

УДК 541.124:532.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ В ЗАДАЧАХ С РАЗРЫВОМ КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Крупа В. Г., Тирский Г. А.

Исследуется стационарное распределение концентрации в потоке при обтекании тел с разрывом каталитических свойств поверхности. Проводится асимптотический анализ этой задачи на основе уравнений Навье—Стокса при $Re \rightarrow \infty$ в окрестности точки разрыва каталитических свойств, формулируются соответствующие краевые задачи для главных членов разложения искомых функций. Решаются две пространственные задачи, в которых учитывается трансверсальная диффузия при обтекании плоской поверхности с прямоугольной вставкой, обладающей иными каталитическими свойствами. Рассматриваются случаи, когда диффузионный поток рекомбинирующих частиц при переходе на поверхность вставки изменяется скачком и когда основная поверхность некаталитическая, а вставка — идеально каталитическая. В обоих случаях оценивается область влияния трансверсальной диффузии.

1. Рассмотрим стационарное течение бинарной смеси химически реагирующего сжимаемого газа вдоль поверхности пластины. Пусть на расстоянии $x_0 = 0$ (1) от начала пластины имеется разрыв каталитических свойств поверхности; предполагаем, что $\varepsilon = Re^{-1/2} \rightarrow 0$, $Re = \rho_\infty V_\infty x_0 / \mu_\infty$ (величины с индексом ∞ соответствуют значениям параметров в набегающем потоке). Уравнения Навье — Стокса в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x - x_0}{x_0}, & y^* &= \frac{y}{x_0}, & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & \mathbf{v}^* &= \frac{\mathbf{v}}{V_\infty}, & k^* &= \frac{k}{V_\infty} \\ T^* &= \frac{T}{T_\infty}, & T_\infty &= \frac{V_\infty^2}{c_{p\infty}}, & p^* &= \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2}, & h^* &= \frac{h}{c_{p\infty} T_\infty}, \\ w^{**} &= \frac{w \cdot x_0}{\rho_\infty V_\infty} \end{aligned}$$

в декартовой прямоугольной системе координат x, y (см., например, [1]) имеют вид (звездочки над безразмерными величинами опускаем)

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \nabla \cdot \rho \mathbf{v} &= 0, & \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \varepsilon^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \mathbf{v} \cdot \nabla c &= \varepsilon^2 \nabla (\mu Sc^{-1} \nabla c) + w^* \\ \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \mathbf{v} \cdot \nabla p - (h_a - h_m) w^* + \varepsilon^2 [\boldsymbol{\tau} : \mathbf{e} + \nabla (\mu c_p \sigma^{-1} \nabla T) + \\ &+ (c_{pa} - c_{pm}) \mu Sc^{-1} \nabla c \cdot \nabla T] \\ p &= \frac{\rho}{m} RT, & R &= \frac{R_A}{c_{p\infty}}, & \frac{1}{m} &= \frac{c}{m_a} + \frac{c_m}{m_m}, & \nabla &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \mathbf{e} &= \| e_{\alpha\beta} \|, & \boldsymbol{\tau} &= \| \tau_{\alpha\beta} \|, & \tau_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu e_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Величины с индексом a и m относятся соответственно к атомам и молекулам; $\mathbf{v} = (u, v)$; ρ, p, T, h — скорость, плотность, давление, температура, энтальпия; c — массовая концентрация атомов; μ, c_p, Sc, σ — коэффициент вязкости, удельная теплоемкость, числа Шмидта и Прандтля; w^*, R_A — химический источниковый член и универсальная газовая постоянная; \mathbf{e} — тензор скоростей деформаций.

Граничные условия на теле будем задавать в следующем виде (считаем, что безразмерная константа скорости гетерогенной реакции имеет

порядок $\varepsilon^{\alpha_i} k_i$, $k_i = O(1)$):

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v = 0, \quad T = T_w(x), \quad \mu Sc^{-1} \partial c / \partial y = \varepsilon^{\alpha_i - 2} \rho k_i c, \quad y = 0 \\ k = k_1, \quad x < 0; \quad k = k_2, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Предположим, что внешнее (невозмущенное разрывом каталитических свойств) течение описывается уравнениями пограничного слоя. Тогда

$$(1.3) \quad A \equiv \partial T / \partial \eta = O(1), \quad U \equiv \partial u / \partial \eta = O(1)$$

где $\eta = y/\varepsilon$ — переменная пограничного слоя.

Будем считать, что величины $c_{pa}(T)$, $h_a(T)$, $c_{pm}(T)$, $h_m(T)$, Sc , μ , σ , w порядка единицы; порядок величины концентрации атомов c при $x = 0$ — определяется из решения внешней задачи. Для определенности предположим, что во внешнем невозмущенном пограничном слое слагаемые конвективного теплового потока, обусловленные теплопроводностью и диффузией, одинаковы по порядку величины:

$$(1.4) \quad \partial T / \partial \eta \sim \partial c / \partial \eta \sim O(1)$$

Тогда из (1.2), (1.4) следует, что при $\eta = 0$, $x = 0$ — (при подходе к точке разрыва слева)

$$(1.5) \quad c = O(\varepsilon^{1-\alpha_1}), \quad \alpha_1 \leq 1$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha_1 \leq \alpha_2$ (скачкообразный переход к поверхности с меньшей или равной каталитической активностью). Введем новые переменные и функции (величины с нулевым индексом находятся из решения внешней параболической задачи при $x = 0$, $\eta = 0$):

$$(1.6) \quad \begin{aligned} x = \varepsilon^{3/2} x_1, \quad y = \varepsilon^{3/2} y_1, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_1 + \dots, \quad \tau = \varepsilon^{-1} \tau_1 + \dots, \\ T = T_{w0} + \varepsilon^{1/2} T_1 + \dots, \quad c = c_0 + \varepsilon^{1/2} c_1 + \dots, \\ p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \dots, \quad \mu = \mu_0 + \dots, \\ Sc = Sc_0 + \dots, \quad \sigma = \sigma_0 + \dots, \quad c_p = c_{p0} + \dots \end{aligned}$$

где многоточие означает члены более высокого порядка малости по сравнению с первым членом. Вид разложений для v , T , c определяется из условий сращивания с внешним решением (1.3), (1.4), (1.5) и граничными условиями при $y = 0$; для x , y — из условия, что в окрестности точки разрыва каталитических свойств поверхности линейные масштабы проявления диффузии в продольном (вдоль пластины) и поперечном направлениях одного порядка, и условия равенства по порядку величины конвективных и диффузионных членов в уравнении диффузии.

