

УДК 532.529

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Бобков Н. Н., Гупало Ю. П.

Исследуется рост (схлопывание) движущейся локальной неоднородности концентрации частиц в псевдоожигенном слое. Неоднородность моделируется сферическим пакетом частиц [1—3]. Масса пакета и распределение частиц по его объему остаются постоянными. Плотность твердой фазы считается большой по сравнению с плотностью ожимающей жидкости, межфазное взаимодействие — линейным по скорости относительного движения фаз. Анализируется простейшая модель, когда обмен частиц между пакетом и слоем отсутствует.

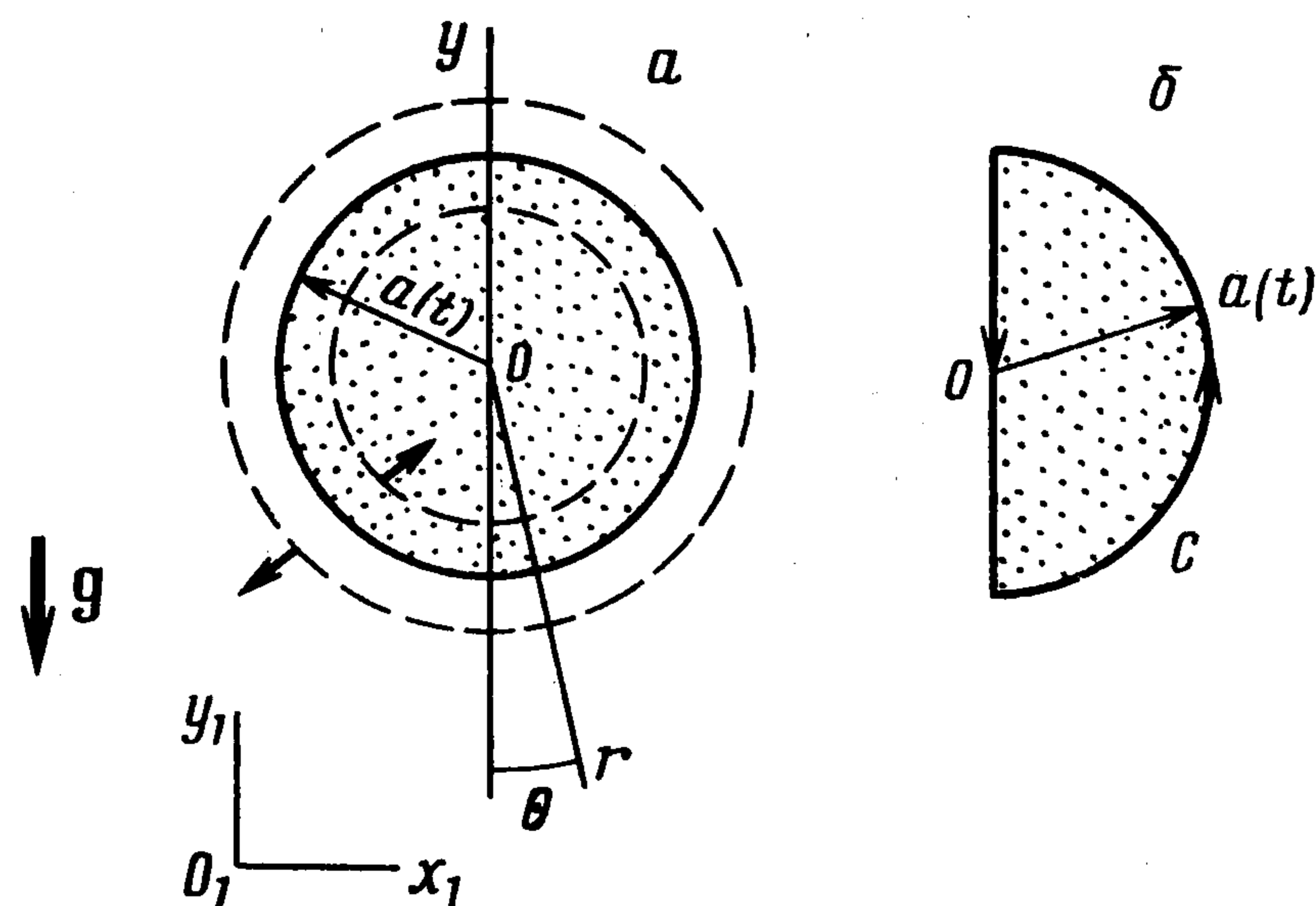
В результате приближенного решения задачи о движении пакета переменного радиуса получена система уравнений, связывающих изменение размера пакета со скоростью его перемещения в слое и скоростью циркуляции в нем дисперсной фазы. Найдены поля скоростей и давлений вне и внутри пакета, определены стационарные состояния системы. Показано, что в отличие от пузырей, для которых всегда имеется единственное стационарное состояние [4, 5], число стационарных состояний пакета может меняться в зависимости от физических параметров псевдоожигенной системы.

Возмущения, обусловленные движением неоднородностей концентрации твердой фазы в псевдоожигенном слое, являются, как известно [6—8], важным фактором, определяющим эффективность процессов массо- и теплообмена. Квазистационарные движения пакетов рассматривались ранее [1—3].

1. Формулировка задачи. Введем неинерциальную сферическую систему координат, связанную с центром пакета радиуса $a(t)$ и полярной осью, совпадающей по направлению с вектором ускорения силы тяжести (фиг. 1, a); скорость движения пакета в лабораторной системе отсчета $x_1O_1y_1$ равна $U_d(t)$. На основании перечисленных допущений в рамках модели взаимопроникающих идеальных жидкостей запишем систему уравнений движения и неразрывности жидкой и твердой фаз вне и внутри пакета

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & r > a(t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = -k(\varepsilon) \nabla p_f(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0 \\
 & d_s \rho [\partial/\partial t + \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \nabla] \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \\
 & = -\nabla [p_f(\mathbf{r}, t) + p_s(\mathbf{r}, t)] \pm d_s \rho U_d'(t) \mathbf{g}/g + d_s \rho \mathbf{g} \\
 & \nabla \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varepsilon + \rho = 1 \\
 & r < a(t), \quad \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) - \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = -k'[\varepsilon'(t)] \nabla p_f'(\mathbf{r}, t) \\
 & \partial \varepsilon'(t)/\partial t + \varepsilon'(t) \nabla \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = 0 \\
 & d_s \rho'(t) [\partial/\partial t + \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) \nabla] \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = \\
 & = -\nabla [p_f'(\mathbf{r}, t) + p_s'(\mathbf{r}, t)] \pm d_s \rho'(t) U_d'(t) \mathbf{g}/g + d_s \rho'(t) \mathbf{g} \\
 & \partial \rho'(t)/\partial t + \rho'(t) \nabla \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = 0 \\
 & \varepsilon'(t) + \rho'(t) = 1
 \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{v} , \mathbf{w} ; p_f , p_s ; ε , ρ — локально усредненные скорости, давления и объемные концентрации ожимающего агента (плотность d_f) и дисперсных частиц (плотность d_s , $d_f/d_s \ll 1$) соответственно; $k(\varepsilon)$ — проницаемость псевдоожигенного слоя [9]; \mathbf{g} — ускорение силы тяжести. Штрихом отмечены параметры двухфазного течения внутри пакета. В третьем и седь-



Фиг. 1

мом уравнениях (1.1) члены, пропорциональные $\pm U_d(t)$, описывают силу инерции, действующую на единицу объема дисперсной фазы в выбранной неинерциальной системе координат. Здесь и везде далее, где это не оговорено особо, при чередовании знаков верхний знак соответствует всплывающему пакету ($\rho'(t) > \rho$), нижний — погружающемуся пакету ($\rho'(t) < \rho$), $U_d(t) = |U_d(t)|$.

