Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 539.3

ГРУППОВОЕ РАССЛОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

Прудников В. Ю., Чиркунов Ю. А.

Осуществляется групповое расслоение относительно некоторой бесконечной группы Ли преобразований уравнений Ламе статической теории упругости, что позволяет перейти к объединению двух систем дифференциальных уравнений первого порядка: автоморфной и разрешающей. Найденное общее решение автоморфной системы — многомерный аналог формулы Колосова—Мусхелишвили. Разрешающая система в трехмерном случае оказывается конформно-инвариантной, в то время как сами уравнения Ламе допускают лишь группу подобий трехмерного евклидова пространства. Вследствие конформной инвариантности для разрешающей системы существуют преобразования, аналогичные преобразованию Кельвина. Приводится общий вид таких преобразований. Структура разрешающей системы позволяет в трехмерном случае естественным образом ввести комплексные переменные, что удобно для построения классов точных решений.

Исследование групповых свойств уравнений Ламе классической теории упругости было начато по инициативе Л. В. Овсянникова в работе [1], в которой рассматривались трехмерные динамические уравнения. Ниже методами группового анализа изучаются статические уравнения Ламе в произвольном пространстве R^n.

1. Групповое расслоение. Состояние равновесия однородной изотропной упругой среды при отсутствии массовых сил описывается системой уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu)\, \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$(\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Вектор перемещения $\mathbf{u}$ — функция точки $\mathbf{x}$, а $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — постоянные Ламе.

Очевидно, что наиболее широкая группа Ли преобразований пространства $R^{2n}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, допускаемая этой системой, бесконечномерна, так как преобразование

$$\mathbf{u} \to \mathbf{u} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

($\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ — произвольное решение (1.1)) сохраняет систему. Эти преобразования образуют бесконечный нормальный делитель, фактор-группа по которому уже конечномерна. Соответствующая алгебра Ли операторов вычисляется по стандартной методике [2] и имеет базис

$$\partial_{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}\cdot\partial_{\mathbf{x}},\ \mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}},\ A\langle\mathbf{x}\rangle\cdot\partial_{\mathbf{x}} + A\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\partial_{\mathbf{u}}$$

Здесь A — произвольное антисимметричное преобразование пространства R^n, а угловыми скобками обозначен образ при линейном отображении.

Каждому векторному оператору соответствует n скалярных, например $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n)$.

Известно [2], что если система дифференциальных уравнений допускает некоторую группу, то действие этой группы на множестве решений системы приводит к его разбиению на классы эквивалентных решений. Возникающая в результате на множестве решений структура описывается двумя системами дифференциальных уравнений: автоморфной и разрешающей. Автоморфная система характеризует отдельные классы эквивалентных решений (на ее решениях группа действует транзитивно), а разрешающая — множество всех таких классов (на ее решениях группа действует тождественно). Представление системы в виде равносильного ей объединения автоморфной и разрешающей систем получило название группового расслоения системы относительно данной группы.

Выполним групповое расслоение уравнений (1.1) относительно содержащейся в нормальном делителе (1.2) бесконечной подгруппы, порождаемой операторами $\nabla h(x)\cdot\partial_u$, где $h(x)$ — произвольная гармоническая функция. Сначала получим автоморфную систему. В качестве базиса дифференциальных инвариантов рассматриваемой подгруппы могут быть выбраны инварианты

$$\mathbf{I}_1=\mathbf{x},\quad I_2=\operatorname{div}\mathbf{u},\quad I_3=\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{u}-(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^*$$

Назначая инварианты I_2 и I_3 функциями инварианта $\mathbf{I}_1$, имеем автоморфную систему

$$(1.3)\qquad (2+\lambda/\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}=\theta(\mathbf{x}),\quad \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{u}-(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^*=\omega(\mathbf{x})$$

(постоянный множитель $(2+\lambda/\mu)$ перед $\operatorname{div}\mathbf{u}$ введен для упрощения последующих формул).