Рассмотрим граничные условия для концентрации c на поверхности $y_1 = 0$. Положим $c_0(\varepsilon) = c_0' \varepsilon^{1-\alpha_1}$, $c_0' = O(1)$ (см. (1.5)). Подставляя разложения (1.6) для c в (1.2), получим при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \partial c_1 / \partial y_1 = K_1 (c_0' + c_1 \varepsilon^{\alpha_1 - 1/2}), \quad x_1 < 0 \\ \partial c_1 / \partial y_1 = K_2 (c_0' \varepsilon^{\alpha_2 - \alpha_1} + c_1 \varepsilon^{\alpha_2 - 1/2}), \quad x_1 \geq 0 \\ K_i = \rho_0 k_i Sc_0 / \mu_0 \end{aligned}$$

В зависимости от значений величин α_1 , α_2 (отметим еще раз, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$) возможны четыре вида условий (1.7):

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \text{при } 1/2 < \alpha_1 \\ \partial c_1 / \partial y_1 = K_1 c_0', \quad x_1 < 0 \\ \partial c_1 / \partial y_1 = K_2 c_0' \quad (\alpha_2 = \alpha_1) \quad \partial c_1 / \partial y_1 = 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_2), \quad x_1 \geq 0 \\ \text{при } \alpha_1 = 1/2 \end{aligned}$$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \partial c_1 / \partial y_1 &= K_1 (c_0' + c_1), \quad x_1 < 0 \\ \partial c_1 / \partial y_1 &= K_2 (c_0' + c_1) \quad (\alpha_2 = \alpha_1), \quad \partial c_1 / \partial y_1 = 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_2), \quad x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

при $\alpha_1 < 1/2 \leq \alpha_2$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} c_1 &= 0, \quad x_1 < 0 \\ \partial c_1 / \partial y_1 &= K_2 c_1 \quad (\alpha_2 = 1/2), \quad \partial c_1 / \partial y_1 = 0 \quad (\alpha_2 > 1/2), \quad x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

при $\alpha_1 \leq \alpha_2 < 1/2$

$$(1.11) \quad c_1 = 0, \quad x_1 < 0; \quad c_1 = 0, \quad x_1 \geq 0$$

Подставляя (1.6) в (1.1) для первых членов разложения получаем ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \rho_0 \nabla_1 \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \quad \rho_0 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{v}_1 = -\nabla_1 p_1 + \mu_0 \nabla_1^2 \mathbf{v}_1 \\ \rho_0 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 c_1 &= \mu_0 Sc_0^{-1} \nabla_1^2 c_1 \\ \rho_0 c_{p0} \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 T_1 &= \mu_0 \sigma_0^{-1} c_{p0} \nabla_1^2 T_1 \\ \nabla_1 &\equiv (\partial / \partial x_1, \partial / \partial y_2) \end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности для системы уравнений (1.12) будут иметь вид

$$(1.13) \quad \mathbf{v}_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

для c_1 — условия (1.8)—(1.11).

На бесконечности граничные условия определяются условиями сращивания с решением в пограничном слое:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} u_1 &= Uy_1, \quad T_1 = Ay_1, \quad c_1 = K_1 c_0' y_1, \quad p_1 \rightarrow 0 \quad x_1 \rightarrow -\infty \\ \partial u_1 / \partial y_1 &= U, \quad \partial T_1 / \partial y_1 = A, \quad \partial c_1 / \partial y_1 = K_1 c_0', \quad p_1 \rightarrow 0, \quad y_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

При $x \rightarrow \infty$ граничные условия определяются выходом на пограничное решение:

$$(1.15) \quad \partial u^2 / \partial x_1^2 = 0, \quad \partial^2 T / \partial x_1^2 = 0, \quad \partial^2 c_1 / \partial x_1^2 = 0, \quad p_1 = 0, \quad x_1 \rightarrow \infty$$

Система уравнений (1.12) (за исключением четвертого уравнения) совпадает с системой для несжимаемой вязкой жидкости с постоянными свойствами и допускает очевидные решения динамической и тепловой задачи

$$u_1 = Uy_1, \quad v_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad T_1 = Ay_1$$

Диффузионная задача отделяется от динамической и тепловой, сводится к решению уравнения

$$(1.16) \quad Uy_1 \partial c_1 / \partial x_1 = \mu_0 Sc_0^{-1} \nabla_1^2 c_1$$

и в случае граничного условия (1.11) имеет тривиальное решение $c_1 = K_1 c_0' y_1$. Для того чтобы учесть разрыв граничных условий, необходимы следующие члены разложения.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha_2 < \alpha_1$, т. е. имеет место скачкообразный переход к поверхности с большей каталитической активностью. Предположим для простоты, что $\alpha_1 = 1$, тогда $c = c_0 = O(1)$ при $\eta = 0$, $x = 0$.

