

УДК 539.3

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РАВНОПРОЧНЫХ ГРАНИЦ УПРУГИХ ТЕЛ

Вигдергауз С. Б.

Для системы поверхностей или плоских кривых специальной формы, определяемой из механических соображений, методами теории потенциала найдены необходимые условия ее существования, построен ряд интегральных тождеств и решены некоторые варианты задачи Робэна.

I. Рассматривается линейно-упругая, однородная и изотропная трехмерная область S пространства E , ослабленная совокупностью m непересекающихся замкнутых полостей S_k^- с гладкой границей Γ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) и нагруженная на бесконечности усилиями P_i ($i = 1, 2, 3$) вдоль осей декартовой системы координат $X_1X_2X_3$; G, ν — упругие модули среды, $I_1(x), I_2(x)$ — инварианты тензора напряжений в произвольной точке $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Граница $\Gamma = \bigcup \Gamma_k$ называется равнопрочной для данной нагрузки [I], если в любой ее точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ справедливо тождество $I_1(\xi) = \text{const}$. Постоянная в правой части равна $P_1 + P_2 + P_3 = P$. Доказано [I], что такая граница минимизирует максимальное по области значение локального критерия пластичности Мизеса $F(x) = I_1^2(x) - 3I_2(x)$, тем самым являясь решением следующей задачи оптимального управления формой:

$$(1.1) \quad \max_{x \in (S+\Gamma)} F(x) \rightarrow \min_{\{\Gamma\}}$$

Поскольку функция $F(x)$ инвариантна относительно преобразования подобия координат, то оптимальная по (1.1) граница, если она существует, определяется не однозначно, а по крайней мере с точностью до масштаба, задаваемого произвольным множителем C . В действительности класс решений во многих случаях значительно шире, что существенно используется в п. 3.

Установлено [1], что компоненты вектора смещения $u(x)$ напряженного состояния, отвечающего возмущению, вносимому в однородное поле полостями, представляют собой гармонические в области S функции, которые убывают на бесконечности, как $O(|x|^{-2})$, принимают на оптимальной границе значения, пропорциональные соответствующей координате точки $\xi \in \Gamma_k$ [1]

$$(1.2) \quad u_i(\xi) = \lambda_i \xi_i + d_{ik}, \quad 4G\lambda_i = P - 2P_i \\ i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

где d_{ik} — некоторые постоянные, и, кроме того

$$(1.3) \quad \text{div } u(x) \equiv 0, \quad \text{rot } u(x) \equiv 0, \quad x \in \mathcal{E}$$

В сочетании с краевыми условиями нагружения [2]

$$(1.4) \quad 2G\partial u_i/\partial n = -P_i n_i, \quad i = 1, 2, 3$$

соотношения оптимальности (1.2) образуют обратную краевую задачу теории упругости, давая в ряде случаев конструктивную возможность

найти форму равнопрочной границы [1, 3]. Здесь $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внутренней для S нормали к Γ в точке ξ .

Специальный вид правых частей в тождествах (1.2), (1.4) позволяет, используя их по отдельности, построить гармонические продолжения составляющих вектора $u(x)$ внутрь области $S_- = US_k^-$ соответственно функциями $\lambda_i x_i'$ или $-P_i x_i'$ ($i = 1, 2, 3$), $x' = (x_1', x_2', x_3') \in S_-$. Полученные таким образом векторы U_1 и V_1 определены во всем пространстве, имеют заданную асимптотику на бесконечности, гармоничны в S и S_- , однако обладают разными свойствами в точках оптимальной границы. Именно, из (1.4) следует, что вектор U_1 непрерывен на Γ , но испытывает там скачок к нормальным производным

$$(1.5) \quad 4G\mu_1(\xi) = [\partial U_1 / \partial n^+ - \partial U_1 / \partial n^-] = -Pn$$

Напротив, из (1.2) вытекает, что скачок V_1 на Γ равен

$$(1.6) \quad 4G\mu_2(\xi) = [\partial V_1 / \partial n^+ - \partial V_1 / \partial n^-] = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

а его нормальные производные непрерывны.

