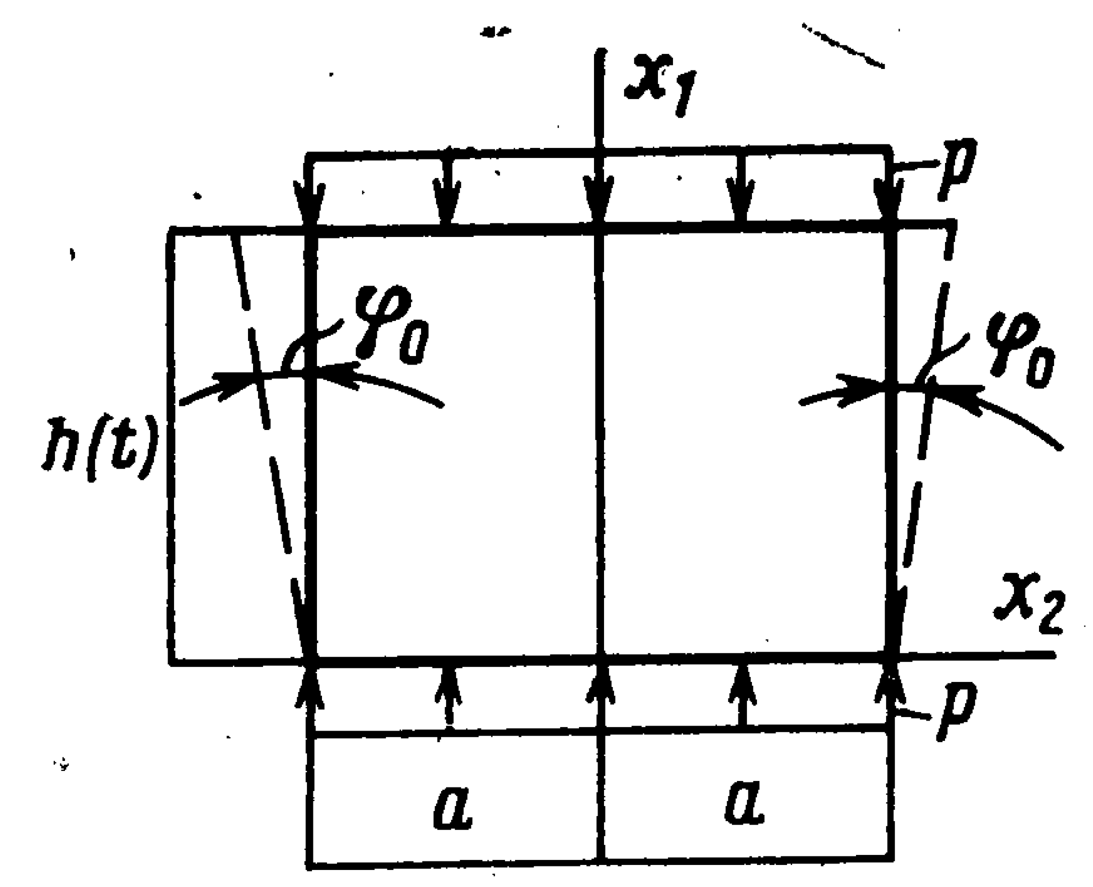
Фиг. 1

Пример 1. Рассмотрим задачу о плоском деформированном состоянии для тела, бесконечно вытянутого в направлении оси x_3 (фиг. 1) и непрерывно наращиваемого горизонтальными слоями со скоростью $w(t) = w_0 e^{-\eta t}$. Материал тела считается изотропным, упругим и стареющим. Коэффициент Пуассона постоянный во времени, а модуль сдвига определяется выражением (G_0, ρ — постоянные)