При $1/2 < \alpha_2 < 1$ решение для всех функций (за исключением c) будем искать в виде (1.6), для концентрации — в виде

$$(1.17) \quad c = c_0 + \varepsilon^{\alpha_2 - 1/2} c_1 + \dots$$

Подставляя разложения (1.6), (1.17) в (1.1), (1.2), для первых членов разложения получим систему (1.12) с граничными условиями (1.13)—(1.15) для \mathbf{v}_1, T_1, p_1 ; граничные условия для концентрации будут иметь вид

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \partial c_1 / \partial y_1 = 0, \quad x_1 < 0; \quad \partial c_1 / \partial y_1 = K_2 c_0, \quad x_1 \geq 0, \quad y_1 = 0 \\ c_1 = 0, \quad y_1 \rightarrow \infty; \quad c_1 = 0, \quad x_1 \rightarrow -\infty; \quad \partial^2 c_1 / \partial x_1^2 = 0, \quad x_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Очевидно, что в этом случае решение диффузионной задачи сведется к решению уравнения (1.16) с граничными условиями (1.18). Отметим, что уравнение (1.16) с граничными условиями (1.8)—(1.10), (1.18) и (1.14), (1.15) решалось в ряде работ аналитическими [2—5] и численными [6, 7] методами.

При $\alpha_2 < 1/2$ из (1.2) следует, что в этом случае изменение концентрации в окрестности точки разрыва будет величиной порядка единицы. Решение будем искать для x, y, v, τ, T, p в виде (1.6), для остальных функций будем иметь

$$(1.19) \quad \begin{aligned} c = c_1 + \dots, \quad \rho = \rho_1 + \dots, \quad Sc = Sc_1 + \dots, \quad \sigma = \sigma_1 + \dots, \\ \mu = \mu_1 + \dots, \quad c_p = c_{p1} + \dots \end{aligned}$$

Подставив разложения (1.6), (1.19) в (1.1), для главных и первых членов разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим систему

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \nabla_1 \cdot \rho_1 v_1 = 0, \quad \rho_1 v_1 \cdot \nabla_1 v_1 = -\nabla_1 p_1 + \nabla_1 \tau_1 \\ \rho_1 v_1 \cdot \nabla_1 c_1 = \nabla_1 (\mu_1 Sc_1^{-1} \nabla_1 c_1) \\ \rho_1 c_{p1} v_1 \cdot \nabla_1 T_1 = \nabla_1 (\mu_1 c_{p1} \sigma_1^{-1} \nabla_1 T_1) + (c_{pa} - c_{pm}) \mu_1 Sc_1^{-1} \nabla_1 c_1 \cdot \nabla_1 T_1 \\ \rho_1 / m = p_0 / (T_{w0} R) = \text{const} \end{aligned}$$

Граничные условия для v_1, p_1, T_1 — прежние ((1.14), (1.15)), для концентрации они будут

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \partial c_1 / \partial y_1 = 0, \quad x_1 < 0; \quad \partial c_1 / \partial y_1 = \rho_1 k_2 Sc_1 c_1 / \mu_1 \quad (\alpha_2 = 1/2), \quad c_1 = 0 \\ (\alpha_2 < 1/2), \quad x_1 \geq 0, \quad y_1 = 0 \\ c_1 = c_0, \quad x_1 \rightarrow -\infty; \quad c_1 = c_0, \quad y_1 \rightarrow \infty; \\ \partial^2 c_1 / \partial x_1^2 = 0, \quad x_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

В случае $\alpha_2 < 1/2$ в (1.21) зоной релаксации к равновесию пренебрегалось.

Рассмотрим обтекание гладкого выпуклого плоского профиля в указанной выше постановке. Введем естественную систему координат: ось x (длина дуги) направлена вдоль поверхности тела, ось y — по нормали к ней. Очевидно, что в силу локальности проведенного анализа задача о разрывной каталитичности в этом случае сведется к рассмотренной: (1.16) или (1.20) с соответствующими граничными условиями. Величины с нулевым индексом равны их значениям, полученным при решении внешней параболической задачи на поверхности тела при $x = x_0 = 0$ в естественной системе координат.

Таким образом, при переходе с поверхности, для которой константа каталитической рекомбинации $\varepsilon^{\alpha_1} k_1$, на поверхность, где эта константа равна $\varepsilon^{\alpha_2} k_2$ при $\alpha_1 \leq \alpha_2$, течение в окрестности разрыва описывается уравнением (1.16) с граничными условиями (1.8)—(1.11), (1.14), (1.15). Если $\alpha_1 = 1 > \alpha_2$, то при $1/2 < \alpha_2 < 1$ течение также описывается уравнением (1.16) с граничными условиями (1.18); при $\alpha_2 < 1/2$ — краевой задачей (1.20), (1.14), (1.15), (1.21). Размеры возмущенной области составляют величину порядка $\varepsilon^{3/2} = \text{Re}^{-3/4}$.

2. Получим решение задачи о диффузии, когда на плоской поверхности имеется прямоугольная вставка с иными каталитическими свойствами, стороны которой параллельны и перпендикулярны набегающему потоку и описываются соответственно уравнениями $z = 0$ и $x = 0$; поток концентрации при переходе на поверхность вставки изменяется скачком. Будем исходить из уравнения диффузии, записанного в виде (ср. с (1.16))

$$(2.1) \quad y \partial c / \partial x = \partial^2 c / \partial y^2 + \partial^2 c / \partial z^2$$

Пусть при $y = 0$ заданы граничные условия вида (1.8). Тогда, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть следующие условия:

$$(2.2) \quad c = 0, \quad x = 0; \quad c = 0 \quad y \rightarrow \infty; \quad \partial c / \partial y = -1, \quad z < 0, \quad \partial c / \partial y = 1, \\ z > 0, \quad y = 0, \quad \partial^2 c / \partial z^2 = 0, \quad z \rightarrow \pm \infty$$

Аналогичная задача решалась численно [7], опущенный в (2.1) член $\partial^2 c / \partial x^2$ пренебрежимо мал при $x \geq 1$ [7].