В рассматриваемой неинерциальной системе координат граничные условия на поверхности пакета [10—12] запишем в виде

$$(1.2) \quad r = a(t), \quad w_r - D = w_r' - D = 0, \quad \varepsilon(v_r - D) = \varepsilon'(v_r' - D) \\ p_f = p_f', \quad p_s' - p_s = d_s[\rho(w_r^2 - D^2) - \rho'(w_r'^2 - D^2)] = 0$$

Первые два из них — условия непротекания дисперсной фазы через поверхность пакета, третье выражает сохранение потока жидкой фазы на разрыве, два последних — условия баланса нормальных напряжений в жидкой и твердой фазах соответственно. При записи последнего условия учтены первое и второе.

В соотношениях (1.2) D — скорость движения разрыва концентрации частиц (скорость перемещения поверхности пакета) в координатной системе, движущейся вместе с центром пакета. Уравнение поверхности разрыва имеет вид $F(r, \theta, \varphi, t) \equiv r - a(t) = 0$. Таким образом, $\mathbf{D} = -\mathbf{i}_r (\partial F / \partial t) / |\nabla F| = \mathbf{i}_r a'(t)$ (\mathbf{i}_r — единичный вектор в радиальном направлении), откуда $D = |\mathbf{D}| = a'$.

Потребуем также, чтобы потоки фаз вдали от пакета были однородны, а их скорости — ограничены во всей области течения.

В частном случае отсутствия частиц в пакете ($\rho'(t) = 0$) принятая постановка соответствует задаче о росте (схлопывании) пузыря в псевдооживленном слое, рассмотренной в [4, 5]. Как показывают эксперименты [7, 8], наряду с перемещением пузырей движения образований типа пакетов (сгустков, роев) частиц в известных условиях являются важным элементом картины межфазного взаимодействия и могут существенно влиять на массо- и теплообменные показатели неоднородной псевдооживленной системы. Описанная в п. 1 постановка позволяет исследовать характеристики простейших нестационарных движений пакетов частиц в зависимости от ряда параметров системы, к числу которых добавляются, по сравнению с пузырями, суммарная масса частиц, составляющих пакет, и интенсивность их внутренней циркуляции. В частности, проводимый ниже анализ

показывает, что указанные параметры определяют характер и количество стационарных состояний пакета. Известно [4], что для пузыря имеется единственное стационарное состояние с радиусом a_* , причем если $a(t) > a_*$, то пузырь растёт, а при $a(t) < a_*$ — схлопывается.

Отметим также, что принятая постановка задачи о нестационарном движении пакетов может быть распространена на псевдооживленные системы крупных частиц, когда межфазное взаимодействие нелинейно [5].

2. Поля скоростей и распределения давлений фаз] вне и внутри пакета. Рассмотрим случай, когда движение дисперсной фазы вне пакета потенциально: $w(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi_s(\mathbf{r}, t)$. Тогда, как следует из четвертого уравнения (1.1), потенциал $\varphi_s(\mathbf{r}, t)$ — гармоническая функция

$$(2.1) \quad \Delta \varphi_s(\mathbf{r}, t) = 0$$

удовлетворяющая условиям

$$(2.2) \quad \begin{aligned} r = a, \quad \partial \varphi_s(\mathbf{r}, t) / \partial r = w_r(\mathbf{r}, t) = a \dot{a} \\ r \rightarrow \infty, \quad \varphi_s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi_s^\circ(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

где $\varphi_s^\circ(\mathbf{r}, t)$ — потенциал однородного на бесконечности течения.

Решение задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$(2.3) \quad \varphi_s(\mathbf{r}, t) = \pm U_d(t) \left(1 + \frac{a^3(t)}{2r^3} \right) r \cos \theta - \frac{a^2(t) a \dot{a}}{r}$$

Из уравнения неразрывности твердой фазы внутри пакета получаем $\nabla w' = (\partial \varepsilon'(t) / \partial t) / (1 - \varepsilon'(t)) \equiv \zeta(t)$. Построим частное решение нестационарной задачи (1.1), (1.2) в предположении, что поле течения твердой фазы внутри пакета является суперпозицией решения соответствующей квазистационарной задачи и течения, отвечающего однородному расширению (сжатию) пакета со скоростью $a \dot{a}$, т. е. представим вектор скорости частиц внутри пакета в виде суммы

$$(2.4) \quad w'(\mathbf{r}, t) = w_1'(\mathbf{r}, t) + w_2'(\mathbf{r}, t)$$

При этом $\nabla w_1' = 0$ и поле скоростей w_1' соответствует сферическому вихрю Хилла с текущим радиусом $a(t)$, а вектор w_2' имеет только радиальную составляющую, причем $\nabla w_2' = \zeta(t)$.

Функция тока, соответствующая полю скорости w_1' , имеет вид

$$(2.5) \quad \psi_s'(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{3U_d'(t)}{4a^2(t)} r^2 (r^2 - a^2(t)) \sin^2 \theta$$

где знак определяет направление скорости твердой фазы внутри пакета (верхний знак соответствует внутренней циркуляции, направленной в центре пакета против вектора g , нижний — циркуляции противоположного направления), а параметр $U_d'(t)$ характеризует интенсивность движения частиц в пакете. Так, циркуляция скорости твердой фазы по замкнутому «жидкому» контуру C , изображенному на фиг. 1, б, равна $\mp 5U_d'(t) a(t)$, причем соответствие знаков то же, что и в формуле (2.5).

Из уравнения неразрывности твердой фазы внутри пакета получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_{2r}') = \zeta(t)$$

т. е.

$$(2.6) \quad w_{2r}' = \frac{r\zeta(t)}{3} + \frac{A}{r^2}, \quad A = \text{const}$$

Из условия ограниченности скорости w' следует $A = 0$. Проверим выполнение условия непротекания твердой фазы на границе пакета. Очевидно, $w_r' |_{r=a} = w_{2r}' |_{r=a}$ ($w_{1r}' |_{r=a} = 0$; $\psi_s' |_{r=a} = 0$). Из условия

сохранения массы пакета имеем $a_0^3 \rho_0' = a^3(t) \rho'(t)$, где a_0, ρ_0' — некоторые начальные значения радиуса пакета и объемной концентрации твердых частиц в нем. Таким образом,

$$\rho'(t) = 1 - \varepsilon'(t) = \frac{\rho_0' a_0^3}{a^3(t)}, \quad \frac{\partial \varepsilon'(t)}{\partial t} = - \frac{\partial \rho'(t)}{\partial t} = \frac{3\rho_0' a_0^3 \dot{a}(t)}{a^4(t)}$$

$$\zeta(t) = 3\dot{a}(t)/a(t)$$

Следовательно, $w_r' |_{r=a} = w_{2r}' |_{r=a} = a(t) \zeta(t)/3 = \dot{a}(t)$.

Принятая модель расширения (сжатия) пакета совместна с уравнением движения твердой фазы внутри него лишь при выполнении условия

$$(2.7) \quad U_d \dot{a} + U_d' \dot{a} = (U_d' a)' = 0$$

Условие (2.7) имеет смысл сохранения масштаба $\Gamma = U_d' a$ циркуляции скорости дисперсной фазы в пакете. Циркуляция скорости частиц вдоль произвольного жидкого контура, проведенного внутри пакета, сохраняется при этом вследствие справедливости теоремы Томсона в принятой модели фаз как идеальных жидкостей.

Перейдем к определению полей давления жидкой и твердой фазы. В результате применения операции дивергенции к уравнениям движения оживающего агента с учетом уравнений неразрывности вне и внутри пакета получаем для давлений жидкой фазы уравнения

$$(2.8) \quad \begin{aligned} r > a(t), \quad \Delta p_f(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ r < a(t), \quad \Delta p_f'(\mathbf{r}, t) &= \chi(t) = \frac{\partial \varepsilon'(t)/\partial t}{\varepsilon'(t) \rho'(t) k'[\varepsilon'(t)]} \end{aligned}$$

Решение первого уравнения (2.8) представим в виде ряда по полиномам Лежандра

$$(2.9) \quad p_f(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) P_{n-1}(\cos \theta) r^{-n} a^{n+1} + p_{f\infty}$$

При записи ряда (2.6) учтено, что вдали от пакета взвешенный слой однороден и $(\partial p_f / \partial y) |_{r \rightarrow \infty} = d_s \rho g r \cos \theta = (v_0/k(\varepsilon)) r \cos \theta$, где v_0 — скорость псевдооживления; $p_{f\infty}$ — давление жидкой фазы в экваториальной плоскости пакета на удалении от него; $y = -r \cos \theta$.

