

УДК (532.5 + 539.3):534

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОЯЧИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ,
ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ
БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

Гладун О. М., Федосенко В. С.

Методом возмущений решается задача о нелинейных стоячих волнах в идеальной несжимаемой жидкости, на поверхности которой плавает упругая изотропная пластина. Исследуется случай ветвления решения. Результаты работы кратко изложены в [1].

1. Рассмотрим слой идеальной несжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство, на поверхности которой плавает тонкая упругая изотропная пластина толщины h . Исследуем плоское движение жидкости, периодическое по горизонтальной координате x_1 (с периодом λ) и времени t_1 (с периодом τ). Ось x_1 направим вдоль среднего уровня поверхности раздела пластины и жидкости, ось z_1 — вертикально вверх.

Задача состоит в определении потенциала скорости φ^* , ординаты поверхности раздела пластины и жидкости ζ^* и частоты колебаний $\sigma = 2\pi/\tau$. В безразмерных переменных задача имеет вид [2, 3]

$$(1.1) \quad \Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < z \leq \varepsilon\zeta)$$

$$(1.2) \quad z = \varepsilon\zeta, \quad \zeta_t + \varepsilon\zeta_x\varphi_x = \varphi_z \\ D\mu^{-1}\zeta_{xxxx} + \kappa\zeta_{tt} + \varphi_t + 1/2\varepsilon(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \mu^{-1}\zeta = F(t)$$

$$(1.3) \quad z = -\infty, \quad \varphi_z = 0$$

$$(1.4) \quad \zeta(x + 2\pi, t + 2\pi) = \zeta(x, t), \quad \int_0^{2\pi} \zeta(x, t) dx = 0$$

$$(1.5) \quad x = kx_1, \quad z = kz_1, \quad t = \sigma t_1, \quad \varphi^* = \frac{\sigma}{k^2} \varepsilon\varphi, \quad \zeta^* = \frac{1}{k} \varepsilon\zeta$$

$$F^* = \frac{\varepsilon}{k^2} \sigma^2 \rho F, \quad \varepsilon = ak, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g} k^4, \quad \kappa = \frac{\rho_1}{\rho} hk,$$

$$\mu = \frac{\sigma^2}{gk}$$

Здесь E — модуль нормальной упругости пластины, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — плотность пластины, ρ — плотность жидкости, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, a — амплитуда линейной волны, ε — малый параметр. Функция $F^*(t_1)$ также подлежит определению.

Решение задачи будем искать методом возмущений. Для этого, раскладывая функцию $\varphi(x, z, t)$ в окрестности $z = 0$ в ряд Тейлора, запишем нелинейные граничные условия (1.2) приближенно с точностью до членов порядка ε^3

$$z = 0, \quad \zeta_t + \varepsilon\zeta_x(\varphi_x + \varepsilon\zeta\varphi_{xz}) = \varphi_z + \varepsilon\zeta\varphi_{zz} + \\ + 1/2(\varepsilon\zeta)^2\varphi_{zzz}, \quad D\mu^{-1}\zeta_{xxxx} + \kappa\zeta_{tt} + \mu^{-1}\zeta + \varphi_t + \varepsilon\zeta\varphi_{tz} + \\ + 1/2(\varepsilon\zeta)^2\varphi_{tzz} + 1/2\varepsilon(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \varepsilon^2\zeta(\varphi_x\varphi_{xz} + \varphi_z\varphi_{zz}) = F$$

и представим неизвестные в виде степенных рядов по ε :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n, \quad \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \zeta_n, \quad \frac{1}{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \theta_n, \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n$$