Совершим преобразование Лапласа по x [8]

$$f(p, y, z) = \int_0^{\infty} \exp(-px) c(x, y, z) dx$$

Используя метод разделения переменных, получим

$$(2.3) \quad f = \frac{1}{\pi p} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y, \lambda) \frac{\sin \lambda z}{\lambda} d\lambda, \quad \varphi = \frac{\text{Ai}(p^{-2/3}(yp + \lambda^2))}{p^{1/3} \text{Ai}'(\lambda^2 p^{2/3})}$$

где $\text{Ai}(s)$, $\text{Ai}'(s)$ — функция Эйри первого рода и ее производная. В p -плоскости сделан разрез вдоль отрицательной действительной оси, ветви функций $(\alpha + i\beta)^r$ фиксированы условием $(\alpha + i\beta)^r \rightarrow \alpha^r$ при $\alpha \rightarrow +\infty$, поэтому φ экспоненциально убывает при $y \rightarrow \infty$ [9].

Заметим, что $c(x, y, z) = -c(x, y, -z)$, поэтому далее предполагаем, что $z > 0$. Замыкая путь интегрирования в (2.3) дугой окружности $|\lambda| = R$ в верхней половине λ -плоскости и используя лемму Жордана [8] (нули функции $\text{Ai}'(\lambda^2 p^{2/3})$, где p фиксирована, $p \neq 0$ — простые), получаем

$$(2.4) \quad f = \frac{1}{p^{1/3}} \left[\frac{\text{Ai}(yp^{1/3})}{\text{Ai}'(0)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Ai}(yp^{1/3} - a_n')}{\text{Ai}''(-a_n') a_n'} \exp(-a_n'^{1/2} p^{1/3} z) \right]$$

где $-a_n'$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — нули функции $\text{Ai}'(s)$. Из (2.4) следует выполнение условий (2.2) при $z \rightarrow \pm \infty$.

Далее будем искать решение при $y = 0$, тогда (2.4) примет вид

$$(2.5) \quad f(p, 0, z) = \frac{A + \Sigma(z)}{p^{1/3}}; \quad \Sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-a_n'^{1/2} p^{1/3} z)}{a_n'^{1/2}}, \quad A = \frac{\text{Ai}(0)}{\text{Ai}'(0)}$$

Из (2.5) следует, что $f = 0$ при $z = 0$, так как справедливо равенство $A + \Sigma(0) = 0$. Для доказательства этого равенства достаточно рассмотреть (в смысле главного значения) интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Ai}(\lambda^2)}{\lambda \text{Ai}'(\lambda^2)} d\lambda = 0$$

и замкнуть путь интегрирования в верхней половине λ -плоскости.

Применяя к f обратную формулу преобразования Лапласа [8], из (2.5) получаем

$$(2.6) \quad c = -\frac{3^{2/3} x^{1/3}}{\Gamma(2/3)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+b}^{i\infty+b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-a_n'^{1/2} p^{1/3} z + px)}{a_n'^{1/2} p^{1/3}} dp, \quad b > 0$$

где было использовано, что $A = \text{Ai}(0)/\text{Ai}'(0) = -\Gamma(1/3)/(3^{1/3}\Gamma(2/3))$ [9]. Первый член в (2.6) в точности соответствует параболическому (при пренебрежении $\partial^2 c / \partial z^2$) решению системы (2.1), (2.2) при $z > 0$, второй член описывает влияние трансверсальной (направленной по оси z) диффузии. Из (2.6) следует, что $cx^{-1/3}$ — функция $zx^{-1/3}$, т. е. размер области влияния трансверсальной диффузии растет как $z \sim x^{1/3}$.

В силу достаточно сложного выражения (2.6) ограничимся тем, что получим для c главные члены асимптотического разложения при малых и больших z .

При помощи формулы Эйлера — Маклорена [10] можно получить, учитывая асимптотический характер поведения нулей a_n' при $n \rightarrow \infty$ [9], что

$$(2.7) \quad \Sigma (1) = -A + 2\pi^{-1}p^{1/3} \ln p^{1/3} + O(p^{1/3})$$

Сделав замену $q = pz^{1/3}$ в интеграле (2.6), подставим (2.7) в (2.6) и почленно проинтегрируем, тогда

$$(2.8) \quad C \equiv cx^{-1/3} = 2\pi^{-1}Z \ln Z + O(Z), \quad Z = zx^{-1/3}$$

Из (2.8) следует, что в окрестности линии разрыва $Z = 0$ функция C непрерывна, $\partial C/\partial Z$ имеет логарифмическую особенность.