Соотношения (1.5), (1.6) позволяют [4] записать U_1 и V_1 через интегральные операторы Λ_1, Λ_2 простого или, соответственно, двойного слоя от заданных плотностей

$$(1.7) \quad \begin{aligned} 4\pi U_1(x) &= \Lambda_1[\mu_1(\xi)] = -P\Lambda_1[n(\xi)] \\ 4\pi V_1(x) &= \Lambda_2[\mu_2(\xi)] = -P\Lambda_2[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \end{aligned}$$

Дифференцирование первого из тождеств (1.7) по n и последующий предельный переход $x \rightarrow \eta \in \Gamma$ во всех полученных соотношениях дает в скалярной записи с учетом (1.2), (1.4) и свойств потенциалов [4]

$$(1.8) \quad \eta_i + d_{ik} = \beta_i \Lambda_i[\partial \xi_i / \partial n]; \quad \beta_i = P / (2P - 4P_i)$$

$$(1.9) \quad \eta_i + d_{ik} = \gamma_i \Lambda_2[\xi_i + d_{il}]; \quad \gamma_i = P / (P - 4P_i)$$

$$(1.10) \quad \partial \eta_i / \partial n = \gamma_i \Lambda_2^*[\partial \xi_i / \partial n]$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \Gamma_k, \quad \xi \in \Gamma_l; \quad k, l = 1, 2, \dots, m$$

$$(1.11) \quad \beta_i = \gamma_i / (\gamma_i + 1), \quad i = 1, 2, 3$$

(Λ_2^* — оператор, сопряженный к Λ_2).

Из полученных представлений следует, что входящие в них постоянные d_{ik} равны нулю. Действительно, учитывая, что оператор Λ_2 от произвольной постоянной сводится к интегралу Гаусса [4] и поэтому вычисляется явно, соотношения (1.9) можно записать в форме неоднородных интегральных уравнений типа Фредгольма

$$(1.12) \quad \eta_i - \gamma_i \Lambda_2(\xi_i) = (\gamma_i - 1)d_{ik}$$

Тождество (1.10) означает, что $\partial \eta_i / \partial n$ — собственная функция оператора Λ_2^* , отвечающая собственному числу γ_i ($i = 1, 2, 3$). Поскольку все точки спектра рассматриваемых операторов — простые [4], то эта функция единственна. Она, очевидно, ортогональна всем d_{ik} , поэтому каждое из уравнений (1.12) имеет единственное решение [4]. Непосредственно проверяется, что оно сводится к постоянной ($-d_{ik}$) на поверхности Γ_k , а это противоречит (1.12) и, следовательно, $d_{ik} = 0$.

Таким образом, η_i для числа γ_i служит собственной функцией оператора Λ_2 с носителем на равнопрочной границе, а вытекающее из (1.9), (1.10) тождество (1.8) вместе с равенством (1.11) является частным случаем соотношений, полученных [5] относительно любых собственных функций взаимно сопряженных операторов Λ_2, Λ_2^* на произвольных гладких по-

верхностях. Надо отметить, что приведенное в [5] доказательство неточно и нуждается в очевидных исправлениях.

Спектр интегральных операторов типа потенциала, как известно [4], лежит вне единичного круга, поэтому $|\beta_i| \geq 1$ ($i = 1, 2, 3$), что равносильно неравенству треугольника

$$(1.13) \quad |P_1| \leq |P_2| + |P_3|$$

и двум аналогичным, получаемым из него круговой перестановкой индексов. По сказанному, они представляют собой необходимое условие разрешимости задачи (1.1) в данной постановке. Для одиночной полости эти неравенства и достаточны [1] — оптимальной является поверхность трехосного эллипсоида с отношением осей, зависящим от нагрузки.

Соотношения (1.8)–(1.11) получены как следствие резкого упрощения уравнений упругого равновесия среды в областях с равнопрочной границей. Они справедливы и в двумерной задаче оптимизации для плоскости с равнопрочными отверстиями при $\gamma_i = P(P - 2P_i)$ ($i = 1, 2$), $P = P_1 + P_2$. Условие ее разрешимости принимает вид

$$(1.14) \quad q = |(P_2 - P_1)/(P_1 + P_2)| \leq 1$$

Ранее оно ставилось [6] как требование однолистности конформного отображения области с неизвестными границами на стандартную область в процессе их фактического отыскания.