Разрешающая система имеет вид

$$(1.4)\qquad \begin{gathered}\nabla\theta+\operatorname{div}\omega=0\\ \mathbf{a}\cdot\partial\omega\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle+\mathbf{b}\cdot\partial\omega\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle+\mathbf{c}\cdot\partial\omega\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=0\end{gathered}$$

где $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ — произвольные (пробные) векторы из R^n.

Действительно, преобразуем уравнения Ламе, используя понятие дивергенции тензора [3]. В силу тождества

$$\Delta u=\nabla\operatorname{div}u+\operatorname{div}(\partial_x u-(\partial_x u)^*)$$

условием совместности системы (1.3) с системой (1.1) будет первое уравнение системы (1.4). Второе ее уравнение — это условие совместности системы (1.3).

Искомое групповое расслоение уравнений Ламе (1.1) есть объединение автоморфной системы (1.3) и разрешающей системы (1.4).

При $n=2$ (1.4) — система Коши—Римана, что и позволяет успешно применять методы теории функций комплексной переменной в плоских задачах статической теории упругости.

2. Решение автоморфной системы. Любое решение автоморфной системы (1.3) получается из одного фиксированного ее решения преобразованием подгруппы, относительно которой произведено групповое расслоение. Поэтому общее решение этой системы дается формулой $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{v}(\mathbf{x})+\nabla h(\mathbf{x})$, где $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — некоторое частное решение, а $h(\mathbf{x})$ — произвольная гармоническая функция. Найдем частное решение.

Антисимметричному тензору ω соответствует дифференциальная форма степени 2: $\Omega\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\mathbf{b}\cdot\omega\langle\mathbf{a}\rangle$, а вектору $\mathbf{u}$ — дифференциальная форма степени 1: $U\langle\mathbf{a}\rangle=a\cdot\mathbf{u}$ ($\mathbf{a},\mathbf{b}$ — произвольные векторы из R^n).

Второе уравнение системы (1.3) равносильно уравнению $\partial U=\Omega$, где d — оператор внешнего дифференцирования. А второе уравнение системы (1.4) является условием замкнутости формы Ω. В силу теоремы Пуанкаре [4] из второго уравнения автоморфной системы (1.3) следует, что ($\varphi(\mathbf{x})$ — некоторая функция)

$$(2.1)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{x})=\int_0^1 t\omega(t\mathbf{x})\langle\mathbf{x}\rangle\,dt+\nabla\varphi(\mathbf{x})$$

После подстановки выражения (2.1) в первое уравнение системы (1.3) и ряда вычислений с использованием первого уравнения системы (1.4) получаем уравнение Пуассона для отыскания функции $\varphi(\mathbf{x})$

$$(2.2)\qquad \Delta\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\theta(\mathbf{x}) + 2\int_0^1 t\theta(t\mathbf{x})\,dt$$

Поскольку $\theta(\mathbf{x})$ — гармоническая функция, то и правая часть этого уравнения — гармоническая функция.

Лемма. Если $\psi(\mathbf{x})$ — гармоническая функция, то уравнение

$$(2.3)\qquad \Delta\varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$$

имеет частное решение вида

$$(2.4)\qquad \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}|\mathbf{x}|^2\int_0^1 t^{n/2-1}\psi(t\mathbf{x})\,dt$$

Доказательство. Решение уравнения (2.3) ищем в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) = {}^1/_4\,|\mathbf{x}|^2 f(\mathbf{x})$$

где $f(\mathbf{x})$ — гармоническая функция. Подстановка в (2.3) приводит к уравнению первого порядка. Введение вспомогательной функции $g(\tau) = f(\tau\mathbf{x})$ дает обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого, ограниченное в точке $\tau = 0$, имеет вид

$$g(\tau) = \tau^{-n/2}\int_0^\tau t^{n/2-1}\psi(t\mathbf{x})\,dt$$

Функцию f находим по формуле $f(\mathbf{x}) = g(1)$, ее гармоничность очевидна.

