Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 532.529:534.1

ВОЛНЫ СЖАТИЯ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Беляев А. Ю.

Приводится доказательство справедливости волнового уравнения для жидкости с пузырьками газа, включающее смешанную производную четвертого порядка по времени и координате. В основу доказательства положено представление Блоха—Флоке с нахождением его параметров путем решения задачи на ячейке периодичности. Вывод о справедливости уравнения делается на основе тождественности дисперсионных соотношений.

Исследованию эффектов дисперсии и затухания волн при акустических колебаниях в жидкости с пузырьками газа посвящен ряд работ [1—3]. Из эвристических соображений было предложено [2, 3] уравнение, описывающее процессы распространения акустических волн в такой среде. Пренебрегая поверхностным натяжением и сжимаемостью жидкости, это уравнение можно привести к виду

$$3cp_{tt} = 3a^2\rho\rho_1^{-1}\Delta p + R^2\Delta p_{tt}$$

Здесь ρ_1 и ρ — плотности жидкости и газа, a — скорость звука в газе, R — радиус пузырьков, c — объемная концентрация газа, p — давление в смеси, Δ — оператор Лапласа. Наличие последнего члена в правой части выписанного уравнения приводит, согласно [2, 3], к дисперсии волн, а для волн с частотами, превышающими величину $aR^{-1}(3\rho\rho_1^{-1})^{1/2}$ — к экспоненциальному затуханию.

Цель данной работы — вывести это уравнение из модели, описывающей микроструктуру суспензии, с помощью теории осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [4]. Такой вывод, в отличие от феноменологического, позволяет указать связь между микро- и макроскопическими параметрами движения суспензии, а также оценить погрешность осредненного уравнения.

При конструировании модели микроструктуры предполагается периодичность расположения пузырьков в состоянии равновесия, что позволяет свести задачу осреднения к некоторой задаче на ячейке периодичности. Решение задачи на ячейке и коэффициенты осредненного уравнения выражены через специальные гармонические функции, представляющие собой обобщение на случай динамики функций Вейерштрасса.

1. Постановка задачи. Акустические волны в жидкости с пузырьками газа описываются уравнением

$$a^{-2}(x)\rho^{-1}(x)\varphi_{tt} = \nabla_\alpha\rho^{-1}(x)\nabla^\alpha\varphi \tag{1.1}$$

где $\varphi(x, t)$ — потенциал импульсов либо давление в среде, $\rho(x)$ и $a(x)$ — плотность и скорость звука в состоянии равновесия, около которого линеаризуются уравнения газовой динамики; индексы α пробегают значения 1, 2, 3, и по ним производится суммирование. В однородной жидкости с пузырьками однородного газа функции $\rho(x)$ и $a(x)$ — кусочно-постоянные и принимают значения ρ_1, a_1 и ρ, a в областях, занятых жидкостью и газом соответственно. На границах между жидкостью и газом при пренебрежении поверхностным натяжением следует считать непрерывными функцию φ и нормальную компоненту вектора $\rho^{-1}(x)\nabla\varphi$.

Предполагается, что все пузырьки в состоянии равновесия шаровые, имеют один и тот же радиус R и располагаются в пространстве периодически, т. е. их центры находятся в узлах периодической решетки с некоторыми образующими векторами τ_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Начало координат помещено в центр одного из пузырьков. Тогда центры остальных будут находиться в точках $x_m = m^\alpha\tau_\alpha$, где m^α — целые числа. Векторы τ_α являются периодами коэффициентов уравнения (1.1).

Рассматривается случай, когда характерный масштаб изменения начальных данных для уравнения (1.1) много больше расстояний между соседними пузырьками. В таком случае уравнение (1.1) допускает осреднение. Это свойство удобно сформулировать в терминах теории волн Блоха — Флоке [5, 6], т. е. решений уравнения (1.1) вида

(1.2) $$\varphi(x, t) = \Phi(x) \exp i(kx - \omega t)$$

где ω и k — частота и волновой вектор волны Блоха — Флоке, связанные дисперсионным соотношением, а $\Phi(x)$ — периодическая функция с той же ячейкой периодичности, что и коэффициенты уравнения (1.1).