Указанные тождества описывают геометрию совокупности равнопрочных поверхностей, определенных в задаче (1.1) и параметрически зависящих от значений нагрузки P_i . Последние могут изменяться в пределах, которые не шире допускаемых неравенствами (1.13).

2. В случае $m > 1$ компоненты $U_{1i}(x)$ вектора U_1 являются обобщением эллипсоидальных гармонических функций первого порядка [2], поскольку они допускают интегральное представление (1.7) и в S_- совпадают с линейными гармоническими полиномами $\lambda_i x_i$. С их помощью можно построить и три (из пяти возможных) аналогичные функции второго порядка по формуле

$$U_2(x) = (U_{21}, U_{22}, U_{23}) = \mathbf{R}(x) \times U_1(x), \quad x \in E$$

($\mathbf{R}(x) = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки x).

Из (1.3) следует, что вектор $U_2(x)$ также всюду непрерывен и гармоничен в S, S_- (∇^2 — оператор Лапласа):

$$\begin{aligned} x \in S, \quad \nabla^2 U_2(x) &= \text{rot } u(x) \equiv 0 \\ x \in S_-, \quad \nabla^2 U_{2i}(x) &= 2(P_i - P_j)x_i x_j \equiv 0 \\ i \neq j \neq l, \quad i, j, \quad l &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

При учете (1.5) заключаем, что скачок нормальной производной вектора U_2 на Γ равен

$$\mathbf{R}(\xi) \times [\partial U_1 / \partial n] = -P \mathbf{R}(\xi) \times \mathbf{n}(\xi)$$

откуда вытекает представление типа (1.7)

$$(2.1) \quad U_2(x) = -P \Lambda_1 [\mathbf{R}(\xi) \times \mathbf{n}(\xi)]$$

Этих функций достаточно для построения в S замкнутого решения так называемой эластостатической задачи Робэна второго рода [2]. Она заключается в определении напряженно-деформированного состояния упругой среды, возникающего при повороте на (малые) углы θ_i вокруг осей X_i системы включенных в нее абсолютно твердых тел, которые занимают область S_- .

Оказывается, что в случае равнопрочных границ решение не зависит явно от m и строится по схеме, приведенной в [2] для единственного включения в форме трехосного эллипсоида. С этой целью соответствующий вектор смещения $V(x)$ ищется в форме Папковича — Нейбера [2] ($V(x)$ — вектор, $B_0(x)$ — скаляр)

$$(2.2) \quad U(x) = 4(1 - \nu)V - \text{grad}(R \cdot V + B_0) \\ B_0 = N_1 \theta_1 U_{21} + N_2 \theta_2 U_{22} + N_3 \theta_3 U_{23}, \quad B_1 = D_1 \theta_2 U_{13} - D_1' \theta_3 U_{12}$$

Компоненты B_2, B_3 получаются из B_1 круговой перестановкой индексов. Подстановка (2.2) в краевое условие задачи [2] $V_1(\xi) = \theta_2 \xi_3 - \theta_3 \xi_2$ и два аналогичных ему приводят к линейной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных N_i, D_i, D_i' , распадающейся, как и в [2], на три, которые, отвечают поворотам на углы θ_i по отдельности. Так, для θ_1 система с точностью до обозначений совпадает с (5.4.5) из [2], если учесть соотношения оптимальности [1] для эллипсоида. Из-за экономии места она здесь не выписывается.

Необходимые для построения системы выражения частных производных по x_i на Γ от компонент U_1, U_2 находятся из (1.7) и (2.1) по формулам дифференцирования Гюгонио — Адамара [4]. Например

$$\frac{\partial U_{11}}{\partial x_1} = \left[\frac{\partial U_{11}}{\partial n} \right] n_1 + \frac{\partial U_{11}}{\partial x_1^-} = -Pn_1^2 + \lambda_1 \\ \frac{\partial U_{21}}{\partial x_1} = \left[\frac{\partial U_{21}}{\partial n} \right] n_2 + \frac{\partial U_{21}}{\partial x_1^-} = Pn_2(n_3 \xi_2 - n_2 \xi_3)$$

3. Перейдем к двумерной ($P_3 = 0, P = P_1 + P_2$) задаче (1.1). Для большого числа различных вариантов расположения отверстий в плоскости их оптимальная граница найдена явно [6] как зависимость вида

$$(3.1) \quad \xi_2 = f(\xi_1, m, q, C, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2m})$$

где f — определенная для каждого m функция, а ω_k ($k = 1, 2, \dots, 2m$) — геометрические параметры, представляющие собой координаты концов m разрезов вдоль действительной оси вспомогательной плоскости, на которую в [6] отображается S в процессе отыскания Γ из условий (1.2) — (1.4). При дополнительной симметрии их число может уменьшиться.