Используя обычный прием (см., например, [2]) и опуская промежуточные выкладки, с точностью третьего приближения имеем

$$(1.6) \quad \varphi^* = -\varepsilon k^{-2} \sigma_0 [\cos x \sin te^z + \varepsilon A \cos 2x \sin 2te^{2z} + \\ + \varepsilon^2 (A_1 \cos x \sin 3te^z + A_2 \cos 3x \sin te^{3z} + A_3 \cos 3x \sin 3te^{3z})]$$

$$(1.7) \quad \zeta^* = \varepsilon k^{-1} [\cos x \cos t + \varepsilon (2B \cos 2x \cos^2 t + (C - B) \cos 2x) + \\ + \varepsilon^2 (B_1 \cos x \cos t + B_2 \cos x \cos 3t + B_3 \cos 3x \cos t + \\ + B_4 \cos 3x \cos 3t)]$$

$$(1.8) \quad \sigma = \sigma_0 (1 + \varepsilon^2 \sigma_1)$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{gk}{\theta_0} \right)^{1/2}, \quad \sigma_1 = \frac{R}{16(1-R)(1+\kappa)} - \frac{C}{2(1+\kappa)},$$

$$F^* = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{k^2} \sigma_0^2 \rho \cos 2x$$

$$A = RB, \quad B = \frac{1}{4(1-R)}, \quad A_1 = \frac{(3R-1)(8\kappa-1) + 15R + 39}{256(R-1)(1+\kappa)}$$

$$A_2 = \frac{3(3R-1)S - 5(R+1)}{32(R-1)(3S-1)} - \frac{C}{2}, \quad A_3 = \frac{3(R+1)(P-1) + 7R + 3}{32(R-1)(P+2)}$$

$$B_1 = \frac{3+R+3\kappa(1+R)}{32(1-R)(1+\kappa)} - \frac{\kappa C}{2(1+\kappa)}, \quad C = \frac{1}{4\theta_0(16D+1)}$$

$$B_2 = \frac{4-R}{64(R-1)(1+\kappa)}, \quad B_3 = \frac{3(R+3)}{16(1-R)(3S-1)},$$

$$B_4 = \frac{R+3}{16(1-R)(P+2)}$$

$$R = \frac{12D_1\kappa_1 k^5 + 15D_1 k^4 - 3\kappa_1 k}{1 + D_1 k^4}, \quad P = \frac{8\kappa_1 k - 80D_1 k^4 - 72D_1 \kappa_1 k^5}{1 + D_1 k^4}$$

$$S = \frac{80D_1 \kappa_1 k^5 + 81D_1 k^4 + 1}{1 + D_1 k^4}, \quad \theta_0 = \frac{1 + \kappa_1 k}{1 + D_1 k^4}$$

$$D_1 = D/k^4, \quad \kappa_1 = \kappa/k$$

Исходя из приближенного выражения профиля (1.7) и формулы (1.8) можно установить ряд особенностей стоячей волны на поверхности раздела пластины и жидкости.

1°. Неподвижных узлов нет. Действительно, абсциссы узлов находятся из уравнения $\zeta^*(x, t, \varepsilon) = 0$. Представим $\zeta^*(x, t, \varepsilon)$ в виде

$$(1.9) \quad \zeta^*(x, t, \varepsilon) = \zeta_1^*(x, t, \varepsilon) + \zeta_2^*(x, \varepsilon)$$

Так как $\zeta_1^*(x, \pi/2, \varepsilon) \equiv 0$, ζ_1^* — составляющая профиля, распрямляющаяся в моменты времени $t = \pi(n + 1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Составляющая ζ_2^* от времени не зависит и представляет собой постоянное возмущение, совпадающее с профилем нелинейной волны в указанные моменты времени. Интересно отметить, что в отсутствие пластины [4] такая составляющая появляется лишь в четвертом приближении.

Для определения узловых точек ζ_1^* , ограничиваясь первыми двумя членами разложения, имеем уравнение

$$(1.10) \quad \cos x + \varepsilon 2B \cos 2x \cos t = 0$$

причем отброшен множитель $\cos t$, при нулевом значении которого в полной волне остается лишь ζ_2^* .

