Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СИММЕТРИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Брудный С. Р., Шифрин Е. И.

Для функций, определенных в ограниченных областях и обращающихся в нуль на границе, вводится операция симметризации. Исследуются свойства введенной операции и анализируется ее связь с симметризацией Шварца. Рассматриваются примеры применения разработанного аппарата для построения изопериметрических оценок в задачах кручения и продольных колебаний неоднородного стержня. Полученная в задаче кручения неоднородного стержня оценка жесткости является обобщением известного в теории упругости изопериметрического неравенства Полиа для жесткости при кручении однородного стержня.

Решение многих задач теории упругости сопряжено со значительными математическими трудностями. Вместе с тем часто практический интерес представляют не столько поля напряжений и смещений, сколько некоторые их интегральные характеристики (например, жесткость упругого стержня при кручении, частота основного тона собственных колебаний мембраны, первая критическая сила сжатого стержня и т. д.). В ряде случаев их удается оценить не находя полного решения задачи. Среди всех возможных оценок наиболее эффективны изопериметрические, в которых искомая величина оценивается через соответствующую характеристику решения более простой задачи, допускающей аналитическое или эффективное численное решение.

Построение изопериметрических неравенств для решений краевых задач, как правило, основывается на применении операций симметризации Штейнера или Шварца линий уровня функции [1], которые сохраняют L_p-нормы функции и не увеличивают соответствующие нормы ее градиента. Этот аппарат оказывается эффективным при построении оценок решений некоторого класса дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1] и переменными коэффициентами в младших членах [2, 3]. Использование симметризаций Штейнера и Шварца дает возможность также получить изопериметрические неравенства для определенного типа псевдодифференциальных уравнений [4]. Однако развитые методы [1—4] не позволяют получать оценки решений краевых задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при старших производных, а именно такие уравнения встречаются в задачах теории упругости неоднородных тел. Причина возникающих здесь трудностей заключается в том, что приходится оценивать L_p-нормы градиента, содержащие весовые функции. Стандартные операции симметризации линий уровня функции преобразуют ее градиент произвольным образом, в результате чего не удается эффективно перестроить весовую функцию в симметризованной области и, следовательно, получить требуемую оценку.

Ниже предлагается новая операция симметризации, позволяющая обойти указанную трудность, и рассмотрены примеры ее применения.

1. *Определение.* Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена в ограниченной области $G \in R^n$, обладает в этой области суммируемым модулем градиента и обращается в нуль на ее границе ∂G. Пусть K — шар, объем которого равен объему G, а центр совпадает с началом координат, $g(\mathbf{x}) = g(r)$ — функция, определенная в K, равноизмеримая с $|\nabla f(\mathbf{x})|$ и не убывающая с ростом радиуса $r = |\mathbf{x}|$. Определим в шаре K функцию

$$F(r) = \int_r^R g(t)\,dt$$

где R — радиус шара K. Операцию, ставящую в соответствие функции $f(\mathbf{x})$ функцию $F(r)$, будем называть SE-симметризацией функции f и обозначать $SE(f)$.

Напомним, что функции $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ называются равноизмеримыми, если $\forall a, b$ меры множеств $\{\mathbf{x}\colon a < A(\mathbf{x}) < b\}$ и $\{\mathbf{x}\colon a < B(\mathbf{x}) < b\}$ равны.

Рассмотрим свойства построенной функции $SE(f)$. Она является сферически-симметричной $SE(f)(x) = SE(f)(r)$, причем $SE(f)(R) = 0$, т. е $SE(f)$ обращается в нуль на границе шара K. Кроме того

$$|\nabla SE(f)(\mathbf{x})| = |dSE(f)(r)/dr| = g(r)$$

Следовательно, функции $|\nabla SE(f)(\mathbf{x})|$ и $|\nabla f(\mathbf{x})|$ равноизмеримы.