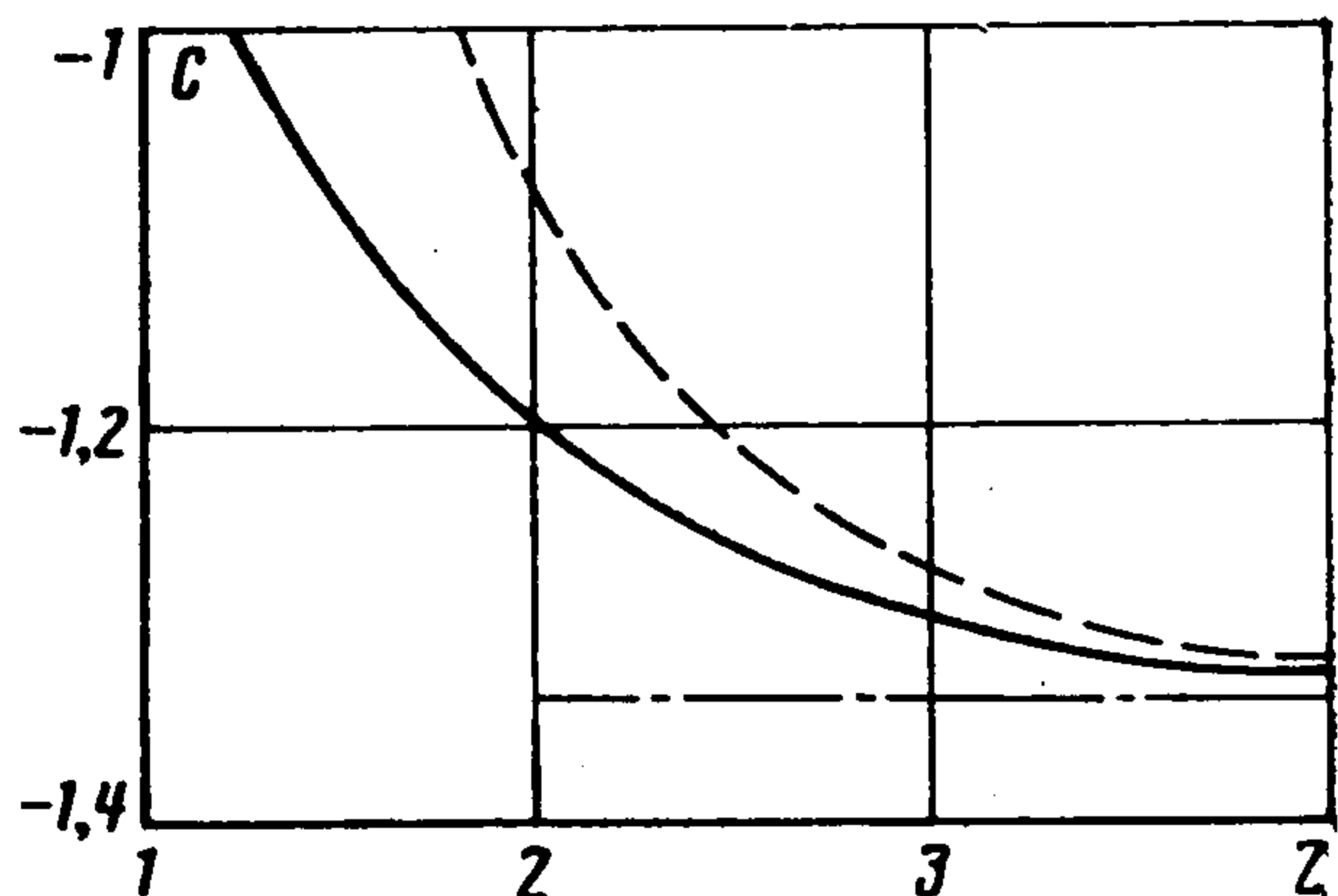
В случае $Z \gg 1$ поступим следующим образом. Применяя признак В [11], можно показать, что почленное интегрирование при $z > 0$ в (2.6) законно. Сделав замену $q' = pxa_n'^{-3/4}Z^{-3/2}$ в (2.6) и применив метод перевала [12], получаем

$$(2.9) \quad C = -\frac{3^{2/3}}{\Gamma(2/3)} + \frac{3^{7/4}}{2\pi^{1/2}a_0'^{21/8}Z^{5/4}} \exp\left(-\frac{2a_0'^{3/4}Z^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right) \left(1 + O\frac{1}{Z^{3/2}}\right)$$

где $-a_0'$ — значение первого (минимального по абсолютной величине) нуля функции $Ai'(s)$, $a_0' = 1,01879$. В (2.9) было использовано свойство, что a_n' монотонно увеличивается с ростом n .

Таким образом, влияние трансверсальной диффузии экспоненциально падает при $Z \gg 1$.

На фиг. 1 приведена зависимость $C(Z)$; сплошная линия — численное решение [7] задачи (2.1), (2.2), полученное методом переменных направлений, штриховая линия получена по формуле (2.9), штрих-пунктирная линия соответствует погранслойному решению $C = -3^{2/3}/\Gamma(2/3) = -1,536$. Видно, что отличие численного решения от асимптотического (формула (2.9)) при $Z \geq 2,5$ составляет менее 5%, при $Z \geq 3,5$ асимптотическое решение выходит на погранслойное (отличие менее 2%).



Фиг. 1

3. Рассмотрим пространственную диффузионную задачу, когда основная поверхность — некаталитическая, прямоугольная вставка — идеально каталитическая. Решение предполагается непрерывным и ограниченным. Отметим, что такая задача также возникает в теории пленочного термоанемометра [13].

Введем функцию $\theta = 1 - c$, тогда задача примет вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} y\partial\theta/\partial x &= \partial^2\theta/\partial y^2 + \partial^2\theta/\partial z^2 \\ \theta &= 0, \quad x = 0; \quad \partial\theta/\partial y = 0, \quad z < 0; \quad \theta = 1, \quad z > 0, \quad y = 0, \quad x > 0 \\ \theta &= 1, \quad y \rightarrow \infty; \quad \theta \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Условие $\theta = 1$ при $z > 0$ заменим на

$$(3.2) \quad \theta(x, 0, z) = \psi, \quad z > 0$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp(-a_0 p^{1/3} z + px) \frac{dp}{p}$$

Плоскость p разрезана так же, как в п. 2; a_0 — малая положительная величина; введенная, чтобы гарантировать существование фурье-изображения θ , она будет устремлена к нулю, когда это станет удобно, так как (при $z > 0$)

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} \psi(a_0, x, z) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \psi(a_0, x, z) = 0$$

Применим преобразование Лапласа по x к функции θ , тогда из (3.1), (3.2) получим

$$(3.3) \quad ypf = \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2$$

$$(3.4) \quad \partial f / \partial y = 0 \quad z < 0, \quad f = \exp(-a_0 p^{1/3} z) / pz > 0, \quad y = 0$$

$$(3.5) \quad f \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty; \quad f \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty$$

Предположим далее, что последнее условие в (3.5) можно усилить:

$$(3.6) \quad f = O(\exp(b_0 p^{1/3} z)), \quad z \rightarrow -\infty$$

для всех y и некоторого вещественного числа $b_0 > 0$. Справедливость этой гипотезы будет подтверждена ниже.