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1.10) на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет решение $x_j = \pi(2j - 1)/2$ ($j = 1, 2$). Ищем корни (1.10), близкие к этим, в виде рядов

$$(1.11) \quad x_j = \pi(2j - 1)/2 + \varepsilon a_{1j} + \varepsilon^2 a_{2j} + \dots$$

Подставляя (1.11) в (1.10), находим с точностью первого приближения

$$(1.12) \quad x_j = \pi (2j - 1)/2 + (-1)^j \varepsilon 2B \cos t$$

Из (1.12) следует, что корни уравнения (1.10) зависят от времени, т. е. у составляющей ζ_1^* неподвижные узлы отсутствуют. Назовем, следуя [5], рассматриваемые точки подвижными узлами, относя их к полной волне. В силу (1.9) видим, что эти узлы движутся не по горизонтали, а вдоль постоянного возмущения ζ_2^* , около которого и происходят колебания.

2°. Можно показать, что $\zeta_x^* = 0$ при $x = 0$ и $x = \pi$, а $\zeta_t^* = 0$ при $t = 0$ и $t = \pi$. Максимальные амплитуды будут в точках: а) $x = 0$ (гребень), $x = \pi$ (впадина) и при $t = 0$; б) $x = 0$ (впадина), $x = \pi$ (гребень) и при $t = \pi$.

3°. Если $B > 0$ ($B < 0$), амплитуда больше (меньше) амплитуды впадины, гребень — уже (шире), впадина — шире (уже). Это свойство следует из уравнения (1.7) и формулы (1.12).

4°. Проведя замену переменной $t = t' + \pi/2$, получим, что при $t' = 0$ профиль имеет вид

$$\zeta^* = \varepsilon^2 k^{-1} (C - B) \cos 2x$$

Следовательно, ввиду произвольности начального момента времени профиль волны в общем случае никогда не распрямляется. Однако отметим, что при определенном значении волнового числа k' величина $C - B = 0$. Значение k' — единственный положительный корень уравнения

$$\kappa_1 - 15D_1 k^3 - 14D_1 \kappa_1 k^4 = 0$$

Ниже приведены результаты вычисления корня k' для разных значений толщины пластины

$h, \text{ м}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$10^4 k^2, \text{ м}^{-1}$	368	232	177	146	126	111

Таким образом, существует такая длина волны, зависящая от исходных параметров задачи, что профиль поверхности раздела пластины и жидкости в определенные моменты времени может распрямляться.

5°. Из формулы (1.8) следует, что частота колебаний может быть как больше, так и меньше соответствующей величины в линейной задаче.

Свойства 3° и 5° связаны с тем, что уравнение $1 - R = 0$ (пятой степени относительно k) имеет один положительный действительный корень. Единственный положительный корень имеет также и уравнение $2 + P = 0$. В окрестностях данных корней амплитуды нелинейных приближений значительно превосходят амплитуду линейного приближения. Так как амплитуда первого нелинейного приближения в формулах (1.6)—(1.8) должна быть, по крайней мере, на порядок меньше амплитуды линейного приближения, а амплитуда второго нелинейного члена на два порядка, то для определения промежутков непригодности найденного решения были проведены численные расчеты. Расчеты показывают, что, например, для $h = 0,2$ м в каждой точке промежутка $[0,10492; 0,10716] \cup [0,13307; 0,14023]$ (м^{-1}) хотя бы одна из величин $|A|$, $|A_1 - A_2 + A_3|$, $|B + C|$, $|B_1 + B_2 + B_3 + B_4|$, $|\sigma_1|$ больше четырех (непригодность решения при $\varepsilon \geq 0,1$).

Интересно отметить, что при $D_1 = 0$ (битый лед) $1 - R > 0$, $2 + P > 0$, т. е. «резонансных» длин волн не существует.

Заметим, что вычисление каждого из последующих приближений решения задачи по методу возмущений будет сопровождаться появлением хотя бы одной резонансной длины волны, т. е. будем иметь множество резонансных значений волнового числа каждое из которых при определенных m и n удовлетворяет уравнению

$$(1.13) \quad n(n^4 - m^2)D_1 \kappa_1 k^5 + (n^5 - m^2)D_1 k^4 + n(1 - m^2)\kappa_1 k + n - m^2 = 0$$

где m и n — одновременно четные либо нечетные натуральные числа и $m, n > 1$.