Теперь по лемме получаем частное решение уравнения (2.2), подставив правую часть этого уравнения в формулу (2.4). Возникающий при этом повторный интеграл преобразуется в одномерный. После этого общее решение автоморфной системы дается формулами

$$(2.5)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t\omega(t\mathbf{x})\langle\mathbf{x}\rangle\,dt - \frac{1}{n-4}\nabla\Big\{|\mathbf{x}|^2 \times$$
$$\times\left[\frac{(\lambda+\mu)n+4\mu}{4(\lambda+2\mu)}\int_0^1 t^{n/2-1}\theta(t\mathbf{x})\,dt - \int_0^1 t\theta(t\mathbf{x})\,dt\right]\Big\} + \nabla h(\mathbf{x}),\quad n\neq 4$$

$$(2.6)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t\omega(t\mathbf{x})\langle\mathbf{x}\rangle\,dt - \frac{1}{4}\nabla\Big\{|\mathbf{x}|^2\Big[\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int_0^1 t\theta(t\mathbf{x})\,dt +$$
$$+2\int_0^1 t\theta(t\mathbf{x})\ln t\,dt\Big]\Big\} + \nabla h(\mathbf{x}),\quad n = 4$$

где $h(\mathbf{x})$ — произвольная гармоническая функция.

Формула (2.5) при $n = 2$ — это известная формула Колосова—Мусхелишвили. При $n > 2$ формулы (2.5) и (2.6) можно считать многомерными аналогами этой формулы. Они позволяют из решений θ, ω разрешающей системы (1.4) получать решения уравнений Ламе.

3. Групповое свойство разрешающей системы. Оператор, допускаемый разрешающей системой (1.4), ищем в виде

$$(3.1)\qquad \xi\cdot d_{\mathbf{x}} + \eta_0\partial_\theta + \eta\partial_\omega = \xi_m\frac{\partial}{\partial x_m} + \eta_0\frac{\partial}{\partial\theta} + \eta_{mp}\frac{\partial}{\partial\omega_{mp}}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, η_0, $\eta = (\eta_{mp})$ — искомые функции переменных $\mathbf{x}$, θ, $\omega = (\omega_{mp})$.

Решение системы определяющих уравнений в данном случае существенно зависит от размерности n.

При $n = 2$ система (1.4) совпадает с системой Коши—Римана и допускает бесконечную конформную группу. Координаты ξ_1, ξ_2, η_0, η_{12} ($\eta_{21} = -\eta_{12}$) операторов вида (3.1) этой группы определяются следующим образом: пары (ξ_1, ξ_2) и (η_0, η_{12}) — решения систем Коши—Римана как по независимым переменным x_1, x_2, так и по функциям θ, ω_{12}.

При $n > 3$ основная группа системы (1.4) является группой подобий n-мерного евклидова пространства. Координаты операторов (3.1), образующих ее алгебру Ли, таковы:

$$\xi = A\langle \mathbf{x}\rangle + \alpha\mathbf{x} + \mathbf{a},\ \eta_0 = \beta\theta,\ \eta = \beta\omega + A\omega - \omega A$$

Здесь A — произвольное антисимметричное преобразование пространства R^n; $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из R^n; α, β — произвольные вещественные числа. Эти операторы являются продолжением на тензор ω операторов основной группы уравнений Ламе (1.1).

При $n = 3$ удобно перейти от антисимметричного тензора ω к соответствующему ему вектору $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$. Разрешающая система (1.4) записывается в виде

(3.2) $$\nabla\theta - \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$$

Алгебра Ли L_{14} операторов основной группы этой системы имеет базис

$$\mathbf{X}_1 = \partial_{\mathbf{x}},\quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}\times\partial_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega}\times\partial_{\omega}$$
$$\mathbf{X}_3 = -|\mathbf{x}|^2\partial_{\mathbf{x}} + 2\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\partial_{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} - 2\theta\mathbf{x})\partial_\theta -$$
$$- 2\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}\cdot\partial_\omega) + \mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}\times\partial_\omega - \theta\partial_\omega),\quad X_4 = \mathbf{x}\cdot\partial_{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{X}_5 = \boldsymbol{\omega}\partial_\theta - \theta\partial_\omega - \boldsymbol{\omega}\times\partial_\omega,\quad X_6 = \theta\partial_\theta + \boldsymbol{\omega}\cdot\partial_\omega$$

(каждому из векторных операторов соответствует три скалярных).