Задача (3.3)–(3.6) решается методом Винера–Хопфа [14]. Совершая фурье-преобразование по z , из (3.3), удовлетворяя условию на бесконечности, получим

$$(3.7) \quad \Phi = \Phi_+ + \Phi_- = H(p, k) \text{Ai}(p^{-2/3}(yp + k^2))$$

$$\Phi_+ = \int_{-\infty}^0 f e^{-ikz} dz, \quad \Phi_- = \int_0^{\infty} f e^{-ikz} dz$$

где $\text{Ai}(s)$ — функция Эйри первого рода.

Из граничных условий при $y = 0$ и требования ограниченности можно вывести, что функция Φ_- аналитична в нижней полуплоскости ($\text{Im}(k) < < a_0 \text{Im}(ip^{1/3})$), а Φ_+ — в верхней полуплоскости ($\text{Im}(k) > -b_0 \text{Im}(ip^{1/3})$), величина p фиксирована, $p \neq 0$). Из (3.4), (3.7) получаем $y = 0$

$$(3.8) \quad \Phi = \Phi_+ - \frac{i}{p(k - ia_0 p^{1/3})} = H \text{Ai}(s)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_-}{\partial y} = H p^{1/3} \text{Ai}'(s), \quad s = k^2 p^{-2/3}$$

Исключая из (3.8) H , находим

$$(3.9) \quad \Phi_+ + \frac{1}{F} \frac{\partial \Phi_-}{\partial y} - \frac{i}{p(k - ia_0 p^{1/3})} = 0, \quad F = -p^{1/3} \frac{\text{Ai}'(s)}{\text{Ai}(s)}$$

Для решения уравнения (3.9) применим метод Винера–Хопфа. Так как нули $\text{Ai}(s)$, $\text{Ai}'(s)$ расположены в k -плоскости на прямой $k = ip^{1/3}t$ (t — действительный параметр), то, выбирая a_0 и b_0 меньшим, чем корень квадратный из абсолютного значения первого нуля $\text{Ai}'(s)$, получим, что каждый член в (3.9) определен и отличен в полосе $-b_0 \text{Im}(ip^{1/3}) < < \text{Im}(k) < a_0 \text{Im}(ip^{1/3})$. Далее найдем $\partial \Phi_- / \partial y$. С этой целью представим левую часть (3.9) как сумму двух функций, аналитических соответственно при $\text{Im}(k) > -b_0 \text{Im}(ip^{1/3})$ и $\text{Im}(k) < a_0 \text{Im}(ip^{1/3})$.

Пусть $F = F_+(k, p)F_-(k, p)$; функция F_+ (F_-) аналитична и не имеет нулей в верхней (нижней) k -полуплоскости (выражения для F_+ и F_- (факторизация F) будут получены ниже). Тогда (3.9) можно записать в виде

$$(3.10) \quad \Phi_+ F_+(k, p) - \frac{i(F_+(k, p) - F_+(ia_0 p^{1/3}, p))}{p(k - ia_0 p^{1/3})} =$$

$$= -\frac{1}{F_-(k, p)} \frac{\partial \Phi_-}{\partial y} + \frac{iF_+(ia_0 p^{1/3}, p)}{p(k - ia_0 p^{1/3})}$$

Предположим, что $\partial c/\partial y$ имеет интегрируемую по z особенность при $z \rightarrow 0 +$, тогда $\partial\Phi_-/\partial y \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$. Согласно принципу аналитического продолжения, существует целая функция $I(k, p)$, совпадающая с каждой из частей равенства (3.10) там, где эта часть определена. Она стремится к нулю для каждого фиксированного $p \neq 0$ при $k \rightarrow \infty$, поскольку как будет показано далее, $|F_{\pm}| = O(|k|^{1/2})$. По теореме Лиувилля, $I(k, p) \equiv 0$, поэтому

$$(3.11) \quad \frac{\partial\Phi_-}{\partial y} = \frac{iF_+(ia_0p^{1/3}, p) F_-(k, p)}{p(k - ia_0p^{1/3})}$$

Проведем факторизацию функции F . Пусть $-a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и $-a_n'$ ($n = 0, 1, \dots$) — нули функций $Ai(s)$ и $Ai'(s)$. Можно доказать, что

$$(3.12) \quad \frac{Ai'(k^2)}{Ai(k^2)} = - \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/3} e^{\gamma/3} (k^2 + a_0') \Pi_-(k) \Pi_+(k)$$

$$\Pi_{\pm} \equiv \Pi_{\pm}(k) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k \pm ia_n'^{1/2}}{k \pm ia_n^{1/2}} e^{-1/(6n)}$$

где γ — постоянная Эйлера.

Из (3.9), (3.12) следует, что

$$(3.13) \quad F_{\pm} = (23^{-1}\pi^{-1}e^{\gamma}p^{-1})^{1/3} (k \pm ia_0'^{1/2}p^{1/3}) \Pi_{\pm}(kp^{-1/3})$$

Заметим, что, пользуясь асимптотическим характером поведения нулей $-a_n'$, $-a_n$ при $n \rightarrow \infty$ [9], можно получить $\Pi_{\pm} = O(|k|^{-1/2})$, поэтому $F_{\pm} = O(|k|^{1/2})$ при $|k| \rightarrow \infty$. В силу (3.11), (3.13) имеем

$$(3.14) \quad \frac{\partial\Phi_-}{\partial y} = - \frac{Ai'(-a_0^2)}{Ai(-a_0^2)p} \frac{k - ia_0'^{1/2}p^{1/3}}{a_0 - a_0'^{1/2}} \frac{\Pi_-(kp^{-1/3})}{\Pi_-(ia_0)(k - ia_0p^{1/3})}$$