Важно, что неравенство (1.14) во всех рассмотренных в [6] случаях — не только необходимое, но и достаточное условие, обеспечивающее существование равнопрочных границ при любых значениях ω_k с естественным ограничением

$$-\infty < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2m} < \infty$$

означающим, что разрезы на вспомогательной плоскости не пересекаются. Таким образом, формула (3.1) исчерпывающе описывает $2m$ параметрическое семейство решений плоской задачи (1.1) для данного q .

На этой основе можно аналитически решить и обычную задачу Робэна, которая заключается [4] в определении плотности $\rho(\xi)$, логарифмического потенциала простого слоя с носителем на Γ , принимающего постоянные значения в S_k^- , что равносильно построению в E многосвязного аналога эллипсоидальной гармонической функции $U_0(x)$ нулевого порядка (t — длина дуги контура Γ):

$$(3.2) \quad U_0(x) = \int_{\Gamma} \rho(\xi) \ln \frac{1}{r(\xi, x)} dt, \quad r = |x - \xi|, \quad \xi \in \Gamma \\ U_0(x') = \text{const}_x, \quad x' \in S_-; \quad \nabla^2 U_0(x) \equiv 0, \quad x \notin \Gamma,$$

Хотя в широком классе областей различной геометрии существует ровно m линейно независимых решений этой задачи [4], фактически функция $\rho(\xi)$, насколько известно, найдена лишь для эллипса [2] как границы одиночного оптимального отверстия [6]:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \rho(\xi) &= D/H_\nu(\mu, \nu_0) = D \sqrt{1 + \nu_0^2} / \sqrt{1 - \mu^2} \\ \xi_1 &= C\mu\nu_0, \quad \xi_2 = C \sqrt{(1 - \mu^2)(1 + \nu_0^2)}, \quad |\mu| \leq 1 \\ \xi_1^2/\nu_0^2 + \xi_2^2/(1 + \nu_0^2) &= C^2 \end{aligned}$$

где μ, ν_0 — эллиптические координаты точки ξ на эллипсе $\nu = \nu_0$, H_ν — коэффициент Ламе в ней, C, D — постоянные.

Рассмотрим общий случай $m \geq 1$. Из (1.3) следует [1], что равнопрочные границы обладают характерным свойством: внутренний потенциал тяготения равномерно распределенных внутри них масс — заданная квадратичная форма координат

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{P}{2\pi} \int_{S_-} \ln \frac{1}{r(x, x')} dx' = b_k^{(m)} - P_2 x_1^2 - P_1 x_2^2 \\ x' &\in S_-, \quad x \in S_k^- \end{aligned}$$

Зададимся теперь оптимальной границей Γ с параметрами $\{\omega_j\}$ и, не меняя q , подберем новую совокупность $\{\omega_j'\}$, так, чтобы каждый контур Γ_k лежал строго внутри соответствующего Γ_k' (фиг. 1). По сказанному ранее, существует бесконечно много таких пар Γ и Γ' . Согласно (3.4) потенциал тяготения полученной этим способом системы кольцевых областей сохраняет внутри $(S_k^- + \Gamma_k)$ постоянное значение

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{P}{2\pi} \int_{S_-} \ln \frac{1}{r(x, x')} dx' = \frac{P}{2\pi} \int_{S_-'} \ln \frac{1}{r(x, x')} dx' - \\ &- \frac{P}{2\pi} \int_{S_-} \ln \frac{1}{r(x, x')} dx' = \Delta b_k^{(m)}, \quad x \in S_k^- + \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

что обобщает на многосвязный случай двумерный аналог теоремы Ньютона [7] об отсутствии притяжения внутри эллиптического кольца постоянной плотности.

Докажем, что для произвольной системы равнопрочных контуров можно построить замкнутое выражение плотности $\rho(\xi)$ через функцию f из (3.1) предельным переходом в тождестве (3.5).