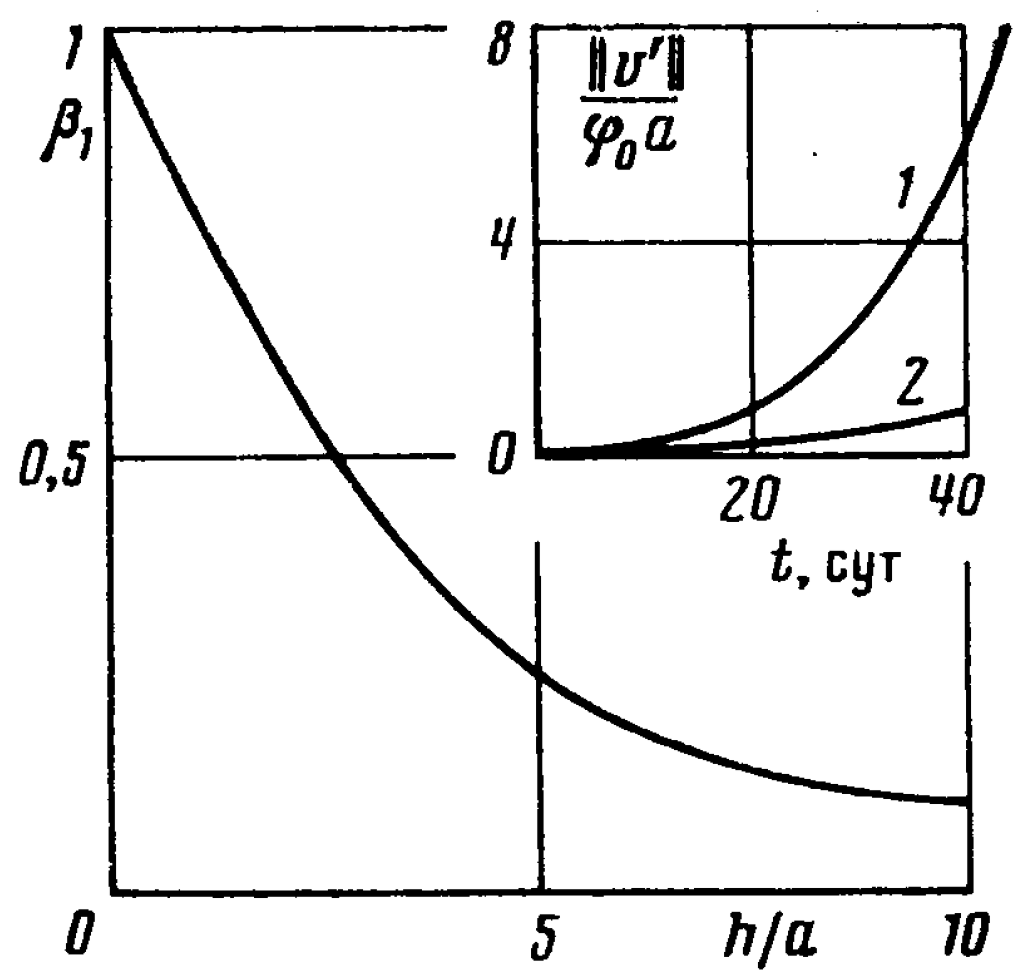
$$G = G_0 \{1 - \exp[-\rho(t - \tau^*(x_1))]\}, \quad \tau^*(x_1) = -\frac{1}{\eta} \ln\left(1 - \frac{\eta}{w_0} x_1\right)$$

Предположим, что в невозмущенном движении реализуется одноосное напряженное состояние

$$\sigma_{11}(t, x_1) = -\gamma [h(t) - x_1] = -p, \quad \gamma = \text{const}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Допустим, что в процессе наращивания боковые кромки тела получили отклонение от вертикали на малый угол φ_0 ($v_2^\circ = \varphi_0 x_1$). Под действием нагрузки в теле появились дополнительные перемещения v_1, v_2. Из вариационного уравнения (1.5) следуют уравнения

$$
\left[\frac{E}{1-\mu^2}(v_{1,1}+\mu v_{2,2})\right]_{,1} + [G(v_{1,2}+v_{2,1})]_{,2} - (pv_{1,1})_{,1} = 0 \tag{4.1}
$$

$$
[G(v_{1,2}+v_{2,1})]_{,1} + \left[\frac{E}{1-\mu^2}(\mu v_{1,1}+v_{2,2})\right]_{,2} - (pv_{2,1})_{,1} = (p\overset{\circ}{v}_{2,1})_{,1}
$$

На верхней и нижней кромках тела выполняются условия

$$
x_1 = 0, \quad v_1 = v_2 = 0; \quad x_1 = h, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0
$$

Здесь σ_{ij} — возмущения напряжений.

Предположим, что тело вытянуто в направлении x_2, в результате чего можно отвлечься от граничных условий на боковых кромках.

Будем искать решение уравнений (4.1) в виде $v_1 = v_1(x_1)$, $v_2 = v_2(x_1)$. Тогда

$$
\left(\frac{E}{1-\mu^2}v_{1,1}\right)_{,1} - (pv_{1,1})_{,1} = 0; \quad (Gv_{2,1})_{,1} - (pv_{2,1})_{,1} = \varphi_0(p)_{,1}
$$

Найдем решение второго из этих уравнений. При $x_1 = h$ должно удовлетворяться равенство $Gv_{2,1} - p(v_{2,1} + \varphi_0) = 0$, с учетом которого запишем

$$
v_2 = \varphi_0 \int_0^{x_1} \frac{p}{G-p}\,dx_1
$$

Знаменатель подынтегрального выражения при $x_1 = 0$ может обратиться в нуль в некоторый момент времени t_+, который находится из уравнения

$$
G_0[1-\exp(-\rho t_+)] = \gamma h(t_+), \quad h(t_+) = w_0\eta^{-1}[1-\exp(-\eta t_+)]
$$

Очевидно, что невозмущенное движение тела устойчиво на бесконечном промежутке времени только в том случае, когда для любого момента времени $t > 0$

$$
1 - e^{-\rho t} > \gamma w_0 G_0^{-1}\eta^{-1}(1-e^{-\eta t}) \tag{4.2}
$$

В противном случае можно говорить об устойчивости того же движения только на конечном промежутке времени. Так, при фиксированной величине Δ предельного отклонения верхней кромки тела в направлении оси x_2 критическое время t_* достижения функцией v_2 значения Δ будет меньше времени t_+. Как видно из (4.2), значительную роль в оценке устойчивости даже упругого тела играют характеристики скорости его наращивания.

