

УДК 532.5

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В СЖИМАЕМОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Савенков И. В.

Рассматривается распространение пространственных возмущений от импульсного и гармонического источников в сжимаемом пограничном слое на плоской пластине. Число Рейнольдса предполагается стремящимся к бесконечности. Поле возмущенного движения строится в рамках линеаризованной теории пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Решение линеаризованных уравнений раскладывается в интегралы Фурье. При нахождении обратных преобразований численные методы комбинируются с асимптотическим. Делается сопоставление с экспериментальными данными и расчетами линеаризованных уравнений Навье—Стокса.

Теория пограничного слоя (ПС) с самоиндуцированным давлением [1, 2] хорошо зарекомендовала себя при исследовании неустойчивости ПС в несжимаемой жидкости при высоких числах Рейнольдса R (см., например, [3—9]). В то же время асимптотическая теория [1, 2] предсказывает устойчивость (в пределе $R \rightarrow \infty$) сверхзвукового ПС по отношению к плоским возмущениям, распространяющимся строго по потоку, что находится в противоречии с хорошо известными результатами для конечных R (см., например, [10, 11]).

Однако сверхзвуковой ПС в рамках асимптотической теории неустойчив по отношению к косым волнам (распространяющимся под ненулевыми углами к набегающему потоку) [12, 13]. Поэтому можно надеяться, что пакет косых волн неустойчивости в пределе $R \rightarrow \infty$ качественно правильно описывается теорией [1, 2]. (Тем более, что при конечных R с увеличением числа Маха M_∞ набегающего потока наиболее неустойчивыми становятся косые волны и их роль заметно повышается в сверхзвуковом ПС [10, 11].)

Пакет косых волн генерируется любым источником, вносящим существенно трехмерные возмущения в пограничный слой. В качестве такого источника в настоящей работе рассматривается вдв — отсос через отверстие в пластине. Решению конкретных задач предпослан детальный анализ влияния числа Маха M_∞ на устойчивость ПС (в пределе $R \rightarrow \infty$).

1. Временная неустойчивость. Начнем с анализа дисперсионного соотношения (ДС)

$$(1.1) \quad F(\Omega, k, m; M_\infty) = \Phi(\Omega) - Q(k, m; M_\infty) = 0$$

$$\Phi = \frac{d \operatorname{Ai}(\Omega)}{d\zeta} I^{-1}(\Omega), \quad I = \int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(\zeta) d\zeta, \quad \Omega = \omega (ik)^{-2/3}$$

$$Q = (ik)^{1/3} (k^2 + m^2) / \sqrt{S}, \quad S = m^2 + (1 - M_\infty^2) k^2$$

получающегося после линеаризации уравнений свободно взаимодействующего сжимаемого ПС [14] по отношению к возмущениям вида $f(y) \exp(\omega t + ikx + imz)$ [3, 12, 13] (x, y и z — безразмерные координаты, отсчитываемые соответственно вниз по потоку, по нормали от пластины и в боковом направлении, t — безразмерное время, M_∞ — число Маха набегающего на пластину равномерного потока); $\operatorname{Ai}(\zeta)$ — функция Эйри. В случае $S < 0$ под корнем в выражении для Q понимается та его ветвь, на которой $\sqrt{S} = i \sqrt{|S|}$. При таком выборе знака корня ДС (1.1) при $m = 0$ и $M_\infty > 1$ переходит в ДС для прямых плоских волн в сверхзвуковом ПС.

Остановимся сначала на более простом анализе временной неустойчивости, считая в (1.1) k и m вещественными, а комплексную частоту $\omega = \sigma - i\omega_0$ — подлежащей определению из уравнения (1.1). Для k и m , удовлетворяющих неравенству $S > 0$ (что всегда выполняется при $M_\infty < 1$), введем новую переменную $k' = \text{sign } k |k|^{1/4} (k^2 + m^2)^{3/4} S^{-3/8}$. Тогда ДС (1.1) можно переписать в виде