Для нахождения частоты ω и блоховской функции Φ при заданном волновом векторе k после подстановки (1.2) в уравнение (1.1) получается самосопряженная спектральная задача, которой можно придать следующую вариационную формулировку [6]:

(1.3) $$\delta J(\chi) = 0$$

$$J(\chi) = \int\limits_B \rho^{-1}(x) |\nabla\chi|^2 d^3x \left(\int\limits_B a^{-2}(x) \rho^{-1}(x) |\chi|^2 d^3x\right)^{-1}$$

где B — ячейка периодичности коэффициентов уравнения. Функционал J определен на множестве комплекснозначных функций $\chi(x)$, удовлетворяющих условиям мультипликативности:

(1.4) $$\chi(x + \tau_\alpha) = \chi(x) \exp ik\tau_\alpha$$

Эти условия играют роль граничных условий для уравнений Эйлера вариационной задачи (1.3).

Стационарные значения функционала J совпадают с квадратами частот ω, соответствующих волновому вектору k, т. е. определяют дисперсионное соотношение, а стационарные точки $\chi(x)$ связаны с периодической блоховской функцией $\Phi(x)$ формулой

$$\chi(x) = \Phi(x) \exp ikx$$

У функционала J для каждого вещественного волнового вектора k имеется счетный набор стационарных значений, и дисперсионное соотношение распадается на счетный набор дисперсионных ветвей $\omega^2 = \omega_s^2(k)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$. Функции ω_s зависят от k четным образом и периодически с периодами ν_β, которые образуют базис в пространстве волновых векторов, взаимный к базису из векторов τ_α:

$$\nu_\beta \tau_\alpha = 2\pi\delta_{\alpha\beta}$$

Нижняя дисперсионная ветвь $\omega_0(k)$ проходит через точку $\omega = 0$, $k = 0$. Ее поведение в окрестности этой точки имеет непосредственное отношение к теории осреднения.

Справедлива следующая теорема. Пусть $L(\omega, k)$ — четный по ω и по k полином, такой, что $L(\omega_0(k), k) = O(|k|^N)$ при $k \to 0$. Пусть $\varphi^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1.1), в котором коэффициенты $\rho(x)$ и $a(x)$ заменены на $\rho(x/\varepsilon)$ и $a(x/\varepsilon)$, где ε — малый параметр, а начальные данные от ε не зависят. Тогда

$$L(i\varepsilon\partial/\partial t, i\varepsilon\nabla) \varphi^\varepsilon = O(\varepsilon^N)$$

при $\varepsilon \to 0$, где символ $O(\varepsilon^N)$ понимается в смысле сходимости распределений. Это означает, что если взять интегральную свертку φ^ε с любой финитной гладкой функцией $h(x, t)$ и подействовать на эту свертку оператором $\varepsilon^{-N}L$, то получится величина, равномерно ограниченная по x и по t при $\varepsilon \to 0$.

Сформулированная теорема — следствие из результатов работы [4]. Она позволяет заменять уравнение (1.1) с переменными коэффициентами уравнениями с любой степенью аппроксимации, коэффициенты которых постоянны. Аппроксимация нижней ветви дисперсионного соотношения полиномом второй степени $L(\omega, k) = \omega^2 - a^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta$ соответствует значению $N = 4$ и приводит к осредненному уравнению второго порядка — уравнению акустики с постоянными коэффициентами. Аппроксимации более высокого порядка позволяет получить уравнения, описывающие дисперсию волн. Таким образом, проблема осреднения сводится к решению задачи на ячейке, которая состоит в минимизации функционала J.