Теорема 1

$$\int_K SE(f)(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqslant \int_G |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

Доказательство. Предварительно отметим следующий факт. Пусть $A(r)$ — сферически-симметричная функция, определенная в шаре K радиуса R, причем $A(R) = 0$ и $A(r)$ не возрастает с ростом r. Тогда справедливо представление

$$V_A = \int_K A(r)\,d\mathbf{x} = c_n \int_0^R r^{n-1} A(r)\,dr = n^{-1} \int_0^R J_A(r)\,dr \tag{1.2}$$

$$J_A(r) = c_n \int_r^R t^{n-1} |A'(t)|\,dt, \quad c_n = ns_n \tag{1.3}$$

(s_n — объем единичного шара в R^n). Справедливость (1.2) доказывается интегрированием по частям. Очевидно, что выражение (1.3) эквивалентно следующему:

$$J_A(\rho) = \int_{L_\rho} |\nabla A(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}, \quad L_\rho = \{\mathbf{x} \in K : \rho < r < R\} \tag{1.4}$$

Обозначим $S(f)(\mathbf{x}) = S(f)(r)$ функцию, определенную в K и являющуюся результатом применения операции симметризации Шварца к функции $|f(\mathbf{x})|$ [1]. Как известно [1]

$$\int_K S(f)(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_G |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.5}$$

Из рассмотренных выше свойств функции $SE(f)$ и известных свойств функции $S(f)$ [1] вытекает, что для них справедливо представление (1.2).

Пусть $S(f)(\rho) = \varkappa$. Так как $S(f)(r)$ — невозрастающая функция радиуса r, то множество $\Omega = \{\mathbf{x} \in K\colon S(f) \leqslant \varkappa\}$ совпадает с кольцом L_ρ. Отсюда, учитывая (1.4) и свойства операции симметризации Шварца [1], имеем

$$J_{S(f)}(\rho) = \int_\Omega |\nabla S(f)|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\omega |\nabla f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.6}$$

$$\omega = \{\mathbf{x} \in G\colon |f(\mathbf{x})| \leqslant \varkappa\}$$

Отметим, что меры множеств Ω и ω равны. Так как по построению функции $|\nabla SE(f)(\mathbf{x})|$ и $|\nabla f(\mathbf{x})|$ равноизмеримы и $|\nabla SE(f)(\mathbf{x})|$ не убывает с ростом r, то

$$J_{SE(f)}(\rho) = \int_\Omega |\nabla SE(f)(r)|\,d\mathbf{x} \geqslant \int_\omega |\nabla f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.7}$$

Из (1.6), (1.7) следует, что

$$J_{SE(f)}(r) \geqslant J_{S(f)}(r), \quad \forall r \in [0, R] \tag{1.8}$$

Отсюда, учитывая представление (1.2) для функций $SE(f)$ и $S(f)$ и используя (1.5), получаем неравенство (1.1).

Замечание 1. Из доказанной теоремы не следует, что $SE(f)(r) \geqslant S(f)(r)$, и в общем случае это неравенство не выполняется. Однако в одномерном случае $n = 1$ оно имеет место. Действительно, при $n = 1$ из определения функций $J_{SE(f)}$ и $J_{S(f)}$ вытекает, что они просто совпадают соответственно с $2SE(f)(r)$ и $2S(f)(r)$. Поэтому в силу (1.8)

$$SE(f)(r) \geqslant S(f)(r), \quad \forall r \in [0, R], \quad n = 1 \tag{1.9}$$

На возможность нарушения неравенства (1.9) при $n \geqslant 2$ указывает следующая

Лемма. Пусть $f(x) = f(r)$ — неотрицательная, монотонно убывающая функция r, определенная в шаре радиуса R и обращающаяся в нуль на его границе. Тогда при $n \geqslant 2$

$$S(f)(0) \geqslant SE(f)(0) \tag{1.10}$$

Доказательство. Очевидно, что $S(f)(r) = f(r)$ и

$$S(f)(0) = \int_0^R \left| \frac{dS(f)(r)}{dr} \right| dr \tag{1.11}$$

На основании (1.3)

$$|dS(f)(r)/dr| = -(c_n^{-1} r^{-n+1})\, dJ_{S(f)}(r)/dr \tag{1.12}$$

Подставив (1.12) в (1.11) и проинтегрировав по частям, получим

$$S(f)(0) = c_n^{-1} \left[(n-1) \int_0^R \frac{J_{S(f)}(0) - J_{S(f)}(t)}{t^n}\, dt + \frac{J_{S(f)}(0)}{R^{n-1}} \right] \tag{1.13}$$

Аналогично получим

$$SE(f)(0) = c_n^{-1} \left[(n-1) \int_0^R \frac{J_{SE(f)}(0) - J_{SE(f)}(t)}{t^n}\, dt + \frac{J_{SE(f)}(0)}{R^{n-1}} \right] \tag{1.14}$$

Так как по построению $J_{SE(f)}(0) = J_{S(f)}(0)$ и справедливо неравенство (1.8), то из (1.13), (1.14) вытекает неравенство (1.10).