$$(1.2) \quad \Phi(\Omega) = Q'(k'), \quad Q' = (ik')^{1/3} |k'|$$

ДС типа (1.2) рассматривалось (см., например, [4, 7]) при изучении плоских возмущений в несжимаемой жидкости. Его свойства хорошо известны. Так, ДС (1.2) имеет счетное число корней $\omega_n'(k') = (ik')^{2/3} \Omega_n'(k')$, из которых только первый неустойчив: $\text{Re } \omega_1'(k') > 0$ при $|k'| > k'_* = 1,0005$ (максимум $\text{Re } \omega_1'(k')$ достигается при $|k'| = k_2'^* = 2,716$ и равен $\sigma_{0e} = 1,240$). Поэтому в силу цепочки равенств $\omega_n(k, m; M_\infty) = (ik)^{2/3} \Omega_n'(k') = (k/k')^{2/3} \omega_n'(k')$ ДС (1.1) обладает также только одним неустойчивым корнем с $n = 1$.

Связь

$$(1.3) \quad \omega_1(k, m; M_\infty) = (k/k')^{2/3} \omega_1'(k')$$

является обобщением известного преобразования Сквайра на случай сжимаемых течений в пределе $R \rightarrow \infty$. (Было показано [3], что при $M_\infty = 0$ зависимость (1.3) — предельная форма этого преобразования при $R \rightarrow \infty$.) Она позволяет легко аналитически проследить влияние сжимаемости течения (выраженное в числе Маха M_∞) на характеристики устойчивости пограничного слоя. Так, нейтральная кривая на плоскости (k, m) задается очевидным равенством $k' = k^{1/4} (k^2 + m^2)^{3/4} S^{-3/8} = k_2'^*$ (в силу симметрии $\omega_1(-k, m; M_\infty) = \bar{\omega}_1(k, m; M_\infty)$ (черта сверху означает комплексное сопряжение) и $\omega_1(k, -m; M_\infty) = \omega_1(k, m; M_\infty)$, поэтому достаточно ограничиться диапазоном $k > 0, m > 0$). Для выявления максимума функции $\text{Re } \omega_1(k, m; M_\infty)$ при $M_\infty = \text{const}$ введем переменную $\beta = m/k$, после чего (1.3) переписывается в виде

$$\omega_1(k, m; M_\infty) = f(\beta) \omega_1'(k [f(\beta)]^{-3/2})$$

$$f(\beta) = (1 + \beta^2)^{-1/2} [\beta^2 + (1 - M_\infty^2)]^{1/4}$$

и задача сводится к отысканию $f_e = f(\beta_e) = \max f(\beta)$ при $0 < \beta < \infty$. Тогда $\sigma_e = \max \text{Re } \omega_1(k, m; M_\infty) = f_e \text{Re } \omega_1'(k_2'^*)$, а сам максимум σ_e достигается при $k = k_e = k_2'^* f_e^{3/2}$ и $m = m_e = \beta k_e$. Анализ показывает, что $\beta_e = 0$ при $M_\infty < M_\infty^* = \sqrt{2}/2$ и $\beta_e = (2M_\infty^2 - 1)^{1/2}$ при $M_\infty > M_\infty^*$, откуда