Подалгебра L_{14} с базисом $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 + {}^1/_2\mathbf{X}_5$, $\mathbf{X}_3$, $X_4 - X_6$ и подалгебра L_4 с базисом $\mathbf{X}_5$, X_6 — идеалы алгебры L_{14}, которая может быть представлена в виде прямой суммы: $L_{14} = L_{10} \oplus L_4$. Алгебра Ли L_{10} изоморфна алгебре Ли конформной группы трехмерного евклидова пространства. Операторам алгебры соответствуют конечные преобразования, сохраняющие систему (3.2): $\mathbf{X}_1$ — перенос по $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}_2$ — совместное вращение в пространствах $R^3(\mathbf{x})$ и $R^3(\boldsymbol{\omega})$, X_4 — равномерное растяжение по $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}_5$ — вращение в пространстве $R^4(\theta, \boldsymbol{\omega})$, X_6 — равномерное растяжение по θ, $\boldsymbol{\omega}$.

Остановимся на преобразованиях, порождаемых оператором обобщенной инверсии $\mathbf{X}_3 = (X_{31}, X_{32}, X_{33})$. Выпишем их, например, для оператора X_{31} (α — вещественный параметр):

$$x_1' = (x_1 - \alpha\,|\,\mathbf{x}\,|^2)/\zeta,\ x_m' = x_m/\zeta\ (m = 2, 3)$$
$$\mathrm{U}' = \sqrt{\zeta}B\mathrm{U};\ \zeta = (1 - \alpha x_1)^2 + \alpha^2(x_2^2 + x_3^2)$$
$$\mathrm{U} = \begin{Vmatrix} \theta \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix},\quad B = \begin{Vmatrix} 1-\alpha x_1 & 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ 0 & 1-\alpha x_1 & -\alpha x_2 & -\alpha x_3 \\ \alpha x_3 & \alpha x_2 & 1-\alpha x_1 & 0 \\ -\alpha x_2 & \alpha x_3 & 0 & 1-\alpha x_1 \end{Vmatrix}$$

Таким образом, выполненное групповое расслоение уравнений Ламе позволяет в имеющих физический смысл плоском и трехмерном случаях выявить симметрии, которыми сами уравнения Ламе не обладают. Основная группа разрешающей системы (3.2) шире основной группы уравнений Ламе. Новые операторы X_{31}, X_{32}, X_{33}, порождающие конформные преобразования, расширяют возможности построения классов частных решений с помощью допускаемой группы для системы (3.2), а следовательно, в силу формулы (2.5), и для уравнений Ламе.

Оставив в стороне хорошо изученный в теории упругости плоский случай, будем рассматривать в дальнейшем разрешающую систему только при $n = 3$.

4. Преобразования Кельвина. Наличие операторов обобщенной инверсии X_3 указывает на существование для разрешающей системы (3.2) преобразований типа преобразования Кельвина. По аналогии с последним дадим определение.

Определение. Преобразованием Кельвина для системы (3.2) назовем преобразование K, обладающее следующими свойствами:

1) функции $\mathrm{U}\colon R^3 \to R^4$ оно ставит в соответствие функцию, определяемую равенством $\mathrm{U}'(\mathrm{x}) = K(\mathrm{x}) \times \mathrm{U}(\mathrm{x}/|\mathrm{x}|^2)$, где $K(\mathrm{x})$ — матрица 4×4;

2) если $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ — решение системы (3.2), то $\mathrm{U}'(\mathrm{x})$ — тоже решение этой системы.