При $m = n$ (1.13) имеет единственный положительный действительный корень k_{n-1} :

$$(1.14) \quad [n(n^2 + n + 1)D_1]^{-1/4} < k_{n-1} < (n^2 D_1)^{-1/4}$$

В случае реальных параметров задачи $D_1 > 0$, поэтому из оценки (1.14) следует, что получаемый из (1.13) при $n = m = 2, 3, \dots$ спектр резонансных значений волнового числа принадлежит промежутку $(0, 1)$, причем ноль — точка сгущения. Заметим, что данный спектр не совпадает со всем множеством резонансных значений волнового числа. Интерес к указанному спектру станет понятен дальше. Ниже приведены результаты вычисления корней k_1 и k_2 уравнений $1 - R = 0$, $2 + P = 0$, дающих первые два значения спектра

$h, \text{ м}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$10^4 k_1, \text{ м}^{-1}$	1368	815	602	486	411	359
$10^4 k_2, \text{ м}^{-1}$	106	632	467	377	319	278

Очевидно, что при резонансных длинах волн, а также в их окрестностях необходимо проводить дополнительные исследования.

2. Рассмотрим случай, когда $k = k_1$ — корень уравнения $1 - R = 0$. Отметим, что это уравнение эквивалентно при $m = n = 2$ следующему

$$(2.1) \quad m\sigma_0(k) = \sigma_0(nk)$$

которое в развернутой форме выражается формулой (1.13). [Здесь σ_0 — частота колебаний линейной волны. Последнее равенство при $m = n$ есть частный случай известного в нелинейной оптике [6] условия синхронизма]

$$(2.2) \quad \sigma_0\left(\sum_{i=1}^n k_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(k_i)$$

$n + 1$ взаимодействующих волн, когда $k_i = k$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Так как собственным функциям

$$\varphi_{jj} = \mp \left\{ \begin{array}{l} \sin jt \\ \cos jt \end{array} \right\} \cos jxe^{jz}, \quad j = 1, 2$$

линейной задачи, соответствующей (1.1)–(1.5), отвечают собственные числа μ_{11} и μ_{22} , равные между собой при $k = k_1$, что следует из (2.1), то первое (линейное) приближение для φ при $k = k_1$ по методу возмущений ищем в виде $-\cos x \sin te^z - b \cos 2x \sin 2te^{2z}$. Используя обычную схему метода возмущений при нахождении каждого из приближений для φ и ζ получаем один неопределенный коэффициент, который определяется при вычислении последующих приближений. Коэффициент b определяем вычисляя второе приближение. Опуская промежуточные выкладки, с точностью второго приближения имеем

$$(2.3) \quad \zeta_{\pm}^* = \varepsilon k^{-1} [\cos x \cos t + b \cos 2x \cos 2t + \varepsilon (A_1 \cos x \cos t + A_2 \cos x \cos 3t + A_3 \cos 2x \cos 2t + A_4 \cos 3x \cos t + A_5 \cos 3x \cos 3t + A_6 \cos 4x \cos 4t + A_7 \cos 4x + A_8 \cos 2x)]$$

$$(2.4) \quad \sigma = \sqrt{\frac{gk_1}{\theta_0(k_1)}} (1 + \varepsilon\sigma_1), \quad \sigma_1 = \frac{b}{4(1+\kappa)}$$

$$b = \pm \left(\frac{1+\kappa}{4+8\kappa}\right)^{1/2}, \quad A_1 = \frac{b(2+3\kappa)}{4(1+\kappa)}, \quad A_2 = -\frac{3b}{16(1+\kappa)}$$