Решение второго уравнения (2.8) будем искать в виде

$$(2.10) \quad p_f'(\mathbf{r}, t) = p_{f1}'(\mathbf{r}, t) + p_{f2}'(\mathbf{r}, t)$$

Здесь $p_{f1}'(\mathbf{r}, t)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая на поверхности пакета условию непрерывности нормальных напряжений в жидкой фазе (четвертое условие (1.2)):

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Delta p_{f1}'(\mathbf{r}, t) &= 0, \quad p_{f1}'(\mathbf{r}, t) |_{r=a} = p_f'(\mathbf{r}, t) |_{r=a} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) a(t) P_m(\cos \theta') \\ C_0(t) &= p_{f\infty}/a(t) + B_1(t), \quad C_1(t) = B_2(t) + v_0/k(\varepsilon), \quad C_2(t) = \\ &= B_3(t), \dots \end{aligned}$$

(θ' — угловая координата переменной точки на сфере $r = a(t)$).

Второе слагаемое в (2.10) представляет собой решение уравнения Пуассона с нулевым граничным условием

$$(2.12) \quad \Delta p_{f2}'(\mathbf{r}, t) = \chi(t), \quad p_{f2}'(\mathbf{r}, t) |_{r=a} = 0$$

Функции $B_n(t)$ подлежат определению из граничных условий.

Применяя разложение решения уравнения Лапласа по сферическим функциям и произведя интегрирование по поверхности пакета с учетом

граничного условия в (2.11), находим

$$p_{f1}'(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a(t) C_m(t) \left(\frac{r}{a(t)}\right)^m P_m(\cos \theta)$$

Используя далее функцию Грина первой краевой задачи для уравнения Пуассона в шаровой области $0 \leq r \leq a(t)$, получаем решение задачи (2.12) в виде

$$p_{f2}'(\mathbf{r}, t) = \chi(t) (r^2 - a^2(t))/6$$

Таким образом, распределение давления жидкой фазы внутри пакета имеет вид

$$(2.13) \quad p_f'(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a(t) C_m(t) \left(\frac{r}{a(t)}\right)^m P_m(\cos \theta) + \chi(t) \frac{r^2 - a^2(t)}{6}$$

Дифференцируя соотношения (2.6), (2.10) и используя условия непрерывности потока жидкой фазы через поверхность пакета, получаем окончательно

$$(2.14) \quad p_f(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} r \cos \theta + B_1(t) \frac{a^2}{r} + B_2(t) \frac{a^3}{r^2} \cos \theta + p_{f\infty}$$

$$p_f'(\mathbf{r}, t) = a(t) B_1(t) + \left[B_2(t) + \frac{v_0}{k(\varepsilon)} \right] r \cos \theta +$$

$$+ \chi(t) \frac{r^2 - a^2(t)}{6} + p_{f\infty}$$

$$B_1(t) = -\frac{a'(t)}{\varepsilon k(\varepsilon)}, \quad B_2(t) = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} \frac{\varepsilon k(\varepsilon) - \varepsilon'(t) k'[\varepsilon'(t)]}{2\varepsilon k(\varepsilon) + \varepsilon'(t) k'[\varepsilon'(t)]}$$

В стационарном случае $B_1 = 0$, а в выражении для B_2 величина $\varepsilon' = \text{const}$, что совпадает с результатом, полученным ранее [1].

Поля течения жидкой фазы вне и внутри пакета определяются из соответствующих уравнений движения при помощи полученных распределений давлений (2.14) и построенных полей течения дисперсной фазы (2.3)—(2.6).

3. Связь скорости движения пакета с законом его роста (схлопывания) и интенсивностью внутренней циркуляции твердой фазы. В связи с предположением о сферической форме пакета условию непрерывности давления твердой фазы на его поверхности можно удовлетворить лишь приближенно, в окрестности лобовых точек пакета ($\theta = 0$ для погружающегося и $\theta = \pi$ — для всплывающего пакета). Напомним, что аналогичная ситуация имеет место и в задачах о движении газового пузыря в идеальной жидкости [13] и в псевдооживленном слое [14, 15].

Распределения давлений дисперсной фазы по поверхности пакета, соответствующие построенным полям течения твердых частиц и давления жидкой фазы, имеют вид

$$(3.1) \quad p_s(\mathbf{r}, t)|_{r=a} = \frac{d_s \rho}{2} \left(U_d^2 - a'^2 - \frac{9}{4} U_d^2 \sin^2 \theta \right) -$$

$$- d_s \rho \left(\pm \frac{3}{2} a U_d' \cos \theta \pm \frac{3}{2} a' U_d \cos \theta - 2a'^2 - a a'' \right) +$$

$$+ p_{f\infty} + p_{s\infty} - p_f(\mathbf{r}, t)|_{r=a} + d_s \rho \left(\pm \frac{U_d'}{g} + 1 \right) g a \cos \theta$$

$$p_s'(\mathbf{r}, t)|_{r=a} = p_{s0}'(t) + d_s \rho'(t) \left[\left(\pm \frac{U_d'}{g} + 1 \right) g a \cos \theta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(a'^2 + \frac{9}{4} U_d'^2 \sin^2 \theta \right) - \frac{a a'' - a'^2}{2} \right] - p_f'(\mathbf{r}, t)|_{r=a}$$

Здесь $p_{s\infty}$ — давление твердой фазы на бесконечности, а функция $p_{s0}'(t)$ определяется из условия $p_s'(r, t)|_{r=0} = 0$, которое приводит к соотношению

$$p_{s0}'(t) = -(\varepsilon k)^{-1}/a(t)a'(t) + p_{f\infty}$$

При $\theta \approx \pi$ и $\theta \approx 0$ обозначим $\sin^2 \theta = \delta$. Тогда $\cos \theta = \mp 1 \pm \delta/2 + O(\delta^2)$. Ограничиваясь членами нулевого и первого порядков в разложении по δ величины скачка давления дисперсной фазы на границе пакета

$$[p_s] = p_s'(r, t)|_{r=a} - p_s(r, t)|_{r=a}$$

с учетом условия сохранения масштаба циркуляции твердой фазы внутри пакета (2.7), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих изменение размера пакета $a(t)$, скорость его движения в слое $U_d(t)$ и характерную скорость циркулирования в нем дисперсных частиц $U_d'(t)$:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} U_d'' a + U_d' a' &= 0 \\ \left(1 - \frac{\rho'}{2\rho}\right) a a'' - \frac{a a'}{\varepsilon k \rho d_s} - \frac{3}{2} a'^2 - \frac{9}{4} \left[\frac{\rho'}{\rho} U_d'^2 - U_d^2\right] - \\ &- \frac{U_d^2}{2} - \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} = 0 \\ \pm \left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right) \left(\pm \frac{U_d'}{g} + 1\right) g a + \frac{3}{2} (a U_d' + a' U_d) - \\ &- \frac{9}{4} \left[\frac{\rho'}{\rho} U_d'^2 - U_d^2\right] = 0 \end{aligned}$$

Переходя в двух последних уравнениях (3.2) к пределу при $\rho'(t) \rightarrow 0$, получаем (нужен верхний знак)

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} a' U_d + \frac{1}{2} a U_d' + \frac{9}{4} U_d^2 &= g a \\ - a a'' - \frac{3}{2} a'^2 - \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} + \frac{7}{4} U_d^2 &= \frac{a a'}{\varepsilon k \rho d_s} \end{aligned}$$

что в приближении линейного межфазного взаимодействия совпадает с системой уравнений движения и скорости роста пузыря, рассматривавшейся в [5].