Пусть описанная ранее граница Γ' получается из Γ малой вариацией вида $(\delta\xi_2, \delta\xi_1) = h n$. Параметр $h(\xi)$ представляет собой толщину кольца между Γ_k' и Γ_k , вычисляемую вдоль n , поэтому

$$(3.6) \quad \begin{aligned} h(\xi) &= \sqrt{(\delta\xi_1)^2 + (\delta\xi_2)^2} = (\sqrt{1 + f_\xi^2/f_\xi}) \delta\xi_1 \\ f_\xi &= \partial f / \partial \xi_1 \end{aligned}$$

так как величины $\delta\xi_1, \delta\xi_2$ связаны уравнением нормали:

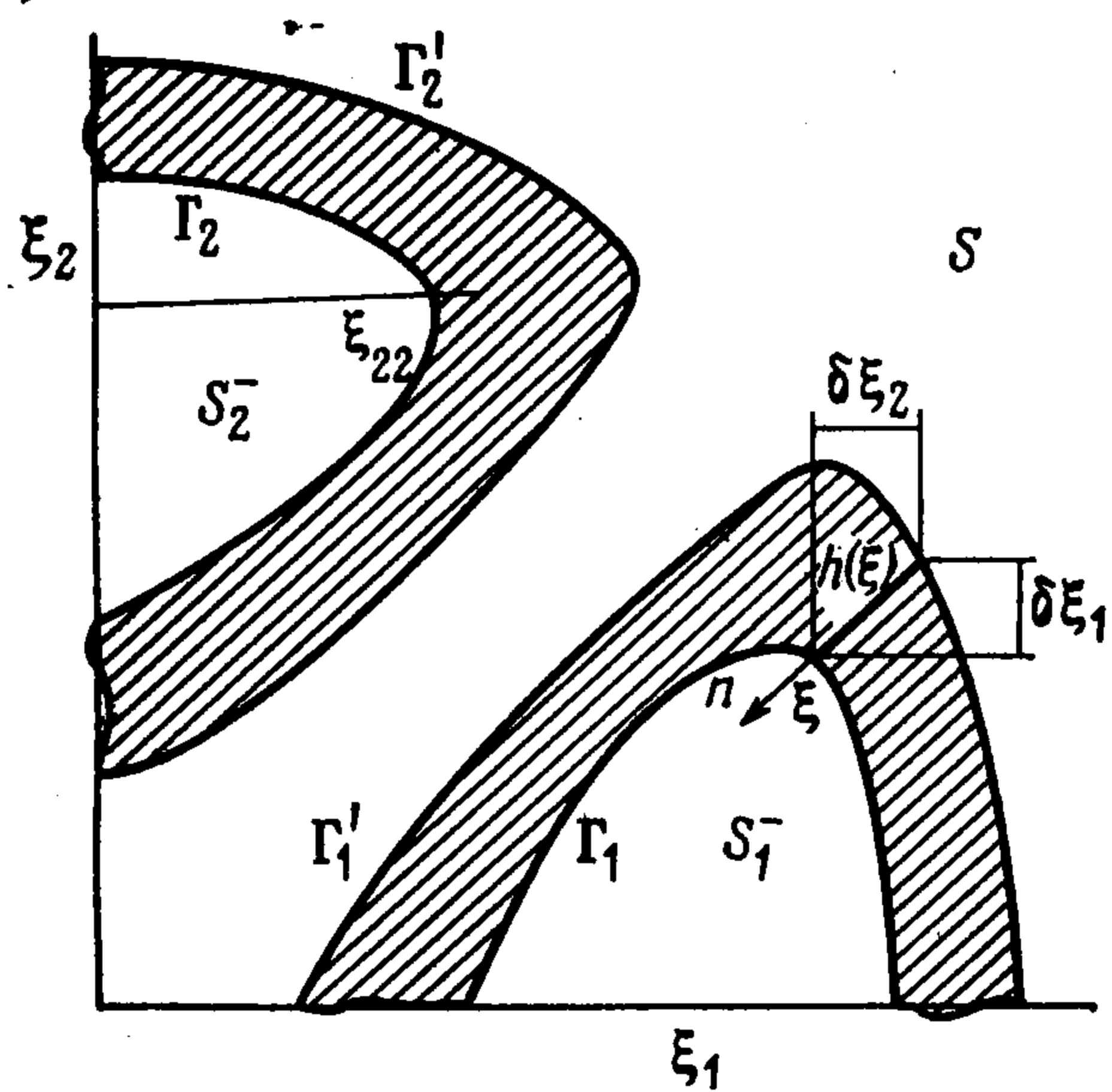
$$(3.7) \quad f_\xi \delta\xi_2 + \delta\xi_1 = 0$$

