Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК (532.5:539.3):534

ТОЧНЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

Кудряшов Н. А.

Предлагаются преобразования Бэклунда для обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики, при помощи которых получены точные солитонные решения этого уравнения.

В последние годы для описания ряда волновых процессов используется нелинейное уравнение четвертого порядка, которое в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{0.1}$$

Здесь α, β и γ — постоянные коэффициенты, $u\,(x,\,t)$ — функция, характеризующая физический процесс: смещение, толщину пленки, концентрацию и т. д.

При $\alpha\neq 0$, $\beta=\gamma=0$ уравнение (0.1) является уравнением Бюргерса, которое в простейшем случае моделирует образование ударных волн в газовой динамике [1]. Преобразованием Коула—Хопфа [2, 3]

$$u\,(x,\,t)=-2\alpha\partial\ln F/\partial x \tag{0.2}$$

уравнение Бюргерса отображается в линейное уравнение теплопроводности относительно функции $F\,(x,\,t)$. В случае $\alpha=\gamma=0$, $\beta\neq 0$ уравнение (0.1) хорошо известно как уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ), описывающее локализованные нелинейные волны — солитоны [4].

Преобразованием Миуры [5, 6]

$$u\,(x,\,t)=12\beta\partial^2\ln F/\partial x^2 \tag{0.3}$$

уравнение КдВ приводится к уравнению относительно $F\,(x,\,t)$, имеющему вид квадратичной формы, из которой Хирота [7] нашел точные одно- и многосолитонные решения уравнения КдВ.

Ниже уравнение (0.1) рассматривается при отличных от нуля значениях коэффициентов α, β и γ.

1. Преобразования Бэклунда для уравнения (0.1). Представим решение уравнения (0.1) в виде следующей суммы:

$$u\,(x,\,t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x,\,t)\,F^{j-3}(x,\,t) \tag{1.1}$$

Подставляя (1.1) в уравнение (0.1) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях $F\,(x,\,t)$, приходим к цепочке равенств

$$\begin{gathered}u_0=-120\gamma F_x^{\,3},\quad u_1=-15\beta F_x^{\,2}+180\gamma F_xF_{xx}\\ u_2=(15/76)(\beta^2/\gamma-16\alpha)F_x+15\beta F_{xx}-60\gamma F_{xxx}\end{gathered} \tag{1.2}$$

Выражение, содержащее коэффициент $u_3\,(x,\,t)$ и частные производные от $F\,(x,\,t)$ (обозначенные F_t, F_x, F_{xx} и т. д.), можно представить в виде

$$\begin{gathered}F_t+u_3F_x+\frac{\beta}{76\gamma}\left(\frac{13\beta^2}{8\gamma}-7\alpha\right)F_x+\frac{15}{152}\left(\frac{\beta^2}{\gamma}-16\alpha\right)F_{xx}+\\ +5\beta F_{xxx}-15\gamma F_{xxxx}-\frac{15}{4}\beta F_{xx}^2F_x^{-1}+30\gamma F_{xx}F_{xxx}F_x^{-1}-\\ -15\gamma F_{xx}^3F_x^{-2}=0\end{gathered} \tag{1.3}$$

Для нахождения коэффициентов $u_j\,(x,\,t)$ при $j\geqslant 4$ можно записать рекуррентную формулу [1]. Однако при этом оказалось, что коэффициент

[1] *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения вязкоупругих волн в диспергирующей среде: Препринт № 007-87. М.: МИФИ. 1987. 16 с.

u_6 из этой формулы не определяется и в (1.1) следует положить $u_j = 0$ при $j \geqslant 4$. Полагая в рекуррентной формуле $u_4 = 0$ и учитывая выражения (1.2), приходим к уравнению относительно $F(x, t)$:

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & F_{xt} - F_t F_{xx} F_x^{-1} + \frac{1}{722}\left(11\frac{\alpha^2}{\gamma} - \frac{87}{8}\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{131}{64}\frac{\beta^4}{\gamma^3}\right)F_x + \\
& + \frac{5}{152}\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)F_{xxx} + \frac{5}{4}\beta F_{xxxx} - 3\gamma F_{xxxxx} + \\
& - 5\beta F_{xx}F_{xxx}F_x^{-1} + \frac{15}{4}\beta F_{xx}^3 F_x^{-2} - \frac{15}{304}\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)F_{xx}^2 F_x^{-1} + \\
& + 15\gamma F_{xx}F_{xxxx}F_x^{-1} - 45\gamma F_{xx}^2 F_{xxx} F_x^{-2} + \\
& + \frac{45}{2}\gamma F_{xx}^4 F_x^{-3} + 10\gamma F_{xxx}^2 F_x^{-1} = 0
\end{aligned}
$$