Система уравнений (3.2) имеет стационарное решение $\rho' = \rho_*$, $a = a_*$, $U_d = U_{d*}$, $U_d' = U_{d*}'$, причем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} U_{d*}' a_* &= \Gamma = \text{const}, \quad - \frac{9}{4} \left(\frac{\rho_*'}{\rho} U_{d*}'^2 - U_{d*}^2\right) = \frac{U_{d*}^2}{2} + \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} \\ \pm \left(\frac{\rho_*'}{\rho} - 1\right) g a_* + \frac{U_{d*}^2}{2} + \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} &= 0 \end{aligned}$$

Исключая из второго уравнения (3.3) масштаб скорости внутренней циркуляции дисперсной фазы U_{d*}' и скорость движения пакета U_{d*} , получаем уравнение шестой степени для определения стационарного размера пакета a_* ($M = 4/3 \pi a_*^3 \rho_*' d_s$ — масса пакета)

$$(3.4) \quad a_*^6 \mp \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho g} a_*^5 - \frac{3M}{4\pi \rho d_s} a_*^3 \mp \frac{27}{56} \frac{M \Gamma^2}{\pi \rho d_s g} = 0$$

Соответствующие установившиеся скорости таковы:

$$(3.5) \quad U_{d*}' = \frac{\Gamma}{a_*}, \quad U_{d*} = \frac{2}{\sqrt{7}} \left(\frac{p_{s\infty}}{d_s \rho}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{27}{16} \frac{M \Gamma^2}{\pi p_{s\infty} a_*^5}\right)^{1/2}$$

В предельном случае $M = 0$ (пузырь) из соотношений (3.4), (3.5) следует

$$a_* = \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho g}, \quad U_{d*} = \frac{2}{\sqrt{7}} \left(\frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} \right)^{1/2}$$

что соответствует результатам [4, 5].

Таким образом, стационарный размер пакета зависит как от параметров псевдооживленной системы, так и от суммарной массы составляющих его частиц и величины циркуляции твердой фазы внутри него. Стационарный радиус пакета должен удовлетворять условиям

$$(3.6) \quad \begin{aligned} a_{*1} < a_{*2} < a_*, \quad \rho_*' < \rho \\ a_{*1} \leq a_* < a_{*2}, \quad \rho_*' > \rho \end{aligned}$$

Здесь a_{*1} — минимальный возможный радиус пакета фиксированной массы: $\rho_*' = 1$, $a_{*1}^3 = 3M/(4\pi d_s)$; a_{*2} — радиус, при котором данная масса частиц сформирована в пакет с плотностью, равной плотности однородной части слоя $\rho_*' = \rho$, $a_{*2}^3 = 3M/(4\pi \rho d_s)$.

Рассмотрим вопрос о количестве стационарных состояний пакета частиц в ряде частных случаев, когда уравнение (3.4) упрощается.

Случай $P_{s\infty} = 0$, $\rho \neq 0$. Это условие соответствует предположению об отсутствии взаимных столкновений твердых частиц в области однородного псевдооживления и является более слабым, чем аналогичные условия, принимавшиеся, например, в [10, 16]. В рассматриваемом случае количество стационарных размеров пакета определяется величиной единственного безразмерного параметра $\kappa = 7/8 Mg / (\pi d_s \Gamma^2)$ и концентрацией твердой фазы в области однородного слоя. Соответствующие диаграммы представлены для всплывающих пакетов ($\rho_*' < \rho$) на фиг. 2, а и для погружающихся пакетов ($\rho_*' > \rho$) на фиг. 2, б. Как показывает анализ уравнения (3.4), для всплывающего пакета при любых массе M и масштабе внутренней циркуляции Γ имеется единственное стационарное состояние. Условимся различные комбинации определяющих параметров системы изображать в виде точек плоскости ρ , κ . Тогда при $\rho_*' < \rho$ в каждой точке полосы $\Pi_\kappa = \{\kappa > 0, 0 < \rho < 1\}$ имеется единственный стационарный размер пакета, удовлетворяющий первому условию (3.6), $a_*^3 = (a_{1*}^3/(2\rho))(1 + \sqrt{1 + 4\rho/\kappa})$.

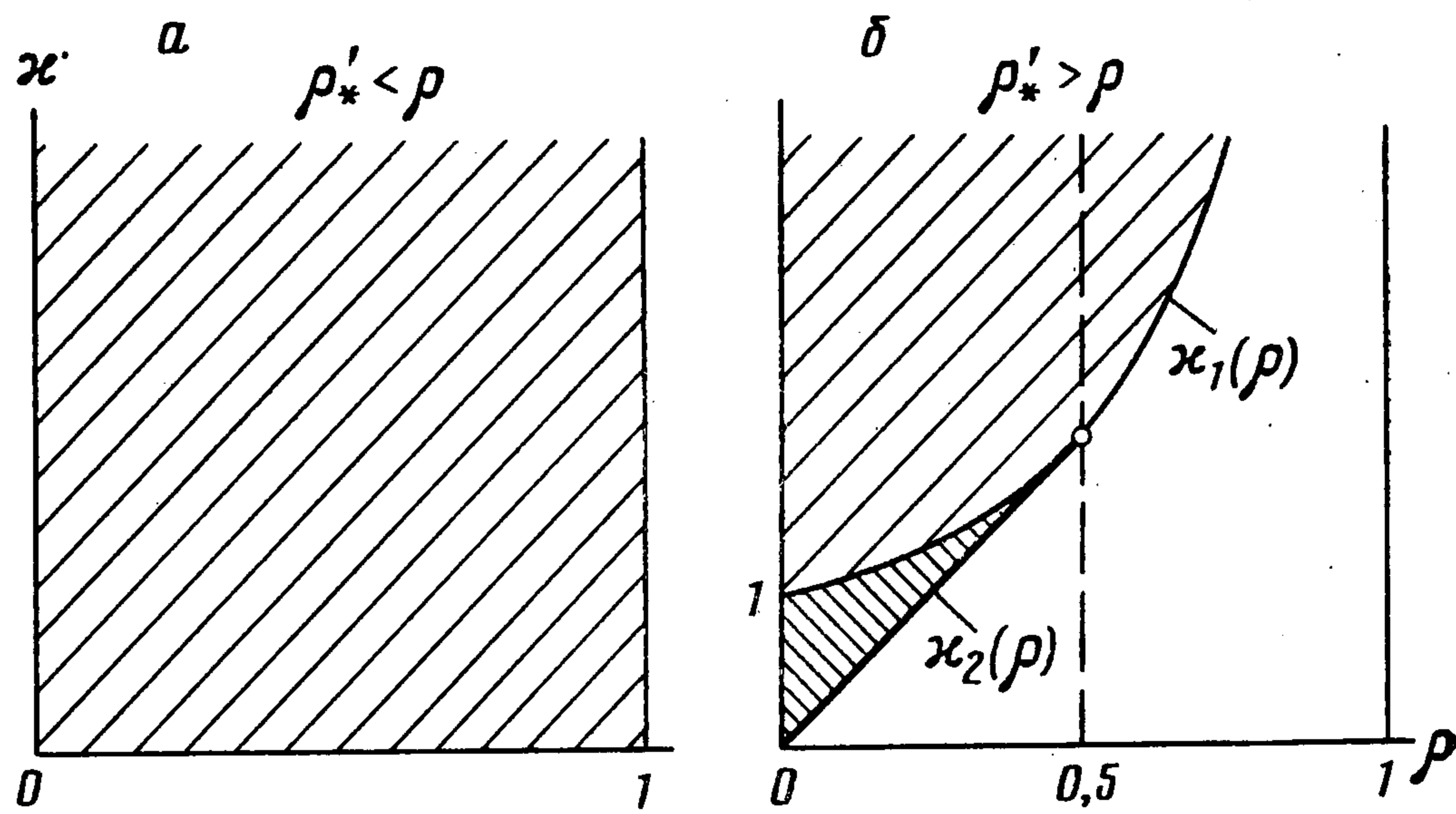
Диаграмма качественно меняется для погружающихся пакетов. В этом случае при $0 < \rho < 0,5$ возможны два стационарных состояния пакета, удовлетворяющих второму условию (3.6). Стационарные радиусы пакета выражаются соотношениями

$$a_{*max}^3 = \frac{a_{1*}^3}{2\rho} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\rho}{\kappa}} \right), \quad a_{*min}^3 = \frac{a_{1*}^3}{2\rho} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho}{\kappa}} \right)$$