Для простоты потребуем от области определенной симметрии с тем, чтобы с другой стороны Γ переходила в Γ' вариацией единственного параметра, например $\omega_1 = \omega$, зависимость от которого лишь и будем отмечать в дальнейшем. Тогда имеем

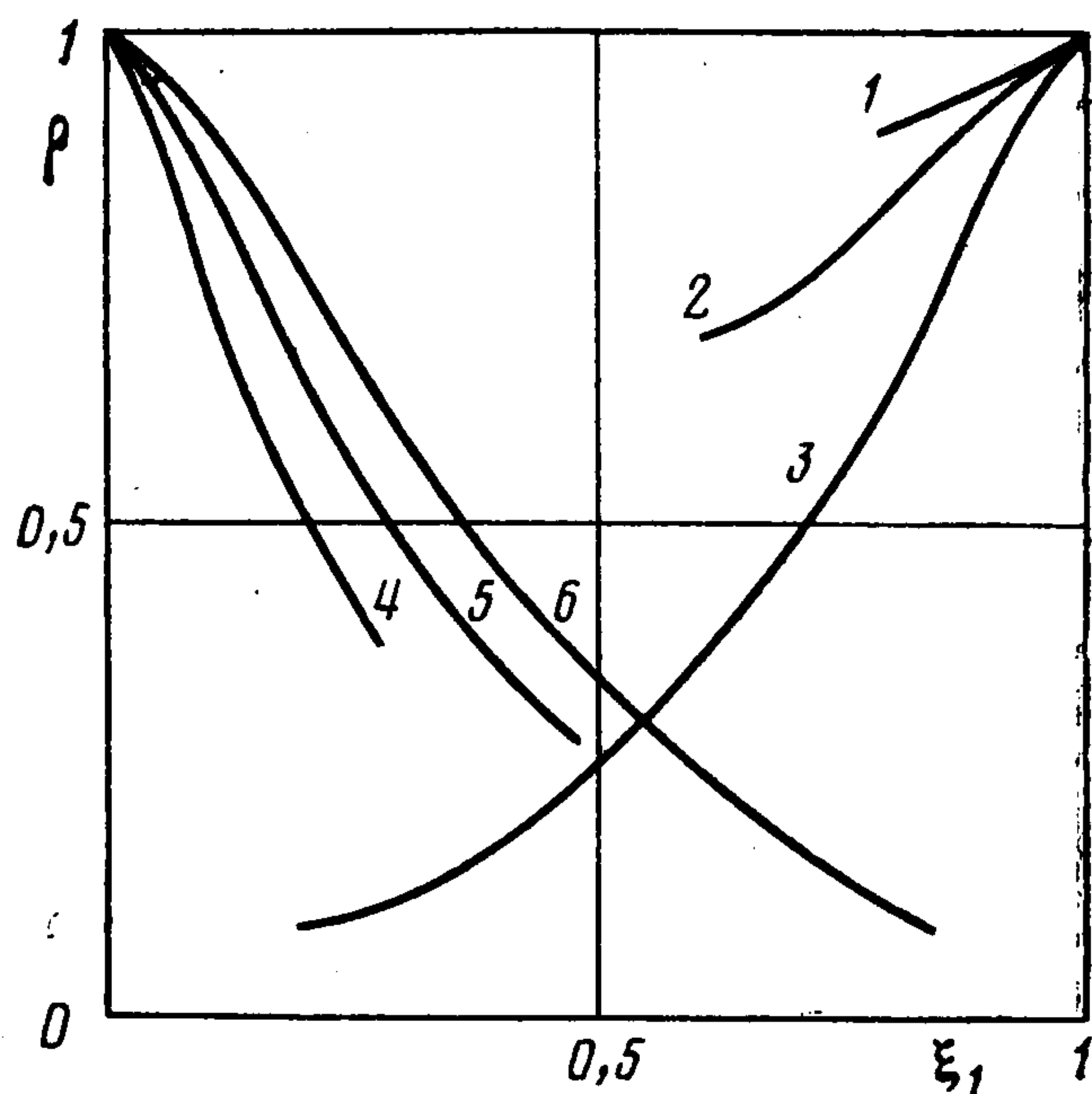
$$\delta\xi_2 = \delta f(\xi_1, \omega) = f_\xi \delta\xi_1 + f_\omega \delta\omega, \quad f_\omega = \partial f / \partial \omega$$