Теорема. Все преобразования Кельвина для системы (3.2) описываются следующим выражением:

$$K(\mathrm{x}) = \alpha_1 K_1(\mathrm{x}) + \alpha_2 K_2(\mathrm{x}) + \alpha_3 K_3(\mathrm{x}) + \alpha_4 K_4(\mathrm{x})$$

$$K_1(\mathrm{x}) = \frac{1}{|\mathrm{x}|^3}\begin{Vmatrix} x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & 0 \\ -x_2 & x_3 & 0 & -x_1 \end{Vmatrix}, \quad K_2(\mathrm{x}) = \frac{1}{|\mathrm{x}|^3}\begin{Vmatrix} x_2 & -x_3 & 0 & x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \end{Vmatrix}$$

$$K_3(\mathrm{x}) = \frac{1}{|\mathrm{x}|^3}\begin{Vmatrix} x_3 & x_2 & -x_1 & 0 \\ x_2 & -x_3 & 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix}, \quad K_4(\mathrm{x}) = \frac{1}{|\mathrm{x}|^3}\begin{Vmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & 0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

(α_m ($m = 1, 2, 3, 4$) — произвольные вещественные числа).

Доказательство состоит в непосредственном вычислении матрицы $K(\mathrm{x})$ на основании данного выше определения.

Отметим некоторые свойства базисных преобразований Кельвина K_m. Для записи их композиций введем матрицы, соответствующие операторам вращения

$$Q_1 = \begin{Vmatrix} P_1 & O \\ O & P_1 \end{Vmatrix}, \quad Q_2 = \begin{Vmatrix} O & P_2 \\ -P_2 & O \end{Vmatrix}, \quad Q_3 = \begin{Vmatrix} O & P_3 \\ -P_3 & O \end{Vmatrix}$$

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad P_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Композиции базисных преобразований Кельвина определяются матрицей (I — тождественное преобразование)

$$M = \begin{Vmatrix} I & Q_3 & -Q_2 & -Q_1 \\ -Q_3 & I & Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & -Q_1 & I & -Q_3 \\ -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 & -I \end{Vmatrix}$$

Ее элементами являются преобразования $M_{pq} = K_p K_q$.

Из вида матрицы M следует, в частности, что любые три базисных преобразования Кельвина могут быть получены из четвертого в результате композиций последнего с преобразованиями Q_1, Q_2, Q_3, например $K_p = Q_p K_4$ ($p = 1, 2, 3$).

5. Комплексные переменные. Разрешающая система (3.2) состоит из четырех скалярных уравнений для четырех неизвестных скалярных функций: функции θ, характеризующей объемную деформацию, и трех компонент вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Введение комплексных зависимых и независимых переменных

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} &u = \theta + i\omega_3, \quad v = \omega_2 - i\omega_1 \\ &x = {}^1/_2\,(x_1 + ix_2), \quad y = {}^1/_2\,(-x_1 + ix_2), \quad t = x_3 \end{aligned}$$

позволяет записать систему (3.2) в более компактной форме:

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &\partial_t u = \partial_x v, \quad \partial_t v = \partial_y u \\ &\partial_x = \partial_{x_1} - i\partial_{x_2}, \quad \partial_y = -\partial_{x_1} - i\partial_{x_2} \end{aligned}$$

где ∂_x, ∂_y — операторы формального дифференцирования.

Изучим свойства системы (5.2), считая x, y, t независимыми комплексными переменными.

Если u, v — решение системы (5.2) с независимыми комплексными переменными x, y, t, то из него по формулам (5.1) получается решение системы (3.2). Обратно: если в любом решении системы (3.2) перейти по формулам (5.1) к комплексным функциям u, v, аналитически продолжить их в C^3 и сделать линейную замену комплексных независимых переменных по формулам (5.1), то получится решение системы (5.2).