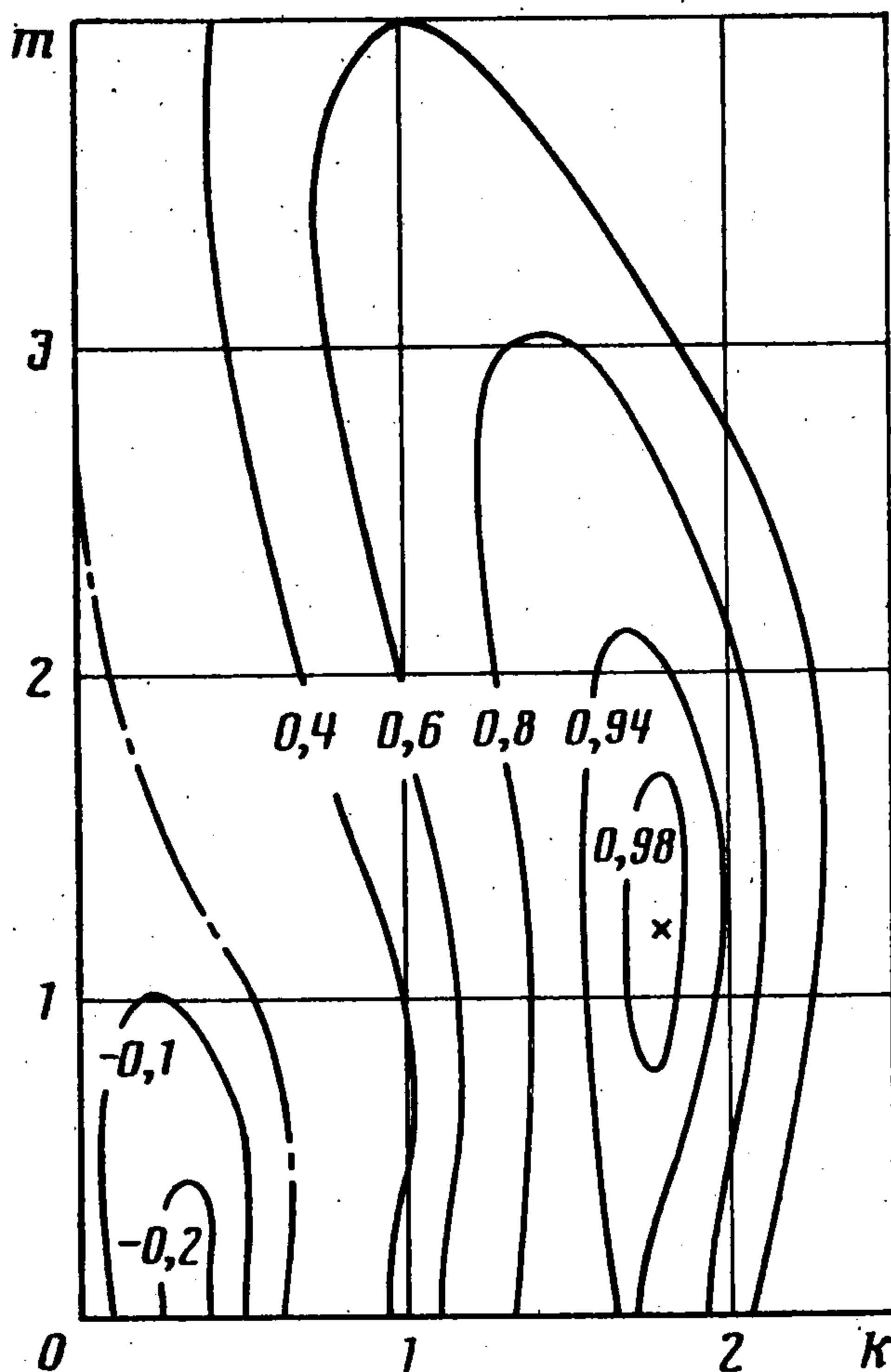
$$k_e = (1 - M_\infty^2)^{3/8} k_2'^*, \quad m_e = 0 \quad \text{при } M_\infty \leq M_\infty^*$$

$$k_e = (2M_\infty)^{-3/4} k_2'^*, \quad m_e = (2M_\infty^2 - 1)^{1/2} k_e \quad \text{при } M_\infty > M_\infty^*$$

Видно, что с увеличением M_∞ наиболее неустойчивой становится некоторая косая волна с $m_e \neq 0$ при достижении $M_\infty = M_\infty^* = 0,705$, что хорошо согласуется с оценкой $M_\infty^* = 0,6-0,8$ для конечных чисел Рейнольдса [10]. При этом

$$(1.4) \quad \sigma_e = \sigma_{0e} (1 - M_\infty^2)^{1/4}, \quad M_\infty \leq M_\infty^*; \quad \sigma_e = \sigma_{0e} (2M_\infty)^{-1/2}, \quad M_\infty > M_\infty^*$$

Более полная картина, характеризующая временную неустойчивость, приведена на фиг. 1, где представлены изолинии инкремента нарастания $\text{Re } \omega_1(k, m; M_\infty)/\sigma_{0e}$ для $M_\infty = 0,85$; нейтральная кривая проведена штрихпунктиром. Явно выражена область с большими значениями инкремента нарастания в окрестности наиболее неустойчивой волны (k_e, m_e)



Фиг. 1

(помечена крестиком). Плоские возмущения с $m = 0$ значительно слабее: $\max \operatorname{Re} \omega_1(k, 0; M_\infty) = \sigma_{0e} (1 - M_\infty^2)^{1/4} \rightarrow 0$ при $M_\infty \rightarrow 1 - 0$, тогда как согласно (1.4) $\sigma_e \rightarrow \sigma_{0e}/\sqrt{2} \neq 0$ при $M_\infty \rightarrow 1$.