2. Упрощение задачи на ячейки. Для реальных жидкостей и газов как правило, выполняются неравенства

$$\rho \ll \rho_1, \quad a^2\rho \ll a_1{}^2\rho_1$$

позволяющие упростить проблему нахождения нижней ветви дисперсионного соотношения. Физически упрощения заключаются в том, что в главном приближении по этим параметрам жидкость можно считать несжимаемой, а давление в каждом пузырьке — постоянным по пространственным координатам. Выражение для функционала J при таких предположениях принимает вид

$$J = \frac{3a^2\rho}{4\pi R^3\rho_1 |\chi_0|^2} \int\limits_{B_1} |\nabla\chi|^2 d^3x$$

где B_1 — часть ячейки периодичности B, занятая жидкостью, а χ_0 — постоянное значение функции $\chi(x)$ в пузырьке, находящемся в B. Величина χ_0 влияет только на нормировку собственных функций $\chi(x)$ и в дальнейшем положена равной R^{-1}.

Правомерность принятых упрощений была доказана [7]. Следует отметить, что они допустимы только для вычисления нижней ветви дисперсионного соотношения. Для более высоких частот важны как сжимаемость жидкости, так и неравновесность газа в пузырьках. Кроме того, сжимаемостью жидкости нельзя пренебрегать при очень малых объемных концентрациях газа. Концентрация должна быть много больше величины $a^2\rho a_1{}^{-2}\rho_1{}^{-1}$, хотя может при этом оставаться много меньше единицы.

Вариационная задача (1.3) с упрощенным выражением для функционала J имеет, в отличие от исходной, единственную стационарную точку и сводится к нахождению комплекснозначной гармонической в области, занятой жидкостью, функции $\chi(x)$, удовлетворяющей условию мультипликативности (1.4) и принимающей значение $\chi_0 = R^{-1}$ на границе с одним из пузырьков.

3. Построение мультипликативной функции Грина. Предлагается следующий путь решения вариационной задачи (1.3). Пусть $\Gamma^k(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям мультипликативности и являющаяся решением уравнения Пуассона

$$\Delta\Gamma^k(x) = -4\pi\Sigma\delta(x - x_m)\exp ikx_m$$

где суммирование производится по центрам всех пузырьков x_m. Существование такой функции будет доказано ниже. Решение вариационной задачи (1.3) ищется в виде ряда

$$\chi(x) = C\Gamma^k(x) + \sum_{l=1}^{\infty} R^l C^{\alpha_1\ldots\alpha_l}\Gamma^k_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(x) \tag{3.1}$$

где C, $C^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ — постоянные, индексы $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ у функции $\Gamma^k(x)$ означают ее дифференцирование по координатам и по ним производится суммирование. Гармоничность и мультипликативность таким образом построенной функции $\chi(x)$ очевидны, если ряд (3.1) достаточно быстро сходится, а условию на границе с пузырьками можно удовлетворить выбором постоянных C, $C^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$.

Предложенный способ решения применялся [8—10] при осреднении периодических структур в статике и были построены периодические гармонические функции, через которые выражено решение задачи на ячейке. Их обобщением для задач динамики являются мультипликативные гармонические функции $\Gamma^k(x)$.

Доказательство существования функции $\Gamma^k(x)$ можно получить используя ее представление в виде одного из рядов Фурье

$$\Gamma^k(x) = \Sigma \frac{1}{|x - x_m|} \exp ikx_m$$

$$\Gamma^k(x) = \frac{4\pi}{|B|} \Sigma \frac{1}{|k - k_m|^2} \exp i(k - k_m)x$$

где $|B|$ — объем ячейки периодичности B. В первом из рядов производится суммирование по центрам всех пузырьков x_m, а во втором — по узлам взаимной решетки $k_m = m^\alpha \nu_\alpha$. Оба ряда условно сходятся, что доказывается, как и в [8], при помощи широко используемого приема: следует продифференцировать их почленно по x либо по k достаточное количество раз, чтобы получить абсолютно сходящиеся ряды, а затем восстановить $\Gamma^k(x)$ интегрированием.