Система (5.2) допускает 11-параметрическую основную группу Ли преобразований пространства C^5 (x, y, t, u, v), порождаемую операторами:

$$\begin{aligned} &Y_1 = \partial_x, \ Y_2 = \partial_y, \ Y_3 = \partial_t \\ &Y_4 = 2x\partial_x + t\partial_t + v\partial_v, \ Y_5 = 2y\partial_y + t\partial_t + u\partial_u \\ &Y_6 = t\partial_x + 2y\partial_t - u\partial_v, \ Y_7 = t\partial_y + 2x\partial_t - v\partial_u \\ &Y_8 = t^2\partial_x + 4y^2\partial_y + 4ty\partial_t - 2yu\partial_u - 2\,(tu + 3yv)\partial_v \\ &Y_9 = 4x^2\partial_x + t^2\partial_y + 4tx\partial_t - 2(tv + 3xu)\partial_u - 2xv\partial_v \\ &Y_{10} = tx\partial_x + ty\partial_y + {}^1/_2\,(t^2 + 4xy)\partial_t - (tu + yv)\partial_u - \\ &\quad - (tv + xu)\partial_v, \quad Y_{11} = u\partial_u + v\partial_v \end{aligned}$$

Комплексную систему (5.2) удобно использовать для получения точных решений системы (3.2).

Приведем некоторые примеры точных решений системы (5.2) и укажем характер соответствующих решений системы (3.2).

1°. Решение, инвариантное относительно подгруппы с оператором Y_{10}, является решением ранга 2 и имеет вид

$$\begin{aligned} &u = -2y^{-1/2}f\,(ry) + tx^{-3/2}g\,(rx) \\ &v = ty^{-3/2}f\,(ry) - 2x^{-1/2}g\,(rx) \\ &r = (t^2 - 4xy)^{-1} \end{aligned}$$

где f, g — произвольные аналитические функции. Соответствующее решение системы (3.2) будет инвариантно относительно подгруппы, порождаемой оператором X_{33}.

2°. Решение, инвариантное относительно подгруппы, определяемой оператором Y_8, тоже имеет ранг 2. Оно таково:

$$\begin{aligned} &u = 4y^{-1/2}\,[ty^{-1}f'\,(z) + g\,(z)] \\ &v = -y^{-3/2}\,\{f\,(z) + 2t\,[ty^{-1}f'\,(z) + g\,(z)]\} \\ &z = y^{-1}\,(t^2 - 4xy)^{-1} \end{aligned}$$

где f, g — произвольные аналитические функции. Получаемое отсюда по формулам (5.1) решение системы (3.2) не инвариантно относительно ни одной из допускаемых этой системой подгрупп.

3°. Рассмотрим простые волны системы (5.2). Их параметрическое представление с комплексным параметром $\varepsilon = \varepsilon(x, y, t)$ имеет вид

$$u = u(\varepsilon), \quad v = v(\varepsilon) \tag{5.3}$$

Подстановка в систему (5.2) дает систему уравнений, связывающую искомые функции (5.3) и искомый параметр ε:

$$\varepsilon_t u' = \varepsilon_x v', \quad \varepsilon_t v' = \varepsilon_y u'$$

где штрих означает производную по ε. Анализ этой системы показывает, что u (ε и v (ε) остаются произвольными аналитическими функциями, а параметр волны определяется неявно уравнением

$$xu'^2 + yv'^2 + tu'v' = f(\varepsilon) \tag{5.4}$$

где f — произвольная аналитическая функция.

Для получения соответствующего решения системы (3.2) удобно в качестве параметра выбрать $\varepsilon = v$. Переход к вещественным переменным по формулам (5.1) дает двойную волну системы (3.2)

$$\theta = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_3 = \psi(\omega_1, \omega_2)$$

в которой функции φ, ψ удовлетворяют условиям Коши — Римана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чиркунов Ю. А.* Групповой анализ уравнений Ламе // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1975. Вып. 23. С. 219—225.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 399 с.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир. 1975. 592 с.
4. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир. 1971. 392 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
28.I.1987