Если рассматриваемая функция $f(r)$ не инвариантна относительно SE-симметризации, то на некотором множестве $\delta \subset [0, R]$ $J_{SE(f)}(r) > J_{S(f)}(r)$ и, следовательно, выполняется строгое неравенство $S(f)(0) > SE(f)(0)$.

Замечание 2. Пусть в области $G \in R^n$ определена неотрицательная функция f, обращающаяся в нуль на ∂G. Эта функция задает некоторую поверхность в пространстве R^{n+1}. Рассмотрим тело $T_1 \in R^{n+1}$, образованное поверхностью f и областью G. Его объем V_1 и площадь поверхности S_1 находятся по формулам

$$V_1 = \int_G f(x)\, dx, \quad S_1 = \int_G [1 + \sqrt{1 + |\nabla f|^2}]\, dx$$

Применим к функции $f(x)$ SE-симметризацию. В результате получим осесимметричное тело $T_2 \in R^{n+1}$, образованное поверхностью $SE(f)$ и шаром K, объем V_2 и площадь поверхности S_2 которого выражаются в виде

$$V_2 = \int_K SE(f)(x)\, dx, \quad S_2 = \int_K [1 + \sqrt{1 + |\nabla SE(f)|^2}]\, dx$$

Из рассмотренных выше свойств SE-симметризации вытекает, что $V_2 \geqslant V_1$, $S_2 = S_1$. Таким образом, SE-симметризация тела T_1 (в указанном выше смысле) сохраняет площадь поверхности и не уменьшает его объем.

Интересно сравнить тело T_2 и тело T_3, образованное поверхностью $S(f)$ и шаром K. Согласно известным свойствам операции симметризации Шварца [1], объем V_3 и площадь поверхности S_3 тела T_3 связаны с соответствующими характеристиками тела T_1 следующим образом: $V_3 = V_1$, $S_3 \leqslant S_1$. Другими словами, при построении тела T_3 с помощью симметризации Шварца сохраняется объем и не увеличивается площадь поверхности.

В случае $n = 1$ в силу (1.9) справедливо отношение $T_3 \subset T_2$.

2. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие возможности применения SE-симметризации для получения изопериметрических оценок.

Чистое кручение неоднородного стержня односвязного сечения. Эта задача сводится к решению уравнения [5] ($\mu(\mathbf{x})$ — модуль сдвига, $G \in R^2$ — односвязная область)

$$(\nu\Phi_{,1})_{,1} + (\nu\Phi_{,2})_{,2} = -2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \Phi|_{\partial G} = 0 \tag{2.1}$$
$$\nu(\mathbf{x}) = \mu^{-1}(\mathbf{x}), \quad 0 < \mu(\mathbf{x}) < \infty$$

Жесткость стержня при кручении выражается величиной [5]

$$C = 2\int_G \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Теорема 2. Жесткость при кручении неоднородного стержня односвязного сечения не превосходит жесткости при кручении кругового стержня той же площади сечения с модулем сдвига, равноизмеримым с исходным модулем, осесимметричным и неубывающим с ростом радиуса.

(Эта теорема естественным образом обобщает изопериметрическую теорему теории кручения однородных стержней [1].)

Доказательство. Решение задачи (2.1) доставляет максимум функционалу

$$U = \sup_{\varphi,\ \varphi|_{\partial G}=0} \left[4\int_G \varphi\, d\mathbf{x} - \int_G \nu\, |\nabla\varphi|^2\, d\mathbf{x}\right] \tag{2.2}$$

причем $U_{\max} = C$ [5]. Пусть $\nu_0(\mathbf{x})$ — функция, равноизмеримая с функцией $\nu(\mathbf{x})$ и противонаправленная функции $|\nabla\Phi(\mathbf{x})|$, где $\Phi(\mathbf{x})$ — решение задачи (2.1). Напомним, что функции $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ называются сонаправленными, если

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [A(\mathbf{x}_1) - A(\mathbf{x}_2)]\,[B(\mathbf{x}_1) - B(\mathbf{x}_2)] \geqslant 0, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \tag{2.3}$$

и противонаправленными, если $F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leqslant 0$ [1].

Поскольку функция $\nu_0(\mathbf{x})$ противонаправлена $|\nabla\Phi(\mathbf{x})|$, то ее в общем случае можно представить в виде $\nu_0(\mathbf{x}) = \nu_1(|\nabla\Phi(\mathbf{x})|)$ [1].