Прямой подстановкой можно убедиться, что построенная при помощи этих рядов функция удовлетворяет уравнению Пуассона и условию мультипликативности (1.4). Сходимость обоих представлений нарушается при $x = x_m$ и $k = k_m$. При этих значениях аргументов $\Gamma^k(x)$ имеет особенности.

Для дальнейшего потребуются некоторые свойства функции $Q^k(x) = \Gamma^k(x) - |x|^{-1}$. Эта функция гармонична по x и периодична с периодами ν_α по k. Величина $Q^k(0)$ вещественна, четным образом зависит от k и при $k \to 0$ асимптотически ведет себя следующим образом:

$$Q^k(0) = \frac{4\pi}{|B||k|^2} - q\left(\frac{4\pi}{3|B|}\right)^{1/3} + O(|k|^2)$$

Постоянная q зависит от геометрии решетки и может быть определена численно. Для кубической, гранецентрированной и объемоцентрированной решеток $q \approx 1{,}8$.

4. Решение задачи на ячейке. Стационарная точка вариационной задачи (1.3) ищется в виде ряда (3.1). Выбор постоянных C, $C^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ заведомо неединствен, так как функции $\Gamma^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x)$ линейно зависимы: они симметричны по перестановкам индексов и их свертка по любой паре индексов равна нулю. Чтобы избавиться от такого произвола, следует постоянные $C^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$ подчинить таким же линейным связям. В этом случае можно однозначно определить эти постоянные, разлагая левую и правую части равенства (3.1) по сферическим гармоникам на сфере $|x| = R$. После умножения равенства (3.1) на $\nabla_{\beta_1} \ldots \nabla_{\beta_s} |x|^{-1}$ и интегрирования по сфере получится система линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка для определения постоянных C, $C^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}$. Эту систему можно привести к виду

$$(4.1) \qquad C + R\sum_{l=0}^{\infty} R^l C^{\alpha_1\ldots\alpha_l} Q^k_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(0) = 1$$

$$(4.2) \qquad C^{\beta_1\ldots\beta_s} + \frac{(-2)^s}{(2s)!} R^{s+1} \sum_{l=0}^{\infty} R^l C^{\alpha_1\ldots\alpha_l} Q^k_{\alpha_1\ldots\alpha_l\beta_1\ldots\beta_s}(0) = 0$$

где $s = 1, 2, 3, \ldots$, а греческие индексы у функции $Q^k(x)$ означают ее дифференцирование по координатам.

При $R = 0$ полученная система легко решается. При $R > 0$ предлагается следующий путь ее решения. Зафиксируем значение постоянной C и будем решать методом последовательных приближений систему уравнений (4.2) относительно $C^{\alpha_1\ldots\alpha_l}$, $l > 0$. В качестве нулевого приближения положим $C^{\alpha_1\ldots\alpha_l} = 0$ и подставим эти значения в (4.2) под знак суммирования. Тем самым определится первое приближение

$$C^{\beta_1\ldots\beta_s} = -[(-2)^s/(2s)!]R^{s+1}CQ^k_{\beta_1\ldots\beta_s}(0)$$

Затем подставим в (4.2) под знак суммирования найденные на предыдущем шаге значения постоянных, получим следующее приближение и так далее. Все приближения, начиная со второго, представляют собой бесконечные ряды по степеням R. Указанная процедура приводит к разложению в степенной ряд по радиусам пузырьков решения системы (4.2). Сходимость метода при достаточно малых R доказывается при помощи принципа сжатых отображений.

Постоянная C определяется из уравнения (4.1), в которое следует подставить решение системы (4.2). Если при этом ограничиться только нулевым приближением, то получится формула

$$(4.3) \qquad C = (1 + RQ^k(0))^{-1}$$

Ее относительная погрешность при $R \to 0$ составляет $O(R^4)$ при каждом фиксированном $k \neq k_m$ и $O(R^3)$ равномерно по k.