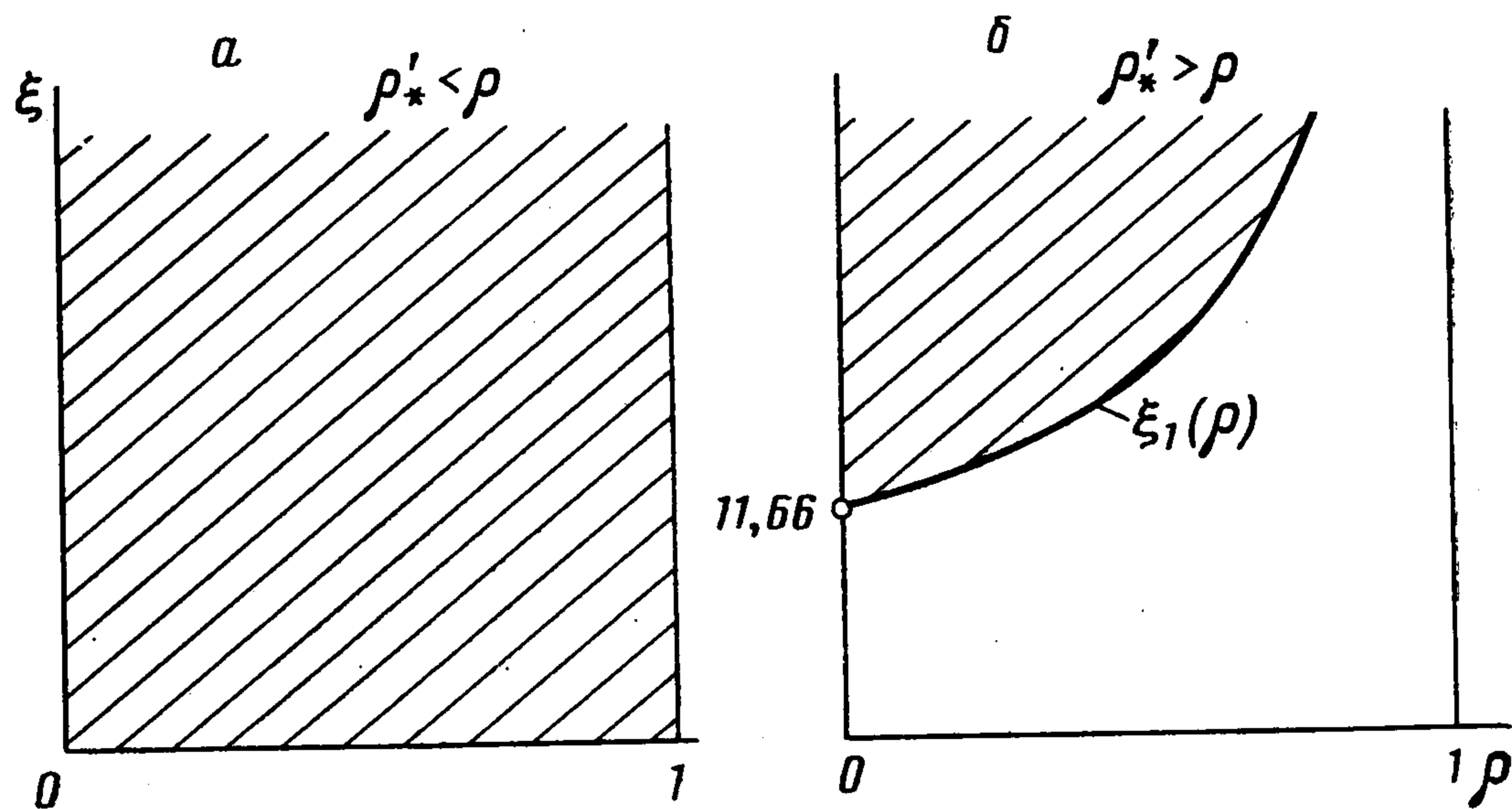
Соответствующая область в полуполосе $\{\kappa > 0, 0 < \rho < 0,5\}$ лежит между гиперболой $\kappa_1(\rho) = 1/(1 - \rho)$ и прямой $\kappa_2(\rho) = 4\rho$ (фиг. 2, б). Эта область граничит снизу с областью значений параметров, в которой погружающийся пакет не имеет стационарного размера, а сверху — с областью, в которой стационарное состояние единственно, причем $a_* = a_{*max} > a_{1*}$ ($a_{*min} < a_{1*}$).

В случае плотного однородного слоя ($0,5 < \rho < 1$) полуполоса $\{\kappa > 0, 0,5 < \rho < 1\}$ распадается на две области. Точки, расположенные ниже кривой $\kappa_1(\rho)$, соответствуют отсутствию у пакета с параметрами M , Γ стационарных размеров. Область выше $\kappa_1(\rho)$ изображает псевдооживленные системы, в которых погружающийся пакет может находиться в единственном стационарном состоянии $a_* = a_{*max}$.

Таким образом, параметры M , Γ влияют на количество стационарных состояний лишь в случае погружающихся пакетов, т. е. при $\rho_*' > \rho$. Менее плотные по отношению к окружающему слою пакеты аналогично пузырям [4, 5] имеют единственный стационарный размер. Этот вывод остается в силе и для рассматриваемых ниже случаев.



Фиг. 2



Фиг. 3

Случай $\Gamma = 0$, $\rho \neq 0$. Это условие означает отсутствие циркуляции твердой фазы внутри пакета. В данном случае количество стационарных состояний погружающегося пакета определяется как концентрацией ρ дисперсных частиц в однородном слое, так и значением безразмерного параметра $\xi = (3M/(16\pi d_s)) / (5p_{s\infty}/(14d_s g))^3$, характеризующего суммарную массу составляющих пакет частиц. Соответствующие диаграммы в плоскости ρ, ξ представлены на фиг. 3: а) $\rho_*' < \rho$, б) $\rho_*' > \rho$. В последнем случае полоса $\Pi_\xi = \{\xi > 0, 0 < \rho < 1\}$ состоит из двух областей с различным количеством стационарных состояний пакета. Именно, при