В трансзвуковой области $M_\infty \approx 1$ теория [1, 2] для двумерных течений нарушается. В то же время неустойчивые трехмерные колебания в районе (k_e, m_e) по-прежнему описываются в рамках традиционной схемы [1, 2] для всех чисел Маха M_∞ .

При $M_\infty > 1$ остался нерассмотренным случай $S < 0$. Он мало интересен и не влияет на результаты проведенного анализа по нахождению наиболее неустойчивой волны, так как в этом случае соотношение (1.1) сводится к ДС для прямых плоских волн в сверхзвуковом ПС [15], не имеющему неустойчивых корней.

2. Импульсно действующий источник. Проведенный выше анализ временной неустойчивости полезен при решении задачи о развитии возмущений, порождаемых источником, импульсно воздействующим на пограничный слой [7, 8]. Такой источник порождает волновой пакет, основные характеристики которого при $t \rightarrow \infty$ определяются свойствами ДС на наиболее неустойчивой волне [16, 17].

В качестве источника возмущений рассмотрим вдув — отсос через отверстие диаметра d^* в плоской пластине. (Для применимости уравнений из [14] потребуем, чтобы расстояние L^* от передней кромки до центра отверстия было достаточно велико, так что число Рейнольдса R , построенное по L^* и параметрам набегающего потока, можно считать стремящимся к бесконечности.) Граничные условия на пластине имеют вид

$$(2.1) \quad u = w = 0, \quad v = \delta v_0(t, x, z), \quad y = 0$$

где u и w — проекции вектора скорости на оси x и z , v — вертикальная компонента скорости; $v_0 \equiv 0$ вне отверстия $x^2 + z^2 \leq d^2/4$ (d — безразмерный диаметр) и при $t \leq 0$, $t \geq t_0$.

Считая амплитуду вносимых возмущений δ малой, линеаризуем уравнения свободно взаимодействующего пограничного слоя [14] по этому параметру, после чего для решения получившейся линейной задачи применим преобразование Лапласа по времени t и Фурье по координатам x и z .

Для функции $A'(t, x, z)$, описывающей мгновенное смещение линий тока в основной толще пограничного слоя [14], будем иметь (процедура вывода аналогична известной [3, 8])

$$(2.2) \quad A' = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(kx+mz)} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{(ik)^{-2/3} v_0^*(\omega, k, m)}{F(\Omega, k, m; M_\infty)} e^{\omega t} d\omega$$

Здесь

$$v_0^*(\omega, k, m) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx dz e^{-i(kx+mz)} \int_0^{\infty} e^{-\omega t} v_0(t, x, z) dt$$

— образ Фурье — Лапласа функции v_0 из граничного условия (2.1). Следуя [4, 7, 8], вычисление интеграла (2.2) начнем с обратного преобразования Лапласа. Имеем

$$(2.3) \quad A' = \operatorname{Re} [A_c'(t, x, z)]$$

$$A_c' = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm \int_0^{\infty} dk \frac{v_0^*(\omega, k, m) \exp[\omega_n(k, m; M_\infty)t + ikx + imz]}{d\Phi[\Omega_n(k, m; M_\infty)]/d\Omega}$$