и выражая $\delta\xi_2$ из (3.7), получим

$$(1 + f_\xi^2) \delta\xi_1 = -f_\xi f_\omega \delta\omega$$



Фиг. 1



Фиг. 2

откуда следует, что

$$(3.8) \quad h(\xi) = w(\xi)\delta\omega, \quad w(\xi) = -f_\omega / \sqrt{1 + f_\xi^2}$$

Вариация потенциала (3.4), обусловленная движением границы, записывается в виде [8]

$$\delta\varphi(x) = \frac{P}{2\pi} \int_{\Gamma} w(\xi) \ln \frac{1}{r(x, \xi)} dt, \quad x \in S_- + \Gamma, \quad \xi \in \Gamma$$

Согласно (3.5), $\delta\varphi = \delta b_k^{(m)}(\omega)$, поэтому окончательно

$$(3.9) \quad \frac{P}{2\pi} \int_{\Gamma} w(\xi) \ln \frac{1}{r(\eta, \xi)} dt = \frac{\partial b_k^{(m)}(\omega)}{\partial \omega}$$

$$\eta \in S_k^- + \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Из сравнения (3.9) с (3.2) заключаем, что функция $w(\xi)$ — одно из решений задачи Робэна. При этом

$$\partial U_0(\xi) / \partial n = -(2\pi)^{-1} P w(\xi)$$

Так же просто определяется полная масса $Q(\omega, q)$ этого нейтрального слоя. Разобьем каждый замкнутый контур Γ_k прямой, параллельной оси X_1 , на две части так, чтобы в каждой из них функция $\xi_2(\xi_1)$ определялась из (3.1) однозначно. Обозначим $y_1(\xi_1)$ и $y_2(\xi_1)$ ее соответствующие ветви, а $\xi_{k1}(\omega)$ и $\xi_{k2}(\omega)$ — точки разбиения Γ_k (фиг. 1). Тогда при учете (3.8)

$$(3.10) \quad Q = \int_{\Gamma} \rho(\xi) dt = \int_{\Gamma} f_\omega d\xi_1 = \sum_{k=1}^m \int_{\xi_{k2}(\omega)}^{\xi_{k1}(\omega)} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \omega} + \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \right) d\xi_1 =$$

$$= \frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} \sum_{k=1}^m y_1(\xi_{k1}) + y_2(\xi_{k1}) - y_1(\xi_{k2}) - y_2(\xi_{k2})$$

(A — общая площадь всех отверстий). Здесь использованы правила дифференцирования определенного интеграла по параметру [9]. В большинстве случаев выражение (3.10) упрощается, так как из-за симметрии S по оси X_2 сумма в нем обращается в нуль.

Например, когда $m = 1$, подстановка уравнения эллипса из (3.3) в (3.8) приводит, как и требуется, к первому из соотношений (3.3). При этом $A = \pi C^2 \omega (1 - q^2)$ и $Q = 2\pi C^2 \omega (1 - q^2)$. Аналогично рассматриваются и менее элементарные случаи.