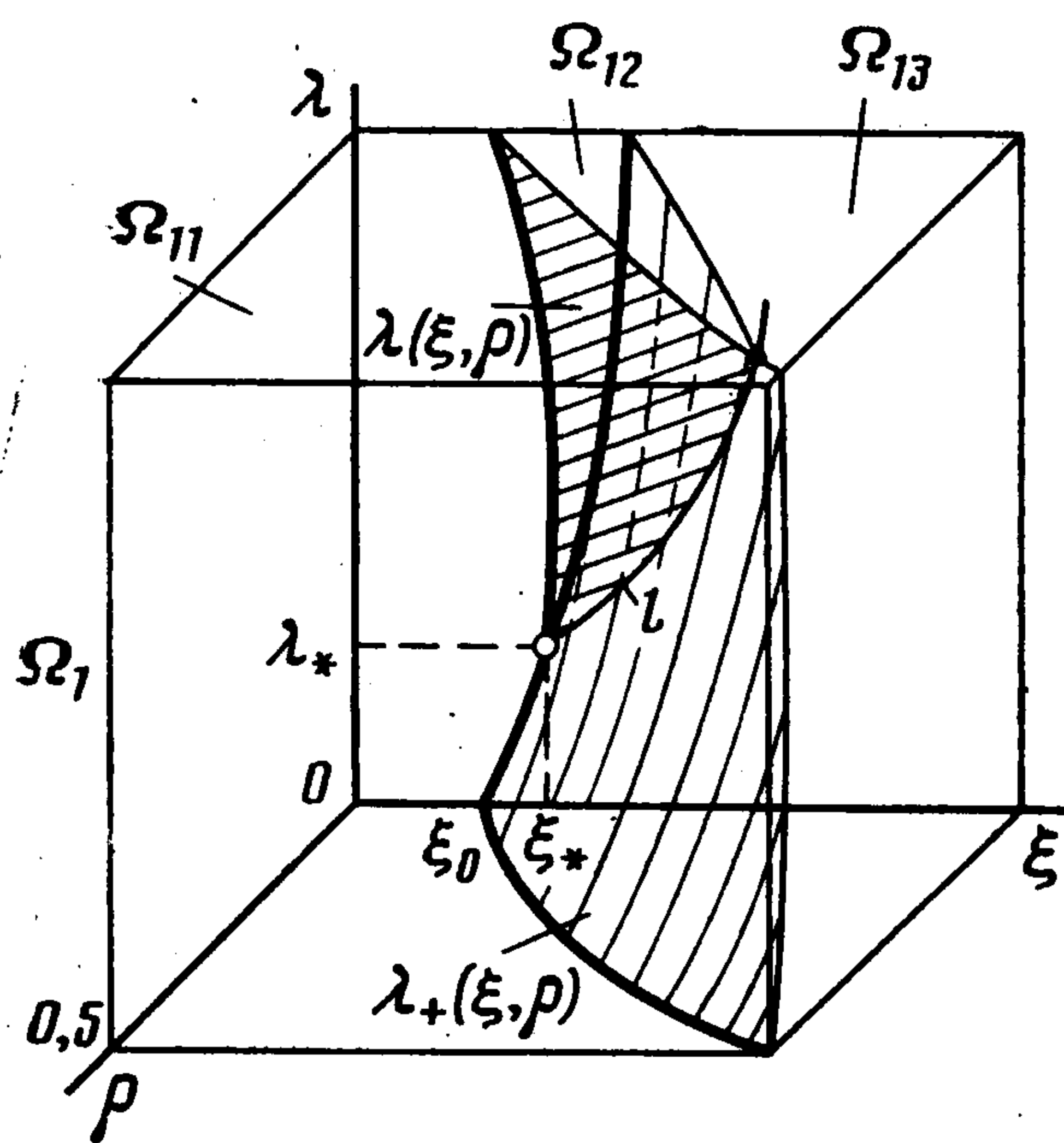
$$\xi_1(\rho) < \xi < \infty, \quad \xi_1(\rho) = \frac{5832}{500} \frac{1}{(1-\rho)^3}$$

для погружающегося пакета имеется единственное стационарное состояние, а при $0 < \xi < \xi_1(\rho)$ пакет не может находиться в стационарном состоянии ни при каком значении массы M составляющих его частиц. Единственный стационарный радиус пакета в случаях а) и б) определяется единственным положительным корнем соответствующих кубических уравнений

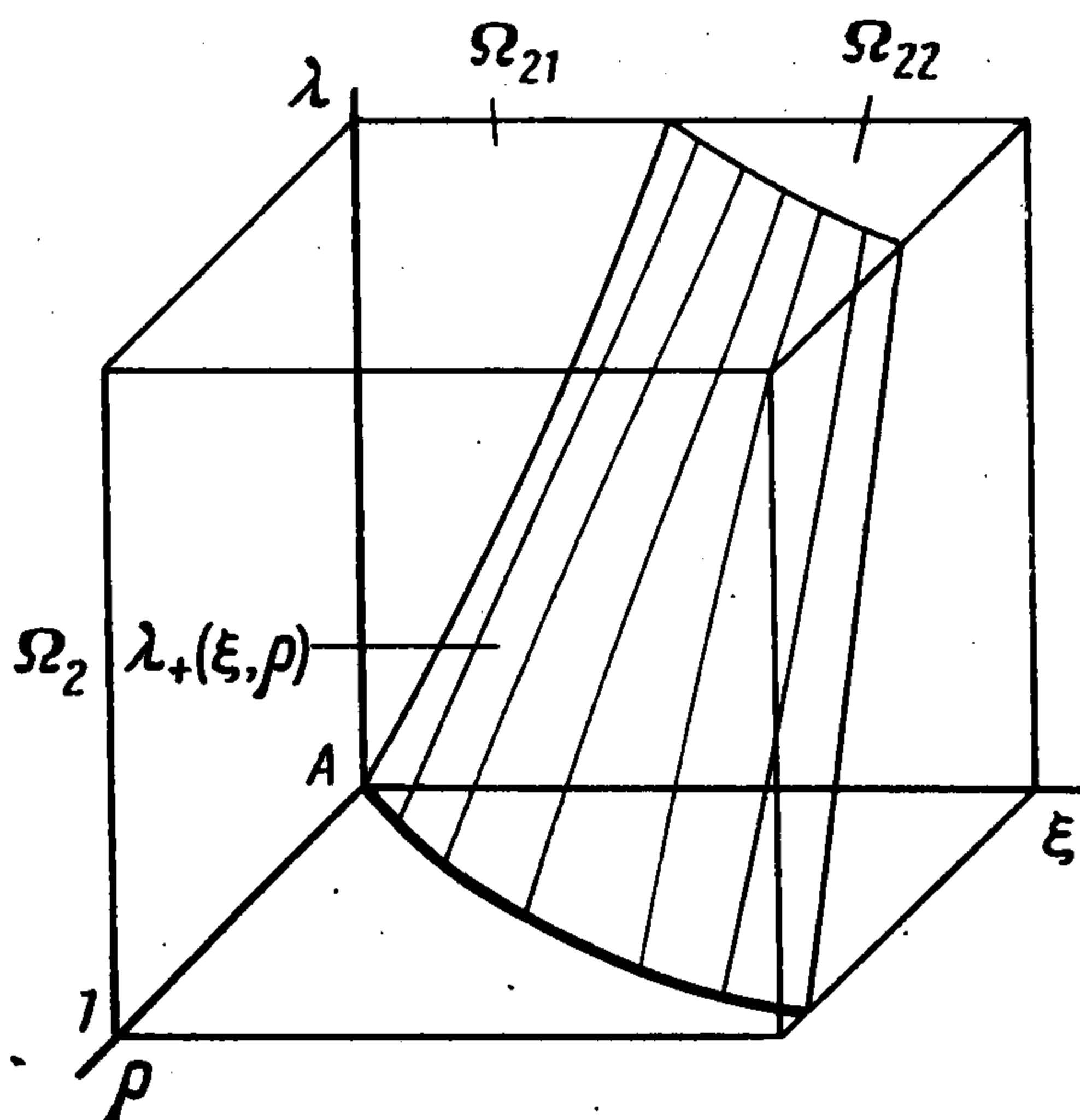
$$a_*^3 + \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho g} a_*^2 - \frac{3M}{4\pi \rho d_s} = 0$$

или в безразмерном виде

$$\rho \bar{a}_*^3 + \frac{18}{5} \bar{a}_*^2 - 4\xi = 0$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Здесь

$$\bar{a}_* = a_*/L, \quad L = 5p_{s\infty}/(14d_s g)$$

$$M \neq 0, \quad \Gamma \neq 0, \quad p_{s\infty} \neq 0, \quad \rho \neq 0$$

В общем случае уравнение (3.4), определяющее стационарные размеры пакета, может быть записано в безразмерном виде следующим образом:

$$(3.7) \quad \rho \bar{a}_*^6 + \frac{18}{5} \bar{a}_*^5 - 4\xi \bar{a}_*^3 + \frac{\xi \lambda}{5} = 0, \quad \bar{a}_* = \frac{a_*}{L}$$

Здесь $\lambda = 90\Gamma^2/(7gL^3)$ — безразмерный параметр, характеризующий интенсивность циркуляции дисперсной фазы в пакете.