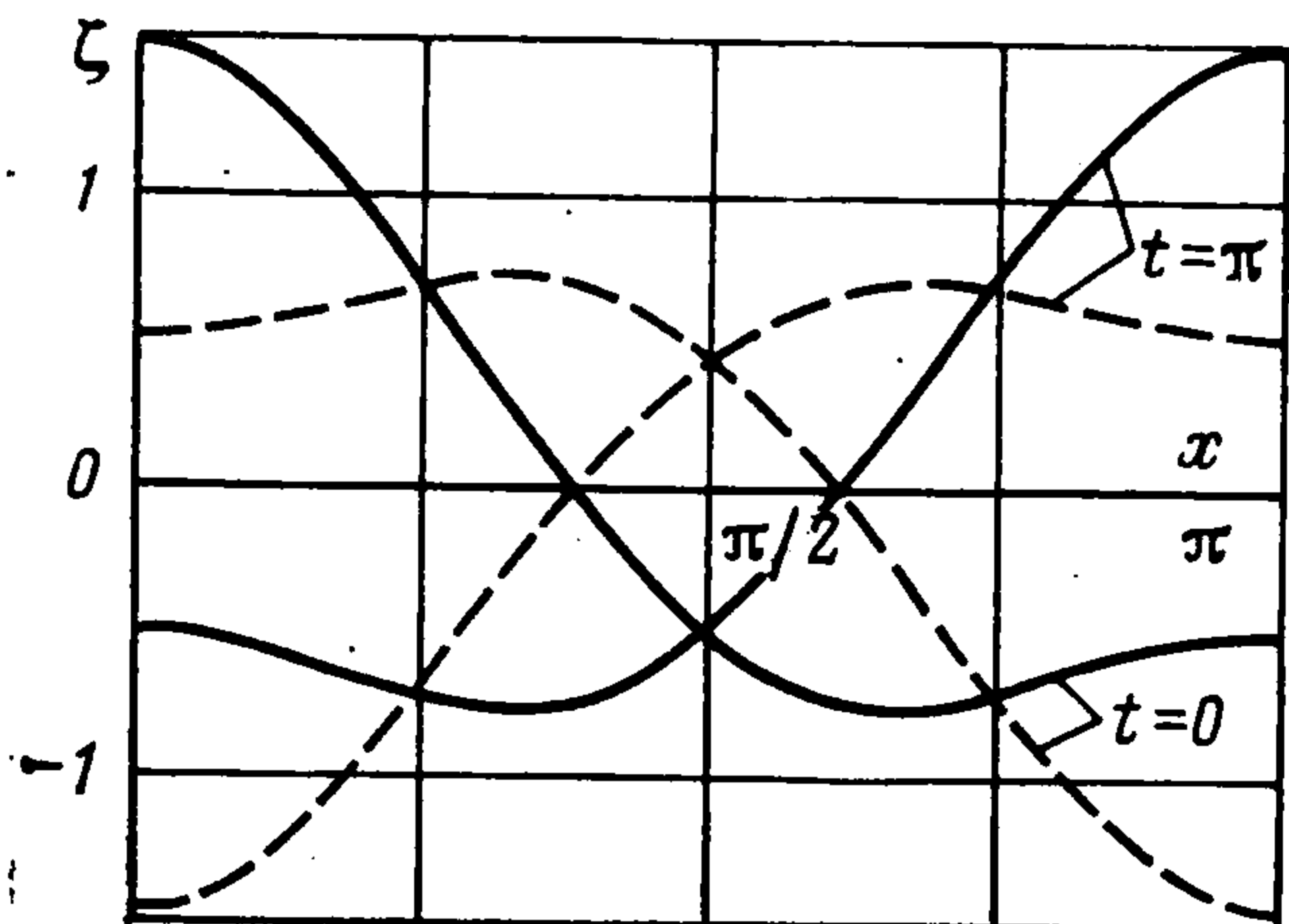
$$A_3 = b^2 \left[\frac{21+4\kappa}{32(1+\kappa)} + \frac{7+24\kappa}{4(3+8\kappa)} - \frac{3(7+12\kappa)}{4(5+12\kappa)} + \frac{3}{8} \right] -$$