Кроме того, рекуррентная формула дает следующие выражения, содержащие u_1, u_2 и u_3:

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad & \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_2 F_t - u_2 u_3 F_x + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_2) = \\
& = Lu_1 - L(u_2 F) + FLu_2 \\
& \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial (u_2 u_3)}{\partial x} = Lu_2, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial x} = Lu_3 \\
& L = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4}{\partial x^4}
\end{aligned}
$$

Поскольку $u_j(x, t) = 0$ при $j \geqslant 4$, то при учете (1.2) решение уравнения (0.1) можно представить формулой

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad & u(x, t) = \frac{15}{76}\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln F + \\
& + 15\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F - 60\gamma\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ln F + u_3(x, t)
\end{aligned}
$$

Последнее уравнение (1.5) для коэффициента $u_3(x, t)$ по виду совпадает с исходным уравнением (0.1), и поэтому формула (1.6) может быть использована для преобразования решения уравнения (0.1).

Для уравнения Бюргерса—Кортевега—де Вриза (БКдВ), которое получается из уравнения (0.1), если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$, преобразование решений (аналогичное (1.6)) имеет вид

$$
(1.7)\qquad u(x, t) = -\frac{12}{5}\alpha\frac{\partial}{\partial x}\ln F + 12\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F + u_3(x, t)
$$

Как и в случае $\gamma \neq 0$, коэффициенты $u_j = 0$ при $j \geqslant 4$. Коэффициент $u_3(x, t)$ связан с функцией $F(x, t)$ следующим уравнением:

$$
(1.8)\qquad F_t + u_3 F_x - \frac{\alpha^2}{25\beta}F_x - \frac{6\alpha}{5}F_{xx} + 4\beta F_{xxx} - 3\beta F_{xx}^2 F_x^{-1} = 0
$$

Для функции $F(x, t)$ при $\gamma = 0$ получаем уравнение

$$
\begin{aligned}
(1.9)\qquad & F_{xt} - F_t F_{xx} F_x^{-1} - \frac{\alpha^3}{125\beta^2}F_x - \frac{2\alpha}{5}F_{xxx} + \beta F_{xxxx} + \\
& + \frac{3\alpha}{5}F_{xx}^2 F_x^{-1} - 4\beta F_{xx}F_{xxx}F_x^{-1} + 3\beta F_{xx}^3 F_x^{-2} = 0
\end{aligned}
$$

Коэффициент $u_3(x, t)$ в данном случае удовлетворяет также уравнению (0.1), если в нем положить $\gamma = 0$. В случае $\alpha = 0$ и $u_3(x, t) = 0$ преобразование (1.7) переходит в преобразование Миуры (1.3) для уравнения КдВ.

2. Точные решения уравнения БКдВ. Используя преобразование (1.7), найдем решение уравнения БКдВ (уравнение (0.1) при $\gamma = 0$).

При $u_3(x, t) = 0$ приходим к уравнению относительно $F(x, t)$, которое можно представить в виде равенства нулю квадратичной формы

(2.1) $$3\beta G_3 - G_1 G_2 + F \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\alpha}{5} F_x \frac{\partial G_2}{\partial x} = 0$$

$$G_1 = F_t - \alpha F_{xx} + \beta F_{xxx}$$

$$G_2 = F_x + \frac{\alpha}{5\beta} F_{xxx}, \quad G_3 = F_{xx}^2 - F_x F_{xx}$$

Левая часть выражения (2.1) при $\alpha = 0$ совпадает с квадратичной формой, которая применялась для определения солитонных решений уравнения КдВ [5, 6].