Для всплывающих пакетов ($\rho_*' < \rho$) уравнение (3.7) имеет в каждой точке трехмерной области $\Omega = \{\xi > 0, \lambda > 0, 0 < \rho < 1\}$ единственный положительный корень, определяющий стационарный радиус пакета с массой M и циркуляцией Γ . Для погружающихся пакетов ($\rho_*' > \rho$) характер множественности стационарных состояний аналогичен рассмотренному выше в случае $p_{s\infty} = 0, \rho \neq 0$. Именно, в области $\Omega_1 = \{\xi > 0, \lambda > 0, 0 < \rho < 0,5\}$ в зависимости от значений массы и масштаба внутренней циркуляции дисперсной фазы пакет может не иметь стационарного размера (область Ω_{11}), иметь два стационарных размера (область Ω_{12}) или один стационарный размер (область Ω_{13}), см. фиг. 4. Поверхности $\lambda = \lambda(\xi, \rho)$ и $\lambda = \lambda_+(\xi, \rho)$, разбивающие область Ω_1 на указанные три подобласти, описываются соотношениями

$$\rho^3 \lambda = \begin{cases} \lambda_1(\xi, \rho), & 0 < \tau \leq 2 \\ \lambda_2(\xi, \rho), & \tau \geq 2; \tau = \xi \rho^2 \end{cases}$$

$$\lambda_1(\xi, \rho) = 9\tau^{-1} \{2\tau - 1 + 4 \cos^{1/3} \arccos(\tau - 1) \times \\ \times [1 - \cos^{1/3} \arccos(\tau - 1)]\}^2 - 16\tau$$

$$\lambda_2(\xi, \rho) = \tau^{-1} [6\tau - 3 + 3(2 - \zeta_+ - \zeta_-)(\zeta_+ + \zeta_-)]^2 - 16\tau$$

$$\xi_{\pm} = [\tau - 1 \pm ((\tau - 1)^2 - 1)^{1/2}]^{3/2}$$

$$\lambda_+(\xi, \rho) = 80(1 - \rho)\xi - 288 \cdot 2^{-2/3} \xi^{2/3}$$

При этом для точек той части поверхности $\lambda = \lambda(\xi, \rho)$, которая лежит ниже кривой $l = \lambda(\xi, \rho) \cap \lambda_+(\xi, \rho)$, погружающийся пакет с соответствующими значениям параметров ξ, λ массой и циркуляцией не имеет стационарного размера, а на остальной части этой поверхности стационарный размер единствен. При пересечении кривой l снизу на поверхности $\lambda = \lambda_+(\xi, \rho)$ количество стационарных состояний пакета изменяет-

ся с одного на два. Координаты ξ_* , λ_* точек кривой l в функции концентрации ρ даны ниже:

ρ	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,5
$\lambda_* \cdot 10^{-3}$	1,85	3,57	8,80	31,1	259	$1,9 \cdot 10^3$	∞
$\xi_* \cdot 10^{-3}$	0,057	0,106	0,250	0,844	6,75	493	∞
ξ_0	12,0	16,0	22,8	34,0	54,0	70,1	93,3

Продолжение поверхности $\lambda = \lambda_+(\xi, \rho)$ в область $\Omega_2 = \{\xi > 0, \lambda > 0, 0,5 \leq \rho < 1\}$, дополняющую Ω_1 до Ω , делит Ω_2 на две части с различным количеством стационарных состояний (фиг. 5). В точках подобласти Ω_{21} значения параметров системы соответствуют отсутствию стационарного размера у погружающегося пакета. В точках подобласти Ω_{22} и на соответствующей части поверхности $\lambda_+(\xi, \rho)$ значения параметров отвечают наличию у пакета единственного стационарного размера, удовлетворяющего первому условию (3.6). Отметим, что в рассматриваемом случае $\rho_*' < \rho$ в плоскости $\lambda = 0$, ограничивающей снизу область Ω , получается диаграмма, данная выше на фиг. 3, б: $\lambda_+(\xi, \rho) \cap \{\lambda = 0\} = \xi_1(\rho)$.

4. Движение сгустка частиц в дисперсионной среде. Предложенная в п. 1 модель нестационарных движений пакета в псевдооживленном слое может быть применена для исследования аналогичных нестационарных движений сферического сгустка (облака) частиц в чистой дисперсионной среде. Соответствующие уравнения движения, неразрывности и граничные условия получаются из соотношений (1.1), (1.2) в которых следует положить $\rho = 0$, $\rho_{s\infty} = 0$, и имеют вид

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & r > a(t), p_f(\mathbf{r}, t) = \text{const} = p_{f\infty}, \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0, \rho = 0 \\
 & r < a(t), \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) - \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = -k'[\varepsilon'(t)]\nabla p_f'(\mathbf{r}, t) \\
 & \partial \varepsilon'(t)/\partial t + \varepsilon'(t)\nabla \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = 0 \\
 & d_s \rho'(t) [\partial/\partial t + \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) \nabla] \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = -\nabla [p_f'(\mathbf{r}, t) + \\
 & + p_s'(\mathbf{r}, t)] - d_s \rho'(t) U_d(t) \mathbf{g}/g + d_s \rho'(t) \mathbf{g} \\
 & \partial \rho'(t)/\partial t + \rho'(t)\nabla \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = 0, \varepsilon'(t) + \rho'(t) = 1 \\
 (4.2) \quad & r = a(t), w_r' = a', v_r - a' = \varepsilon'(v_r' - a'), p_f' = p_{f\infty}, \\
 & p_s' = 0
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае поле течения дисперсной фазы внутри пакета по-прежнему описывается выражениями (2.4) — (2.6). Переходя во втором соотношении (2.14) к пределу при $\rho \rightarrow 0$, находим распределение давления жидкой фазы внутри пакета в виде

$$(4.3) \quad p_f'(\mathbf{r}, t) = 1/6 \chi(t) (r^2 - a^2(t)) + p_{f\infty}$$

Отсюда и из уравнения движения жидкой фазы в области $r < a(t)$ следует, что всюду внутри пакета угловые компоненты скоростей частиц и газа совпадают. Напомним, что в квазистационарном приближении, рассматривавшемся в [7], относительное движение фаз в сгустке отсутствует: $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t)$, $r < a(t)$. В случае же нестационарных движений сгустка типа радиального расширения (сжатия) появляется межфазное проскальзывание в радиальном направлении, обусловленное втеканием жидкой фазы в сгусток (оттоком ее из сгустка) при изменении его радиуса.

Если течение жидкой фазы вне сгустка потенциально, т. е. $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi_f(\mathbf{r}, t)$, то при помощи выражения (4.3) для потенциала $\varphi_f(\mathbf{r}, t)$ получаем следующую задачу (предполагается, что вдали от сгустка в си-

стеме xO_1y жидкая фаза неподвижна):

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi_f(\mathbf{r}, t) &= 0, \quad \partial\varphi_f/\partial r|_{r=a} = v_r|_{r=a} = \dot{a}(t) - \\ &- \varepsilon'(t) k'[\varepsilon'(t)] \partial p_f'/\partial r|_{r=a} = \dot{a}(t) - \frac{1}{3}\varepsilon'(t) k'[\varepsilon'(t)]. \\ \chi(t) a(t) &= 0 \end{aligned}$$

Решение задачи (4.4) имеет вид

$$\varphi_f(\mathbf{r}, t) = -U_d(t) \left(1 + \frac{a^3(t)}{2r^3}\right) r \cos \theta$$

Из второго соотношения (3.1) при $\rho \rightarrow 0$ получаем распределение давления твердой фазы по поверхности сгустка $p_s'(\mathbf{r}, t) = d_s \rho'(t) [(-U_d'/g + 1) ga \cos \theta - \frac{1}{2}(a^{*2} + \frac{9}{4}U_d'^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{2}(a^{**} a - a^{*2})]$.

Система дифференциальных уравнений, связывающих $a(t)$, $U_d(t)$, $U_d'(t)$, записывается в виде

$$(4.5) \quad \begin{aligned} U_d' a &= \text{const} = \Gamma, \\ -\frac{1}{2}a^{**} + (-U_d'/g + 1)g &= 0, \quad (-U_d'/g + 1)ga + \frac{9}{4}U_d'^2 = 0 \end{aligned}$$

Исключая U_d , U_d' из уравнений (4.5), приходим к следующему закону роста (сжатия) сгустка:

$$(4.6) \quad a^3 a^{**} = -\gamma^2, \quad \gamma^2 = \frac{9}{2}\Gamma^2$$

Для общего интеграла уравнения (4.6) получаем соотношение

$$(4.7) \quad a^2(t) = [(k_1 t + k_2)^2 - \gamma^2]/k_1$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями движения сгустка:

$$k_1 = (a_0^2 a_0^{*2} - \gamma^2)/a_0^2, \quad k_2 = a_0 a_0^*$$

причем

$$a_0 = a(t)|_{t=0}, \quad a_0^* = (da(t)/dt)|_{t=0}$$

— начальные размер и скорость изменения размера сгустка.