Пример 2. Рассмотрим прямоугольное тело, бесконечное в направлении оси x_3 и непрерывно наращиваемое горизонтальными слоями в направлении оси x_1 с постоянной скоростью w_0 (фиг. 2). Материал тела изотропный вязкоупругий стареющий с постоянным во времени модулем упругости и коэффициентом Пуассона ν. Ядро релаксации при одноосном напряженном состоянии принимается в виде (γ, b, A, C — постоянные)

$$
\frac{R^\circ}{E} = -\frac{\partial}{\partial\tau}\{\omega(\tau-\tau^*(x_1))[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]\}
$$

$$
\omega(\tau-\tau^*(x_1)) = C + A\exp[-b(\tau-\tau^*(x_1))]
$$

Будем считать, что в невозмущенном движении реализуется одноосное напряженное состояние $\sigma_{11}(t, x_1) = -p$.

Допустим, что боковые грани тела имеют симметричное относительно оси x_1 отклонение на угол φ_0 ($v_2^\circ = \varphi_0 x_1 x_2/a$). Под действием нагрузки появляются возмущения перемещений v_1, v_2, которые определяются из уравнений (4.1), в которых вместо E и G следует подставить операторы $E(1 - \mathbf{R})$, $G(1 - \mathbf{R})$. На кромках тела выполняются граничные условия

$$x_1 = 0, h, \quad \sigma_{11} = p(v_1 + v_1^\circ)_{,1} \quad v_2 = 0 \tag{4.3}$$

$$x_2 = \pm a, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{21} = 0 \tag{4.4}$$

Здесь под σ_{ij} понимаются возмущения напряжений.

Соотношение (2.5) принимает вид

$$(1 - \varkappa(t)) \| \mathbf{v}'(t) \| \leqslant \varkappa(t) \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + \int_0^t R_1(t, \tau) \| \mathbf{v}'(\tau) \| d\tau \tag{4.5}$$

$$R_1(t, \tau) = \frac{R^*(t, \tau)}{E}, \quad \varkappa(t) = \frac{\beta}{\beta_1(t)}, \quad \beta = \frac{p}{G}$$

$$\| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| = \varphi_0 \{{}^2/{}_3 a^{-1} h(t)[h^2(t) + a^2]\}^{1/2}$$

$\beta(t_1)$ — критическое значение параметра β для упругого тела в момент времени t

Решение однородной системы уравнений (4.1) для упругого тела при граничных условиях (4.3), (4.4) записываются так [7]:

$$u_1 = (k_1 c_1 \operatorname{sh} k_1 X_2 + k_2 c_2 \operatorname{sh} k_2 X_2) \cos X_1 \tag{4.6}$$

$$u_2 = (k_1^2 c_1 \operatorname{ch} k_1 X_2 + c_2 \operatorname{ch} k_2 X_2) \sin X_1$$

$$k_1^2 = 1 - \frac{1-\mu}{2}\beta, \quad k_2^2 = 1 - \beta, \quad \mu = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad X_n = \frac{\pi}{h} x_n, \quad n = 1, 2$$

Значение параметра β_1 определяется из характеристического уравнения, которое следует из равенств (4.4) после подстановки в них выражений (4.6)

$$4k_1 k_2 \operatorname{th} k_2 \alpha = (2 - \beta)^2 \operatorname{th} k_1 \alpha, \quad \alpha = \pi a/h \tag{4.7}$$

График изменения β_1 во времени при $\mu = 0{,}5$ показан на фиг. 3. Заметим, что

$$h = wat, \quad \alpha = \pi/(wt), \quad w = w_0/a$$

Здесь же представлены графики $\| v'(t) \| \sim t$ для тела, материал которого характеризуется следующими постоянными: $C/G = 0{,}075$, $A/G = 0{,}75$, $\gamma = 0{,}02$ 1/сут, $b = 0{,}005$ 1/сут при $\beta = 0{,}1$. Кривая *1* отвечает скорости $w = 0{,}1$ сут$^{-1}$, а кривая *2* — 0,05 сут$^{-1}$.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о существенном влиянии скорости наращивания (изготовления) тела на его устойчивость и на величины его перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Потапов В. Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 270. № 4. С. 799—803.
2. *Потапов В. Д.* Устойчивость растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 1012—1019.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 383 с.
5. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.; Л.: Гостехиздат. 1952. 216 с.
6. *Потапов В. Д.* Устойчивость тел из неоднородно стареющего анизотропного вязкоупругого материала // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 648—654.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка. 1971. 276 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1987