Решением уравнения (2.1) является функция $F(x, t)$, удовлетворяющая условиям $G_1 = c_0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ (c_0 — постоянная). Полагая $c_0 = 0$, находим

(2.2) $$F(x, t) = c_1 + c_2 e^{kx-\omega t}$$

(2.3) $$k = -\frac{\alpha}{5\beta}, \quad \omega = \frac{6\alpha^3}{125\beta^2}$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

Подставив (2.2) в выражение (1.7) при $u_3(x, t) = 0$ и положив $c_1 = c_2 = 1$, решение уравнения БКдВ можно представить в виде

(2.4) $$u(x, t) = {}^3/_5 \alpha k \left[U^2(x, t) + 2U(x, t) - 3\right]$$

$$U(x, t) = \operatorname{th}\left[{}^1/_2 (kx - \omega t)\right]$$

Полученное решение имеет вид ударной волны, характерной для решений уравнения Бюргерса. Как показано в [8], уравнение БКдВ имеет решения типа ударной волны с монотонными (при $\alpha > \alpha_*$) и осцилляторными ($\alpha < \alpha_*$) профилем. Для решения (2.4) имеем $\alpha_* = \sqrt{0{,}96}\alpha$, что соответствует монотонному профилю фронта ударной волны.

Заметим, что если решение уравнения (2.1) сразу искать в виде (2.2) с неизвестными k, ω, то в результате подстановки в (2.1) получим для k и ω значения (2.3). Аналогичные значения k и ω получаются, если функцию (2.2) подставить в (1.8) и (1.9), положив в (1.8) $u_3(x, t) = 0$.

3. Решение уравнения (0.1) при $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. При $\beta = 0$ и $u_3(x, t) = 0$, подставив (1.6) в уравнение (0.1), получаем равенство нулю кубической формы

(3.1) $$\gamma F F_{xx} G_4 - \frac{\alpha}{19} F^2 G_4 - 2\gamma F_x^2 G_4 + \gamma F F_x \frac{\partial G_4}{\partial x} - \frac{30}{19} \alpha\gamma F G_3 -$$

$$- 5\gamma^2 F G_6 - 30\gamma^2 G_7 + \gamma L^1 G_4 + \frac{\alpha}{19} L^1 G_5 + \gamma L^3 G_5 = 0$$

$$G_4 = F_t - \frac{30}{19} \alpha F_{xx}, \quad G_5 = \frac{11}{19} \alpha F - \gamma F_{xx}$$

$$G_6 = F_x F_{xxxxx} + 3 F_{xx} F_{xxxx} - 4 F_{xxx}^2$$

$$G_7 = 2 F_x F_{xx} F_{xxx} - F_x^2 F_{xxxx} - F_{xx}^3$$

$$L^k = F F_x \frac{\partial^k}{\partial x^k} - F^2 \frac{\partial^{k+2}}{\partial x^{k+2}}$$

В (3.1) постоянная интегрирования взята равной нулю. Из кубической формы (3.1) видно, что функция $F(x, t)$ — решение (3.1), если она удовлетворяет условиям $G_4 = 0$, $G_5 = c_3$, $G_3 = G_6 = G_7 = 0$ (c_3 — постоянная). Эти условия выполняются для функции (2.2) при

(3.2) $$k = \pm\sqrt{11\alpha/(19\gamma)}, \quad \omega = (30/19)\alpha k^2$$

Положив c_1 и $c_2 = 1$ и подставив выражения (2.2), (3.2) в преобразование (1.6), при $\beta = 0$ найдем решения уравнения (0.1)

$$(3.3) \qquad u(x, t) = \frac{15}{19}\alpha k\,[9U(x, t) - 11U^3(x, t) - 2],$$

$$U(x, t) = \mathrm{th}\left[\frac{k}{2}\left(x - \frac{30}{19}\alpha k t\right)\right]$$

При $\alpha = -1$ и $\gamma = -1$ решение (3.3) совпадает с ешением Курамото, предложенного для описания концентрационных волн при химических реакциях [9]. Выражение (3.3) известно также как точное солитонное решение уравнения, описывающего стекание пленки по наклонной плоскости [10]. Выражение (2.2), (3.2) для $F(x, t)$ удовлетворяет системе уравнений (1.3) и (1.4), в которой $u_3(x, t) = 0$ и $\beta = 0$. Эта система может быть также использована для нахождения значений k и ω в выражении (2.2) для $F(x, t)$.

Для ω получаем второе соотношение (3.2), а для k находим

$$(3.4) \qquad k_{1,2} = \pm\sqrt{11\alpha/(19\gamma)}, \quad k_{3,4} = \pm i\sqrt{\alpha/(19\gamma)}$$

Значения k_1 и k_2 приводят к решению, указанному выше.