Два симметричных отверстия на оси X_1 . Соответствующая функция $f(\xi_1, C, q, \omega)$ и выражение для общей площади отверстий имеют вид [6]

$$|\xi_2(\xi_1)| = C(1+q)[E(\omega)K^{-1}(\omega)F(\Psi, \omega)] - E(\Psi, \omega)$$

$$\Psi = \arcsin \left[\frac{C^2(1-q^2) - \xi_1^2}{C^2(1-\omega^2)(1-q^2)} \right]^{1/2}$$

$$C\omega(1-q) \leq \xi_1 \leq C(1-q); \quad 0 \leq \omega \leq 1$$

$$A = 4\pi C^2(1-q^2)[2 - \omega^2 - E(\omega)K^{-1}(\omega)]$$

(F, E — эллиптические, K, E — полные интегралы первого и второго рода). Подстановка этих выражений в (3.8) и (3.10) при учете формул для производных от эллиптических интегралов по параметру [10] дает

$$\rho(\xi) = \frac{(1+q)[E(\omega)K(\omega)(1-\omega^2)\omega \sin 2\Psi + 2B(\Psi, \omega)]}{2[C^2\Delta(\Psi, \omega) + (1+q^2)(\xi_1^2 - E(\omega)K^{-1}(\omega))^2]^{1/2}}$$

$$B(\Psi, \omega) = [E(\omega)F(\Psi, \omega) - K(\omega)E(\Psi, \omega)][E(\omega) - K(\omega)(1 - \omega^2)] \Delta(\Psi, \omega); \quad \Delta(\Psi, \omega) = (1 - \omega^2 \sin^2 \Psi)^{1/2}$$

$$Q = 4\pi C^2(1-q)[2 - 2\omega - (2E(\omega) - K(\omega))(1 - \omega^2 - E^2(\omega))\omega^{-1}(1 - \omega^2)^{-1}]$$

На фиг. 2 приведены графики функции $\rho(\xi_1)$, нормированной по условию $\rho(1) = 1$, для $q = 0$ и $\omega = 0,2; 0,4; 0,8$ (кривые 1—3).

Периодическая система отверстий, расположенных с постоянным шагом h_0 на оси X_1 . Форма Γ также найдена в [6]:

$$(3.11) \quad |\xi_2(\xi_1)| = C(1+q) \ln \left| \frac{\cos \zeta}{\cos \omega} + \sqrt{\frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \omega} - 1} \right|$$

$$h_0 = 2\pi C, \quad \zeta = C^{-1}(1-q)^{-1}x; \quad |\zeta| \leq \omega, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/2$$

Сравнительно с [6] в формуле (3.11) исправлены неточности формального характера. Интересно, что h_0 не зависит от параметров нагрузки P_1, P_2 . Из (3.11) следует, что

$$\rho(\xi_1) = \frac{C(1+q) \operatorname{tg} \omega \cos \xi_1}{[\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \omega + C(1+q)(1-q)^{-1} \sin^2 \xi_1]^{1/2}}$$

$$Q(\omega) = \frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} = 4C(1-q) \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^\omega \xi_2(\zeta) d\zeta =$$

$$= 4C(1-q) \left[\xi_2(\omega) + \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \xi_2(\zeta) d\zeta \right] = 8C^2(1-q^2)(\pi - 2\omega) \operatorname{tg} \omega$$

Кривые 4—6 на фиг. 2 представляют собой графики $\rho(\xi_1)$, нормированные по условию $\rho(0) = 1$ при $q = 0,4$ и $\omega = 0,3; 0,5; 0,9$.

В заключение заметим, что само постоянное значение U функции $U_0(\xi)$ на Γ и в S_- можно найти, воспользовавшись электростатической аналогией задачи Робэна [7], когда U — заряд, равномерно распределенный по Γ , а U — потенциал системы контуров, так что $C_0 U = Q(\omega)$, где C_0 — емкость Γ . Как известно, она конформно инвариантна и поэтому может вычисляться не для Γ , а для порождающей системы разрезов на вспомогательной плоскости, упомянутых в начале п. 3. Для них же C_0 всегда выражается в квадратурах [11]. Соответствующие формулы не приводятся из-за своей громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виздергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 90—93.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
3. *Виздергауз С. Б.* Оптимальные полости в упругом пространстве с осевой симметрией // Изв. АрмССР. Механика. 1984. № 3. С. 51—58.
4. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат. 1953. 416 с.
5. *Янушаускас А. И.* Трехмерные аналоги конформных отображений. Новосибирск: Наука. 1982. 176 с.
6. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963—979.
7. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехиздат. 1946. 318 с.
8. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука. 1980. 255 с.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Гостехиздат. 1954. 472 с.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962. 1100 с.
11. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 511 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
19.1.1988