В дальнейшем будем использовать следующее свойство со- и противонаправленных функций [1]. Пусть функции f и g определены и неотрицательны в области $\Omega \in R^n$. Тогда

$$\int_\Omega f_- g_-\, d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega fg\, d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega f_+ g_+\, d\mathbf{x}$$

где $f_\pm$ и $g_\pm$ равноизмеримы соответственно с f и g на Ω и f_+ сонаправлена с g_+, а f_- и g_- противонаправлены.

На основании этого свойства

$$\int_G \nu(\mathbf{x})\, |\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \geqslant \int_G \nu_0(\mathbf{x})\, |\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$$

Отсюда и из (2.2) следует, что

$$C=4\int_G \Phi\, d\mathbf{x}-\int_G \nu(\mathbf{x})\,|\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\leqslant 4\int_G \Phi\, d\mathbf{x}-\int_G \nu_0(\mathbf{x})\,|\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

Так как $\Phi\,|_{\partial G}=0$, то к функции Φ применима SE-симметризация. Преобразуем также и функцию неоднородности. Определим в круге K функцию $\nu_*(\mathbf{x})$ следующим образом: $\nu_*(\mathbf{x})=\nu_*(r)$, равноизмерима с исходной функцией $\nu(\mathbf{x})$ и не возрастает с ростом радиуса r. Тогда по построению

$$\int_G \nu_0(\mathbf{x})\,|\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}=\int_K \nu_*(r)\,|\nabla SE(\Phi)(r)|^2\, d\mathbf{x} \tag{2.5}$$

В силу теоремы 1

$$\int_G \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\leqslant\int_G |\Phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}\leqslant\int_K SE(\Phi)(r)\, d\mathbf{x} \tag{2.6}$$

На основании (2.4)—(2.6) имеем

$$C\leqslant 4\int_K SE(\Phi)(r)\, d\mathbf{x}-\int_K \nu_*(r)\,|\nabla SE(\Phi)(r)|^2\, d\mathbf{x}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi,\ \varphi|_{\partial G}=0}\left[4\int_K \varphi\, dx-\int_K \nu_*(r)\,|\nabla\varphi(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\right]=C_*$$

Здесь C_* — жесткость при кручении кругового стержня с модулем сдвига $\mu_*(r)=1/\nu_*(r)$. Очевидно, что функция $\mu_*(r)$ сонаправлена с r, т. е. не убывает с возрастанием радиуса.

Отметим, что полученная оценка одновременно является и решением соответствующей оптимизационной задачи о выборе формы сечения скручиваемого стержня и наиболее рациональном распределении неоднородности.

Продольные колебания неоднородного упругого стержня. Уравнение и граничные условия, описывающие продольные колебания упругого стержня с закрепленными концами и переменными по длине плотностью $\rho(x)$, модулем Юнга $E(x)$ и площадью сечения $F(x)$, имеют вид [6]

$$\frac{d}{dx}\left[Q(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda M(x)\,y(x)=0,\quad y(-l)=y(l)=0 \tag{2.7}$$

$$Q(x)=E(x)\,F(x),\quad M(x)=\rho(x)\,F(x)$$

где $2l$ — длина стержня, λ — квадрат собственной частоты. Функцию $Q(x)$ будем называть обобщенной жесткостью, а $M(x)$ — обобщенной плотностью неоднородного стержня.

Известно [6], что квадрат частоты основного тона (минимальной частоты) собственных колебаний ω может быть определен следующим образом:

$$\omega=\inf_{v(x),\ v(-l)=v(l)=0}\frac{\langle Q(x)\,[dv/dx]^2\rangle}{\langle M(x)\,v^2(x)\rangle} \tag{2.8}$$

Здесь и далее угловые скобки означают интегрирование по x на отрезке $[-l,\ l]$.