При отсутствии внутренней циркуляции твердой фазы в сгустке ($\Gamma = 0$) из равенства (4.7) находим $a(t) = a_0^* t + a_0$. Из второго уравнения (4.5) следует, что в рассматриваемом случае центр сгустка движется как свободно падающее тело: $U_d^* = g$. Сгусток имеет единственный стационарный размер $a_* = a_0$ при условии $a_0^* = 0$, а при $a_0^* > 0$ ($a_0^* < 0$) его радиус линейно по времени увеличивается (уменьшается до минимально возможной величины a_{*1}).

Циркуляционное движение дисперсных частиц, состава вляющих сгусток, приводит к увеличению скорости его падения в газе. В этом случае второе равенство (4.5) и уравнение (4.6) дают $U_d^* = g - \frac{1}{2}a^{**} > g$. Этот результат согласуется с экспериментальными данными [17—19] по осаждению разбавленных суспензий в условиях так называемого динамического образования сгустков.

Как это видно из уравнения (4.6) при $\Gamma \neq 0$, внутреннее циркулирование твердой фазы приводит к отсутствию у сгустка стационарного размера. Анализ решения (4.7) показывает, что для сгустков, интенсивность циркуляции в которых удовлетворяет условию $\gamma < a_0 a_0^*$, скорость изменения радиуса имеет во все время движения знак a_0^* , т. е. сгусток сжимается при $a_0^* < 0$ и расширяется при $a_0^* > 0$. Этим же свойством обладают сгустки с большой интенсивностью внутренней циркуляции $\gamma > a_0 a_0^*$ при $a_0^* < 0$. Если в последнем случае сгусток в начальный момент времени расширяется ($a_0^* > 0$), то он будет расширяться до момента

$t = a_0^3 a_0 \dot{a} / (\gamma^2 - a_0^2 a_0 \dot{a}^2)$, когда $a \dot{a} = 0$, после чего расширение сменяется сжатием в соответствии с законом (4.7).

В двух частных случаях из формулы (4.7) получаем:

1) $\gamma = a_0 a_0 \dot{a}$ — масштаб циркуляции твердой фазы в сгустке задается начальным состоянием:

$$a^2(t) = 2\gamma t + a_0^2$$

2) $a_0 \dot{a} = 0$ — отсутствие пульсаций в начальный момент:

$$a^2(t) = a_0^2 - \gamma^2 a_0^{-2} t^2$$

Если сгусток сжимается при $t = 0$ ($a_0 \dot{a} < 0$) или $a_0 \dot{a} = 0$, он достигает минимального размера a_{*1} ($\rho' = 1$) за время t_* , определяемое соотношением

$$t_* = - \{ [a_0^2 a_{*1}^2 + \gamma^2 (1 - a_{*1}^2/a_0^2)]^{1/2} + a_0 a_0 \dot{a} \} a_0^2 (a_0^2 a_0 \dot{a}^2 - \gamma^2)^{-1}$$

из которого в рассмотренных выше частных случаях следует:

$$1) \gamma = 0, a_0 \dot{a} < 0, t_* = -(a_0 - a_{*1})/a_0 \dot{a}$$

$$a_0 \dot{a} = 0, t_* = a_0 \gamma^{-1} \sqrt{a_0^2 - a_{*1}^2}$$

причем $t_*(\Gamma = 0) = \infty$, что соответствует единственному состоянию сгустка $a = a_0$;

$$2) \gamma = a_0 a_0 \dot{a}, a_0 \dot{a} < 0, t_* = -(a_0^2 - a_{*1}^2)/(2a_0 a_0 \dot{a})$$

Поскольку состояние сгустка радиусом $a = a_{*1}$ нестационарно, можно предположить, что в момент $t = t_*$ скорость сжатия ($a \dot{a}(t_*)$) мгновенно меняет знак на противоположный, после чего сгусток начинает расширяться в соответствии с количественным соотношением параметров a_{*1} , $a \dot{a}(t_*)$, γ .

Проведенное выше исследование нестационарных движений пакетов частиц должно быть дополнено анализом устойчивости соответствующих стационарных состояний. В [4] показано, что стационарный размер $a = a_*$ пузырей в псевдооживленном слое неустойчив: более крупные пузыри ($a > a_*$) увеличиваются, а более мелкие ($a < a_*$) уменьшаются в размере.

Следует подчеркнуть, что в принятой модели, не учитывающей обмена твердыми частицами между пакетом и внешним слоем, поверхность пакета представляет собой тангенциальный разрыв скорости дисперсной фазы. Известно, [20], что в однофазных жидкостях подобные разрывы всегда неустойчивы. Представляет интерес исследование влияния межфазного взаимодействия на характер устойчивости тангенциальных разрывов рассматриваемого типа в неоднородных псевдооживленных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков Н. Н., Гупало Ю. П. О пакетном механизме перемешивания в кипящем слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 73—84.
2. Бобков Н. Н., Гупало Ю. П. О движении твердой и жидкой фаз вблизи местной неоднородности концентрации в псевдооживленном слое // Теорет. основы хим. технологии. 1984. Т. 18. № 4. С. 495—505.
3. Бобков Н. Н., Галиева Л. М., Гупало Ю. П. О движении неоднородностей развитого кипящего слоя при малых числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 57—65.
4. Буевич Ю. А. О движении пузырей в псевдооживленном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 43—51.
5. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Рост пузыря во взвешенном слое при нелинейном межфазном взаимодействии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 6. С. 66—73.
6. Mickley H. S., Fairbanks F. Mechanism of heat transfer to fluidized beds // AIChE Journal. 1955. V. 2. No. 3. P. 374—384.
7. Yerushalmi J., Cancurt N. T., Geldart D., Liss B. Flow regimes in vertical gas-solid contact systems // AIChE Symp. Ser. 1978. V. 74. No. 176. P. 1—13.

8. Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Движение тел в псевдооживленном слое. Л.: Изд-во ЛГУ. 1980. 165 с.
9. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдооживление твердых частиц. М.: Химия. 1965. 184 с.
10. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 418—429.
11. Бувич Ю. А., Гупало Ю. П. О поверхностях разрыва в дисперсных системах // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 722—734.
12. Гольдштик М. А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Изд-е Ин-та теплофизики СО АН СССР. 1984. 163 с.
13. Davies R. M., Taylor G. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes // Proc. Roy. Soc. 1950. V. A200. No. 1062. P. 375—390.
14. Псевдооживление / Под ред. И. Ф. Дэвидсона и Д. Харрисона. М.: Химия. 1974. 725 с.
15. Бородуля В. А., Гупало Ю. П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника. 1976. 207 с.
16. Jackson R. The mechanics of fluidized beds: Pt II: the motion of fully developed bubbles // Trans. Instn. Chem. Engrs. 1963. V. 41. No. 1. P. 22—28.
17. Koglin B. Settling rate of individual particles in suspension // Proc. Conf. Particle Size Analysis. Bradford. 1970. L.: Soc. Analyt. Chem. 1972. P. 223—235.
18. Koglin B., Al-Taweel A., Ahmad N. Konfiguration und Sinkgeschwindigkeit von hydrodynamischen Komplexen Kugelförmiger Partikeln // Chem. Ing. Techn. 1976. B. 48. No. 6. S. 557.
19. Adachi K., Kiriya S., Yoshioka N. The behaviour of a swarm of particles moving in a viscous fluid // Chem. Engng Sci. 1978. V. 33. No. 1. P. 115—121.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.

Москва, Горький

Поступила в редакцию
7.VII.1987