Для доказательства формулы (3.12) представим целые функции $Ai'(k^2)$ и $Ai(k^2)$ в виде бесконечного произведения. Пользуясь теоремой 2, гл. V, § 31 [15], получим (с учетом нумерации нулей $-a_n$, $-a_n'$) после перегруппировки сомножителей

$$(3.15) \quad \frac{Ai'(k^2)}{Ai(k^2)} = \frac{1}{A} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n'} e^{1/(6n)} \frac{k^2 + a_0'}{a_0'} \exp(-k^2 \Sigma_1) \Pi_- \Pi_+$$

$$A = \frac{Ai(0)}{Ai'(0)}, \quad \Sigma_1 = \frac{1}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n'} - \frac{1}{a_n} \right) + \frac{1}{a_0'}$$

Осталось заметить, что $\Sigma_1 = 0$. Для доказательства этого равенства рассмотрим (в смысле главного значения) интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{Ai'(\lambda^2)}{\lambda Ai(\lambda^2)} - \frac{\lambda Ai(\lambda^2)}{Ai'(\lambda^2)} \right) d\lambda = 0$$

и замкнем путь интегрирования в верхней половине λ -плоскости, а затем используем теорему о вычетах.

Итак, выражение (3.15) с точностью до постоянного множителя совпадает с (3.12), значение этого множителя можно определить устремляя k к бесконечности.

Вычислим диффузионный поток $\partial c/\partial y$ на поверхность вставки при $z > 0$. Совершим обратное фурье-преобразование функции $\partial\Phi_-/\partial y$:

$$(3.16) \quad j' = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Phi_-}{\partial y} e^{ikz} dk$$

Подставим (3.14) в (3.16) и замкнем путь интегрирования в верхней полуплоскости. Тогда, используя рассуждения как при доказательстве леммы Жордана [8], получим (устраивая a_0 к нулю)

$$(3.17) \quad j' = -\frac{1}{Ap^{2/3}} \left[1 - \frac{1}{\Pi_-(0) a_0'^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'^{1/2} - a_0'^{1/2}}{a_n'^{1/2}} \Pi^n \exp(-a_n'^{1/2} p^{1/3} z) \right]$$

$$\Pi^n = -i \lim_{k \rightarrow ia_n'^{1/2}} \Pi_-(k - ia_n'^{1/2})$$

Необходимо также проверить предположение (3.6). Предполагая достаточной проверку при $y = 0$, из (3.10) и (3.13) получим, что функция Φ_+ регулярна при $k = -ia_0 p^{1/3}$, но имеет бесконечное число полюсов в точках $-ia_n'^{1/2} p^{1/3}$. Замыкание контура интегрирования в нижней полуплоскости при вычислении обратного преобразования Фурье показывает, что при $z \rightarrow -\infty$

$$f = O(\exp(a_0'^{1/2} - \varepsilon) p^{1/3} z)$$

где ε — произвольное малое положительное число, что подтверждает (3.6).

Наконец, применим обратное преобразование Лапласа к функции j' :

$$(3.18) \quad j(x, z) = \frac{\partial c(x, 0, z)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} j' e^{px} dp, \quad b > 0$$

Подставив (3.17) в (3.18) и сделав замену переменных $q = p^{1/3} x^{1/3}$, получим (с учетом определения функции $\text{Ai}(s)$ через контурный интеграл [11])

$$(3.19) \quad J \equiv jx^{1/3} = -\frac{1}{A\Gamma(2/3)} - \frac{3^{1/2}}{|A|^{1/2}} \left(\frac{2e^\gamma}{\pi} \right)^{1/6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'^{1/2} - a_0'^{1/2}}{a_n'^{1/2}} \times$$

$$\times \Pi^n \text{Ai} \left(\frac{a_n'^{1/2} Z}{3^{1/3}} \right)$$

$$Z = zx^{-1/3}$$

В (3.19) было использовано равенство $\Pi_{\pm}(0) a_0'^{1/2} = (3\pi 2^{-1} e^{-\gamma})^{1/6} / |A|^{1/2}$, которое вытекает из (3.12) при $k = 0$.

Первый член в (3.19) в точности равен потоку, полученному в пограничном приближении (решение задачи (3.1) при $z > 0$ с опущенным членом $\partial^2 c / \partial z^2$); второй — описывает влияние трансверсальной (перпендикулярной к направлению движения потока) диффузии.

В силу достаточно сложного выражения для J ограничимся тем, что найдем главные члены асимптотического выражения для J при больших и малых Z .

Рассмотрим вначале случай малых Z , воспользовавшись асимптотическим разложением для a_n, a_n' при $n \rightarrow \infty$ и формулой суммирования Эйлера — Маклорена [10], из (3.19) получим

$$(3.20) \quad J = \frac{3^{5/6}}{|A|^{1/2} \pi^{1/3} Z^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\text{Ai}(t)}{t^{1/2}} dt + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(5/6) (\pi |A| Z)^{1/2}} + O(1) \approx \frac{0,4267}{Z^{1/2}} + O(1)$$