Теорема 3. При продольных колебаниях неоднородного упругого стержня с закрепленными концами среди всех равноизмеримых функций распределения обобщенных жесткости $Q(x)$ и плотности $M(x)$ минимальная частота основного тона собственных колебаний соответствует случаю, когда $Q(x)$ и $M(x)$ симметричны относительно середины стержня и не возрастают при движении от середины стержня к его концам.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — собственная функция, отвечающая частоте основного тона для $Q(x)$ и $M(x)$

(2.9) $$\omega = \langle Q(x)\,[dy/dx]^2\rangle / \langle M(x)\, y^2(x)\rangle$$

и пусть функции $Q_0(x)$ и $Q(x)$, $M_0(x)$ и $M(x)$ — равноизмеримы, причем $Q_0(x)$ противонаправлена с $|\,dy/dx\,|$, а $M_0(x)$ сонаправлена с $|\,y(x)\,|$. В силу отмеченного выше свойства имеем

(2.10) $$\omega \geqslant q_0/m_0, \quad q_0 = \langle Q_0(x)\,[dy/dx]^2\rangle, \quad m_0 = \langle M_0(x)\, y^2(x)\rangle$$

Построим функции $Q_*(x)$ и $M_*(x)$, равноизмеримые с исходными функциями $Q(x)$ и $M(x)$ соответственно, симметричные относительно середины стержня и невозрастающие при движении от середины стержня к его концам. Тогда согласно построению и в силу (1.9)

$$q_0 = \langle Q_*(x)\,[dSE(y)(x)/dx]^2\rangle$$

$$m_0 = \langle M_*[S(y)(x)]^2\rangle \leqslant \langle M_*(x)\,[SE(y)(x)]^2\rangle$$

Учитывая (2.10), окончательно получим

(2.11) $$\omega \geqslant \inf_{v(x),\ v(-l)=v(l)=0} \frac{\langle Q_*(x)\,[dv/dx]^2\rangle}{\langle M_*(x)\, v^2(x)\rangle} = \omega_*$$

где ω_* — квадрат частоты основного тона собственных колебаний, отвечающей распределению неоднородностей вида $Q_*(x)$, $M_*(x)$.

Отметим, что собственная функция $y_*(x)$, соответствующая частоте основного тона $\sqrt{\omega_*}$, инвариантна относительно SE-симметризации. Действительно, в противном случае она не может доставлять минимум функционалу (2.11), так как применение к ней операции SE-симметризации не увеличивает значение функционала.

Теорема 3 обобщает результаты работы [2], в которой получены аналогичные неравенства в случае, когда неоднородной является только плотность, а модуль Юнга и площадь сечения постоянны по длине стержня.

Замечание 3. Путем небольшой модификации введенной выше операции симметризации можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть поверхность S_1 ограничивает область $G_1 \subset R^n$, а поверхность S_2 ограничивает область $G_2 \subset R^n$, причем $G_1 \subset G_2$. В области $G_2 \setminus G_1$ рассматривается краевая задача

(2.12) $$\nabla\cdot(k(\mathbf{x})\,\nabla U) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_2 \setminus G_1, \quad k(\mathbf{x}) \geqslant 0$$
$$U|_{S_1} = 0, \quad U|_{S_2} = 1$$

Исследуется величина

$$I(k(\mathbf{x}), G_1, G_2) = \int\limits_{G_2 \setminus G_1} k(\mathbf{x})\,|\nabla U_0(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$$

где $U_0(\mathbf{x})$ — решение (2.12). Справедливо следующее утверждение: среди всех поверхностей S_1, S_2, ограничивающих области G_1, G_2 заданного объема, и среди всех равноизмеримых функций $k(\mathbf{x})$ минимум $I(k(\mathbf{x}), G_1, G_2)$ достигается в случае, когда G_1, G_2 — концентрические шары, функция $k(x)$ определена в шаровом слое $G_2 \setminus G_1$, сферически симметрична и не убывает с ростом радиуса.

Краевая задача (2.12) встречается, например, в задачах об установившемся распределении температур или диффузии при неоднородной теплопроводности или соответственно проницаемости среды. Величина $I(k(\mathbf{x}), G_1, G_2)$ характеризует поток тепла или вещества через поверхность S_2.

Математически теорема 4 обобщает изопериметрическое неравенство для электростатической емкости [1], отвечающее случаю $k(\mathbf{x}) = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз. 1962. 336 с.
2. *Beesack P. R., Schwarz B.* On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. // Canad. J. Math., 1956. V. 8. N 4. P. 504—515.
3. *Schwarz B.* Bounds for the principal frequancy of the non-homogeneous membrane and the generalized Dirichlet integral // Pacif. J. Math., 1957. V. 7. N 4. P. 1653—1676.
4. *Шифрин Е. И.* Оценки решения задачи о плоской трещине нормального разрыва в материале со степенным упрочнением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 4. С. 31—43.
5. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ. 1976. 367 с.
6. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение. 1976. 320 с.

Москва

Поступила в редакцию 19.III.1987