5. Анализ дисперсионного соотношения. Зная стационарную точку $\chi(x)$ функционала J, можно вычислить его стационарное значение. После интегрирования по частям и использования равенства (3.1) выражение для стационарного значения приводится к виду $\omega^2 = \Omega^2 C$, где $\Omega^2 = 3a^2\rho R^{-2}\rho_1^{-1}$, а постоянная C определяется из системы уравнений (4.2), (4.1) и зависит от волнового вектора k через коэффициенты этой системы. При достаточно малых концентрациях газа можно воспользоваться асимптотическим равенством (4.3) и получить приближенную формулу для дисперсионного соотношения:

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + RQ^k(0))^{-1}$$

Величина $Q^k(0)$ имеет особенность при $k = k_m$, поэтому частота ω обращается в нуль при $k = k_m$. При достаточно малых R частота ограничена сверху величиной порядка Ω.

Для частот, превышающих максимально возможное значение, не существует волн Блоха — Флоке, не растущих или не затухающих на бесконечности. Это означает, что возмущения с такими частотами не могут распространяться в среде без экспоненциально быстрого затухания. Аномальное увеличение декремента затухания для волн с частотами порядка Ω наблюдалось экспериментально [1].

Чтобы получить осредненное уравнение какого-либо порядка аппроксимации, необходимо, согласно сформулированной выше теореме, аппроксимировать дисперсионное соотношение полиномом в окрестности точки $\omega=0$, $k=0$. Ограничимся осредненным уравнением четвертого порядка. Учитывая разложение функции $Q^k(0)$ в особой точке, искомый полином четвертой степени можно представить в виде

$$L(\omega, k) = 3c\omega^2 - \Omega^2 R^2 |k|^2 + R^2 (1 - c^{1/3}q) |k|^2 \omega^2$$

Относительная погрешность, с которой вычислены коэффициенты этого полинома, составляет $O(c)$ при $c \to 0$. Если в последнем члене пренебречь величиной $c^{1/3}q$ по сравнению с единицей, то осредненное уравнение

$$L(i\partial/\partial t, i\nabla)\, \varphi(x, t) = 0$$

полностью совпадет с уравнением обсуждаемой феноменологической теории. Можно построить уточнения оператора L, как для бо́льших значений объемной концентрации газа, так и для бо́льших значений волнового вектора и частоты. Однако уточняющие члены зависят от типа периодической решетки центров пузырьков и, следовательно, не имеют прямого отношения к реальным суспензиям, в которых пузырьки располагаются хаотически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fox F. E., Curley S. R., Larson G. S.* Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1955. V. 27. No. 3. P. 534—539.
2. *Бэтчелор Г. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1968. № 3. С. 65—84.
3. *Накоряков В. Е., Покусаев И. Р., Шрейбер И. Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофиз. СО АН СССР. 1983. 237 с.
4. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т. 221. № 3. С. 516—519.
5. *Bloch F.* Uber die Quantenmechanik der Electronen in Kristallgittern // Z. Physik. 1928. B. 52. H. 7/8. S. 555—600.
6. *Бердичевский В. Л., Сутырин В. Г.* Динамика периодических структур // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 269. № 2. С. 324—329.
7. *Панасенко Г. П.* Осреднение периодической структуры с хорошо проводящими неоднородностями // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 4—11.
8. *Бердичевский А. Л., Бердичевский В. Л.* Обтекание идеальной жидкостью периодической системы тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 6. С. 3—18.
9. *Бердичевский А. Л.* Об эффективной теплопроводности тел с периодически расположенными включениями // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1979. Т. 247. № 6. С. 1363—1367.
10. *Бердичевский А. Л.* Об осредненном описании жидкости, содержащей пузырьки газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 72—79.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1987