4. Решение уравнения (0.1) при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Подстановка преобразования (1.6) при $u_3(x, t) = 0$ в уравнение (0.1) приводит к громоздкому выражению. Поэтому будем искать $F(x, t)$ в виде (2.2). Подставив (2.2) в систему (1.3) и (1.4) при $u_3(x, t) = 0$, приходим к алгебраическим уравнениям относительно ω и k:

$$(4.1) \qquad \omega = \frac{5\beta k}{4}\left[k^2 + \frac{3}{38\beta}\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)k + \frac{1}{95\gamma}\left(\frac{13\beta^2}{8\gamma} - 7\alpha\right)\right.$$

$$(4.2) \qquad k^4 + \frac{5}{152\gamma}\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)k^2 - \frac{1}{361}\left(11\frac{\alpha^2}{\gamma^2} - \frac{87}{8}\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^3} + \frac{131}{64}\frac{\beta^4}{\gamma^4}\right) = 0$$

Из биквадратного уравнения (4.4) находим $k_1, \ldots, k_4$. Из первого выражения (1.5), учитывая (2.2) и (4.2), находим

$$(4.3) \qquad \beta\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)\left[5k^2 + \frac{1}{19\gamma}\left(\frac{13\beta^2}{8\gamma} - 7\alpha\right)\right] = 0$$

Алгебраическое уравнение относительно k, которое получается из второго уравнения (1.5), является следствием (4.2) и (4.3).

Таким образом, функция $F(x, t)$, которая определяется формулой (2.2) с ω и k, вычисленными из (4.1)—(4.3), является решением системы уравнений (1.3)—(1.6). Поскольку выражения (1.3)—(1.6) получены в результате подстановки (1.1) в уравнение (0.1) и приравнивания слагаемых при одинаковых степенях $F(x, t)$, то из обращения в нуль (1.3)—(1.6) следует, что функция (1.6), где $F(x, t)$ определяется по формуле (2.2) с ω и k, вычисленными из (4.1)—(4.3), является решением исходного уравнения (0.1).

Из (4.1)—(4.3) видно, что значения ω и k существенно зависят от параметров α, β и γ.

Решение $u(x, t)$ исходного уравнения (0.1) находится, если выражение (2.2) подставить в (1.6). Положив, как и прежде, в (2.2) $c_1 = c_2 = 1$ и подставив $F(x, t)$ в (1.6), находим

$$(4.4) \qquad u(x, t) = 15k_0^2\left[\frac{\beta}{4} + \gamma k_0 U(x, t)\right]\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{1}{2}(k_0 x - \omega_0 t)\right] +$$

$$+ \frac{15k_0}{152}\left(\frac{\beta^2}{\gamma} - 16\alpha\right)[1 + U(x, t)], \quad U(x, t) =$$

$$= \mathrm{th}\left[\frac{1}{2}(k_0 x - \omega_0 t)\right]$$

Здесь k_0 — значение одного из действительных корней системы уравнений (4.2), (4.3), $\omega_0 = \omega(k_0)$ вычисляется по формуле (4.1).

Рассмотрим конкретные аналитические решения уравнения (0.1). При $\beta = 0$ получаем, что уравнение (1.5) является следствием (1.3) и (1.4). Из алгебраического уравнения (4.2) относительно k получаем значения (3.4). В результате решение (4.4) переходит в решение Курамото (3.3). В случае $\beta^2 = 16\alpha\gamma$ левая часть (4.3) обращается в нуль, поскольку уравнение (1.5) при этом является также следствием (1.3) и (1.4). Из выражений (4.1) и (4.2) получаем

$$k_{1,2,3,4}^2 = \pm\alpha/\gamma, \quad \omega = 5k\sqrt{\alpha\gamma}(k^2 + \alpha/5\gamma)$$

При $k_0 = \sqrt{\alpha/\gamma}$, $\omega_0 = \omega(k_0) = 6\alpha^2\gamma^{-1}$ решение $u(x, t)$ уравнения (0.1) запишется в виде

$$u(x,t) = 15\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(x - \frac{6\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}t\right)\right\}\times$$
$$\times\left[1 + \mathrm{th}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(x - \frac{6\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}t\right)\right\}\right] \tag{4.5}$$

Решение (4.5) имеет единственный максимум, который равен $(160/9)\sqrt{\alpha^3/\gamma}$. Если $(x - 6\alpha\sqrt{\alpha/\gamma}t) \to \pm\infty$, то $u(x, t) \to 0$. Существуют и другие аналитические решения уравнения (0.1). Приравнивая k^2, из (4.2) и (4.3) получаем биквадратное уравнение относительно $\beta/\sqrt{\alpha\gamma}$, откуда

$$\beta_{1,2} = \pm 19\sqrt{\alpha\gamma/47}, \quad \beta_{3,4} = \pm 16\sqrt{\alpha\gamma/73} \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.2) находятся соответствующие значения k:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha/(47\gamma)}, \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{\alpha/(73\gamma)} \tag{4.7}$$