$$- 4b^4 \left[\frac{4+9\kappa}{7+18\kappa} + \frac{1}{9+26\kappa} \right] + \frac{1}{8}, \quad A_4 = \frac{b}{2(3+8\kappa)},$$

$$A_5 = -\frac{3b}{2(5+12\kappa)}, \quad A_6 = -\frac{b^2}{2(7+18\kappa)}, \quad A_7 = \frac{b^2}{2(9+26\kappa)},$$

$$A_8 = \frac{b^2}{2(1+\kappa)}$$

Таким образом, при $k = k_1$ происходит ветвление решения: возможно существование двух волн одинаковой длины $\lambda_1 = 2\pi k_1^{-1}$, но с разными частотами колебаний, различающимися на величину $2\varepsilon\sigma_0 |\sigma_1|$. Численные расчеты показывают, что абсолютное значение второго приближения при $t = 0, t = \pi$ в выражении для $\zeta_{\pm} = \varepsilon^{-1}k_1 \zeta_{\pm}^*$ не превосходит приблизительно $0,3\varepsilon$, т. е. общая форма профиля волны описывается первым приближением.



На фигуре изображены графики ζ_{\pm} в моменты времени $t = 0, t = \pi$ для $\varepsilon = 0, 1$ (ζ_+ — сплошная, ζ_- — штриховая линия). Изменение ζ_{\pm} в зависимости от толщины пластины, когда $0,2\text{ м} \leq h \leq 1,2\text{ м}$, не превосходит $0,01$.

3. Выше были получены решения (1.6)—(1.8) и (2.3), (2.4) поставленной задачи, первое из которых справедливо вне малых окрестностей волновых чисел k_1 и k_2 , а второе при $k = k_1$. Для нахождения решения в окрестности $k = k_1$ придадим малые возмущения безразмерным параметрам κ и D , зависящим от k :

$$\kappa = \kappa_0 (1 + \varepsilon d_1), \quad D = D_0 (1 + \varepsilon d_2); \quad \kappa_0 = \kappa_1 k, \quad D_0 = D_1 k_1^4$$

Для определения профиля поверхности раздела пластины и жидкости, а также частоты колебаний методом возмущений находим выражения, аналогичные (2.3), (2.4), причем коэффициенты в этих выражениях зависят от κ_0 и d_1 .

Таким образом, в малой окрестности $k = k_1$ также происходит бифуркация решения задачи. Расчеты показывают, что при значениях k , достаточно близких к k_1 , профили волн ζ_{\pm} в моменты времени $t = 0$ и $t = \pi$ по форме аналогичны соответствующим профилям волн, отвечающим решению (2.3); при удалении от k_1 форма профиля одной волны (ζ_- при $k > k_1$, ζ_+ при $k < k_1$) стремится к форме профилей волн, описываемых решением (1.7), амплитуда другой волны (ζ_+ при $k > k_1$, ζ_- при $k < k_1$) возрастает, профиль в моменты времени $t = 0$ и $t = \pi$ имеет выраженную «двухгорбую» форму. Указанные свойства наиболее четко проявляются при малых значениях толщины пластины, например при $h = 0,2$ м, ибо при уменьшении h интервалы, составляющие промежуток непригодности решения (1.6)—(1.8), расширяются, а резонансные значения волнового числа увеличиваются.

Расчеты проводились для следующих параметров задачи: $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 1080$ кг/м³, $\rho_1 = 870$ кг/м³, $\nu = 0,34$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладун О. М., Федосенко В. С. О характере ветвления решений некоторых нелинейных задач гидродинамики волн // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. Ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. С. 196.
2. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 196 с.
3. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
4. Секерж-Зенькович Я. И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1947. Т. 58. № 4. С. 551—553.
5. Секерж-Зенькович Я. И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз., 1951. Т. 15. № 1. С. 57—73.
6. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966. 424 с.

Минск

Поступила в редакцию
26.VI.1987