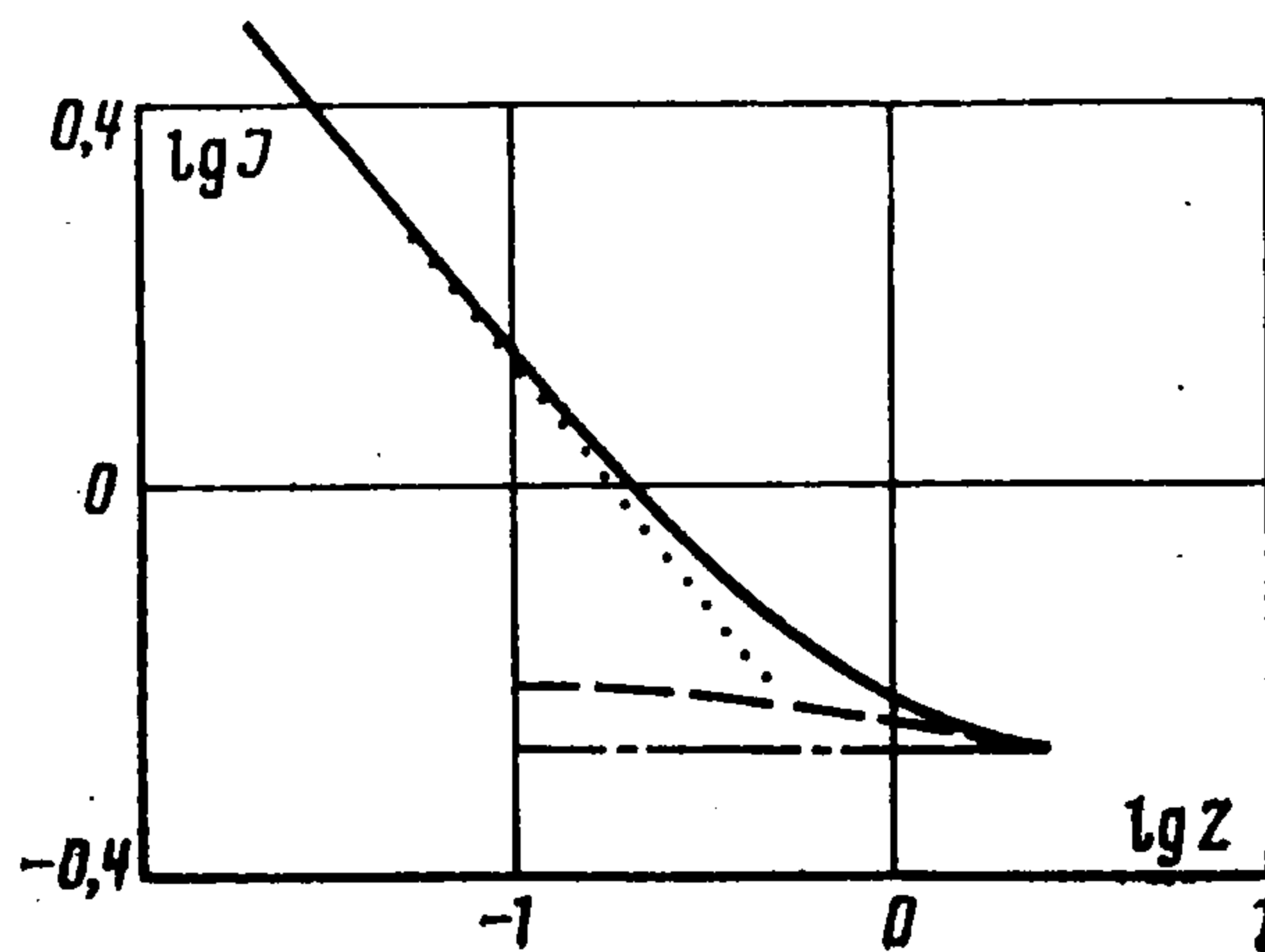
Выражение (3.20) подтверждает предположение об интегрируемости особенности при $z \rightarrow 0+$.

Для $Z \gg 1$ в силу монотонного увеличения a_n с ростом n и экспоненциального убывания $\text{Ai}(s)$ при больших действительных и положитель-

ных s имеем

$$(3.21) \quad J(Z) \sim -\frac{1}{A\Gamma(2/3)} - \left(\frac{3}{|A|}\right)^{1/2} \left(\frac{2e^\gamma}{\pi}\right)^{1/3} \frac{a_1^{1/2} - a_0^{1/2}}{a_1^{1/2}} \text{Pi}^1 \text{Ai}\left(\frac{a_1^{1/2}Z}{3^{1/3}}\right) \approx \\ \approx 0,5383 + 0,2552 \text{Ai}(1,0602Z), \quad Z \gg 1$$

На фиг. 2 приведен график зависимости $J(Z)$ в логарифмическом масштабе. Сплошная линия получена численным суммированием ряда (3.19), пунктирная линия представляет первый член разложения при малых Z — формула (3.20); штрихпунктирная линия соответствует погранслойному приближению; штриховая линия — разложение (3.21) для $Z \gg 1$. Видно, что ведущий член разложения (3.20) для малых $Z \leq 0,1$ (с точностью до 4%) совпадает с $J(Z)$; при $Z \gg 1$ (с точностью до 5%) $J(Z)$ описывается выражением (3.21). При $Z \gg 2$ происходит выход $J(Z)$ на погранслойное решение — отличие составляет менее 2%. Таким образом, область влияния трансверсальной диффузии при $z > 0$ приближенно ограничена кривой $z \leq 2x^{1/3}$.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков А. А., Полянский О. Ю., Агафонов В. П., Вертушкин В. К. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение. 1972. 344 с.
2. Springer S. G., Pedley T. J. The solution of heat-transfer problems by the Wiener — Hopf technique. I. Leading edge of hot film // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1973. V. 333. No. 1594. P. 347—362.
3. Springer S. G. The solution of heat-transfer problems by the Wiener — Hopf technique II. Trailing edge of hot film // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1974. V. 337. No. 1610. P. 395—442.
4. Попов Д. А. Задача с разрывными граничными условиями и приближение диффузионного погранслоя // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 109—117.
5. Брыкина И. Г. Аналитическое решение задачи о конвективной диффузии в окрестности разрыва каталитических свойств поверхности // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 244—251.
6. Ling S. C. Heat-transfer from a small isothermal spanwise strip on an insulated boundary // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat-transfer. 1963. V. 85. No. 3. P. 230—236.
7. Гершбейн Э. А., Крупа В. Г. Об учете продольной диффузии в окрестности разрыва каталитических свойств поверхности // Изв. АН СССР. МЖТ. 1986. № 7. С. 99—105.
8. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука. 1974. 542 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука. 1979. 830 с.
10. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби / Под ред. Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского. М.: Физматгиз. 1961. 439 с.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностр. лит. 1949. 799 с.
12. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
13. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир. 1983. 400 с.
14. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 279 с.
15. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1982. 488 с.