Подставив $k_{1,2}$ и $k_{3,4}$ в (4.1), получаем

$$\omega_1 = -60\alpha^2/(47^2\gamma), \quad \omega_2 = -90\alpha^2/(73^2\gamma) \tag{4.8}$$

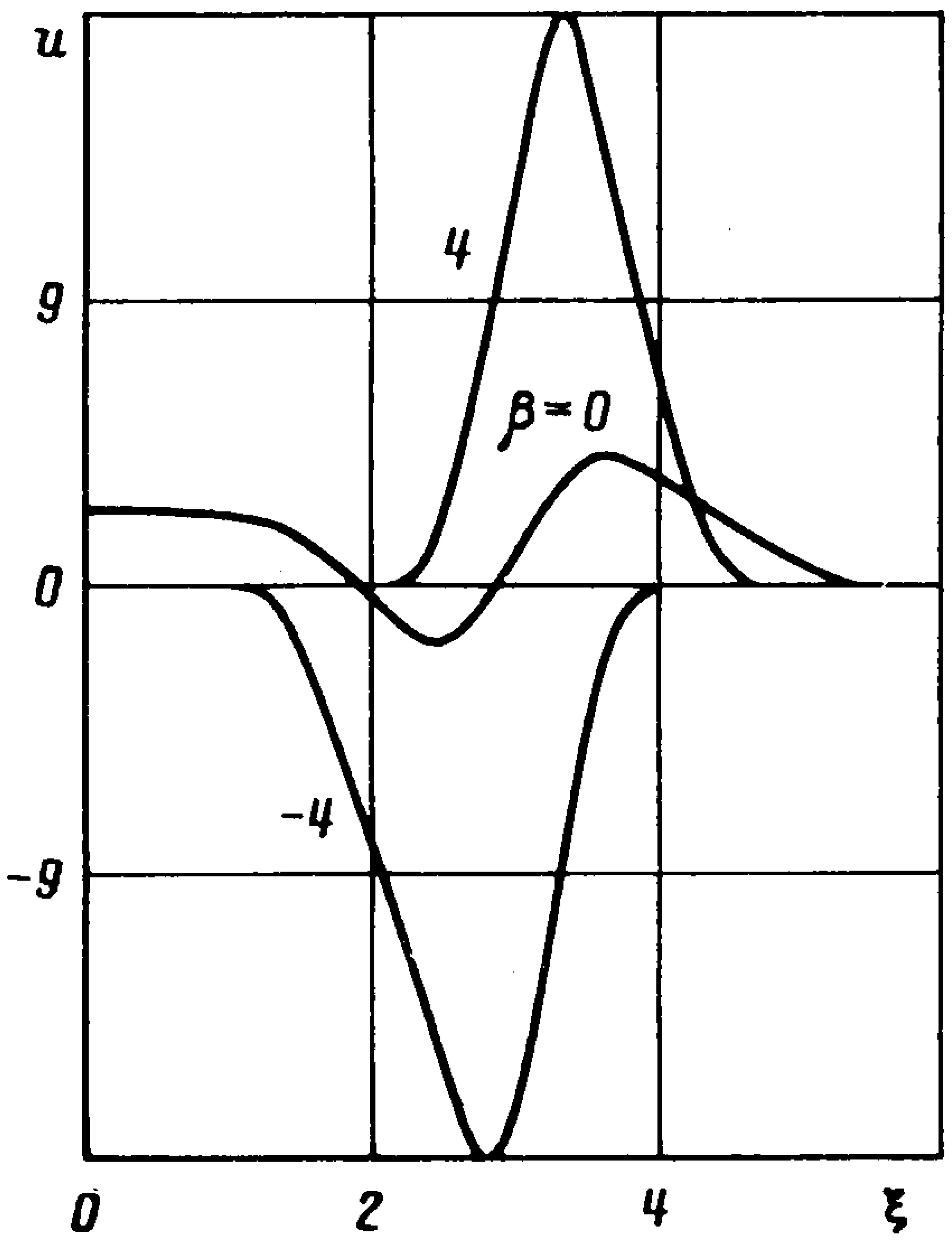
Выражение (4.4) является аналитическим решением уравнения (0.1) с соответствующими (4.7) и (4.8) значениями k и ω при условии, что коэффициент β связан с α и γ выражениями (4.6).

Остановимся на обсуждении полученных решений (4.4) и (4.5) уравнения (0.1). На фигуре представлены решения $u(x, t)$ в системе координат бегущей волны $\xi = x = \omega_0 k_0^{-1} t$ при $\alpha = \gamma = 1$ и $\beta = -4, 0, 4$, действительные значения k_0 находились по формуле (4.2) с учетом равенства (4.3). При $\beta = -4$ ($\beta^2 = 16\alpha\gamma$) решение $u(x, t)$ имеет единственный минимум, соответствующий уединенной волне, которая при $\xi \to \pm\infty$ (реально уже при $|\xi| = 5$) полностью сглаживается. В случае $\beta = 0$ решение имеет минимум и максимум. При $\beta = 4$ решение $u(\xi)$ описывает уединенную волну с одним максимумом и одним уровнем, при достаточно больших $|\xi|$ равным нулю. С увеличением абсолютного значения β волна становится ýже. Для случая $\beta^2 = 16\alpha\gamma$ при фиксированном значении γ с увеличением α (следовательно, и β) также характерно увеличение амплитуды волны и уменьшение ее ширины. Скорость уединенной волны пропорциональна $\alpha^{3/2}$, ее значение при $\xi = 0$ и амплитуда также $\sim\alpha^{3/2}$. Следовательно, уединенные волны большой амплитуды, описываемые уравнением (0.1), будут двигаться с большей скоростью.

Анализ устойчивости движения, описываемого уравнением (0.1), относительно малых возмущений $u' \sim e^{ikx+\omega t}$ приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega = -i\beta k^3 - k^2(\alpha - \gamma k^2) \tag{4.9}$$

Из (4.7) видно, что амплитуда волны с $k = \sqrt{\alpha/\gamma}$ с течением времени не затухает и не возрастает. Это соответствует уединенной волне, описываемой решением (4.5). Длинноволновые колебания ($k < \sqrt{\alpha/\gamma}$) при $\alpha < 0$ и $\gamma < 0$ в системе затухают в соответствии с (4.9), а коротковолновые ($k > \sqrt{\alpha/\gamma}$), наоборот, усиливаются. Это, однако, не противоречит существованию волн (4.4) при $k \neq \sqrt{\alpha/\gamma}$, поскольку такие волны связывают разные уровни решения $u(x, t)$ при $x \to \pm\infty$. Если учесть, что слагаемое αu_{xx} $(\alpha > 0,\ \gamma > 0)$ ответственно за диссипацию энергии волны, а слагаемое γu_{xxxx} — за подкачку ее, то потенциальная энергия разных уровней в решении как раз и приводит к существованию волн при $k \neq \sqrt{\alpha/\gamma}$.



Моделирование распространения уединенной волны, выполненное на основе численного решения уравнения (0.1) путем перехода к разностной схеме, позволило установить, что уединенная волна, описываемая формулой (4.5), упруго взаимодействует с другими возмущениями и, следовательно, является солитоном.

Сравнение аналитических решений уравнения (0.1), полученных в данной работе, с численными решениями, показало хорошее совпадение результатов.

Процедура нахождения точных решений уравнения (0.1) может быть обобщена на случай уравнений в частных производных с нелинейностью БКдВ и более высокого порядка. Имеется ряд фактов, указывающих на то, что для уравнений высокого порядка также существуют преобразования решений, аналогичные предложенным в данной работе для уравнения (0.1).

Автор благодарит Б. Л. Рождественского за обсуждения работы, а С. С. Кучеренко, В. В. Лоборева и В. М. Простокишина за помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
2. *Cole J. D.* On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics // Quant. Appl. Math. 1951. V. 9. No. 3. P. 225—236.
3. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu^*_{xx}$// Communs Pure Appl. Math. 1950. V. 3. No. 3. P. 201—230.
4. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. No. 6. P. 240—243.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир. 1987. 480 с.
7. *Hirota R.* Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogy of the Korteveg — de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. No. 4. P. 1424—1433.
8. *Березин Ю. А.* Моделирование нелинейных волновых процессов. Новосибирск: Наука, 1982. 160 с.
9. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 55. No. 2. P. 356—369.
10. *Шкадов В. Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63—66.

Москва

Поступила в редакцию
14.V.1987