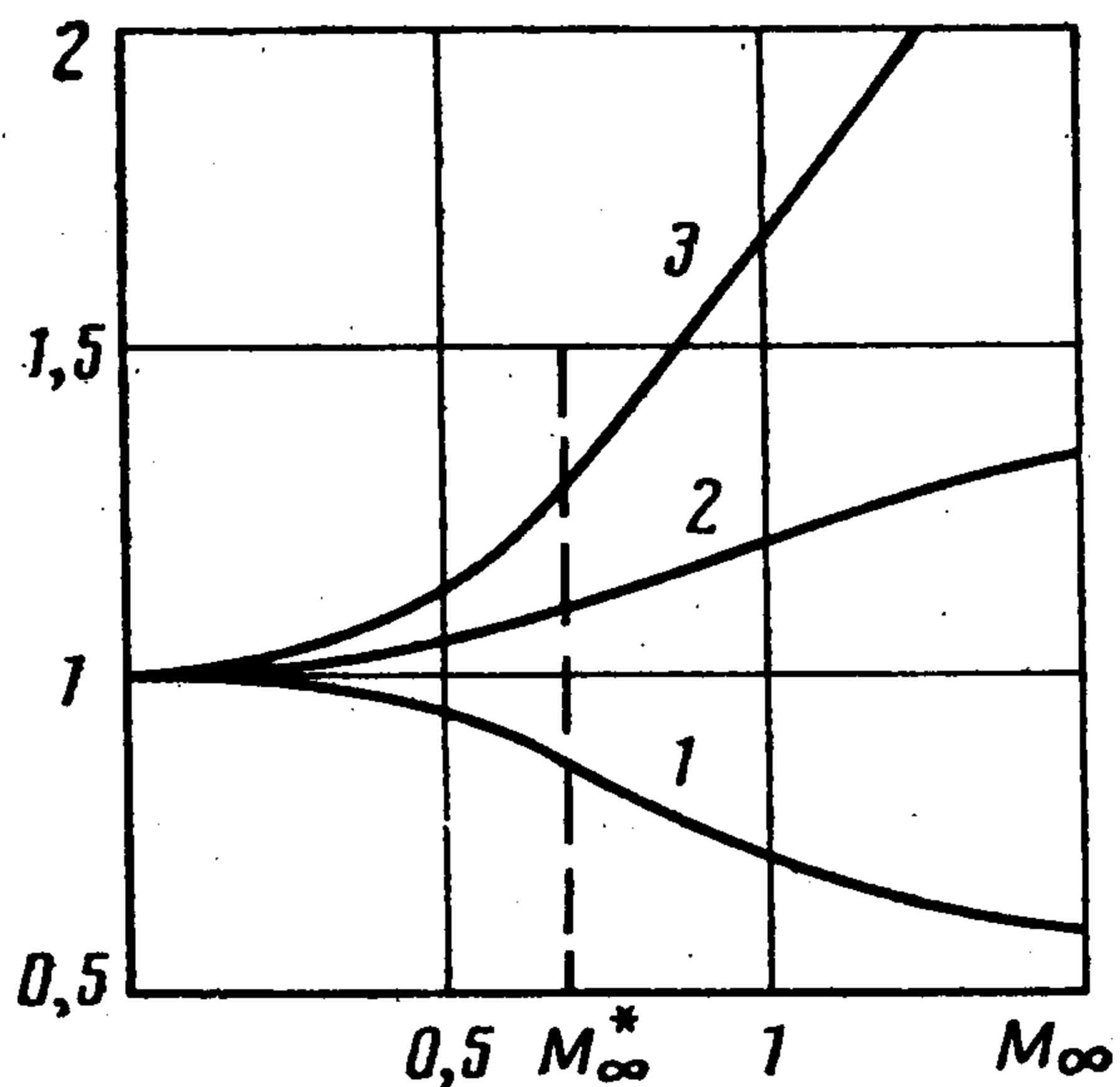
Оценка вклада в A_c' из (2.3) суммы всех интегралов, начиная со второго (описывающих устойчивые возмущения), для случая плоских возмущений известна [4], без труда обобщается на пространственный случай и имеет тот же вид $o(t^{-4})$ равномерно по x и z .

Для вычисления оставшегося в (2.3) при $n = 1$ интеграла был разработан [7] специальный прием, базирующийся на идеях метода перевала. Было отмечено [8], что, начиная уже с момента времени $t = 5$, хорошую точность (несколько процентов) обеспечивает оценка интеграла по методу перевала. Основные характеристики предельной формы волнового пакета при $t \rightarrow \infty$ могут быть определены в рамках так называемой модели Гаусса [17].

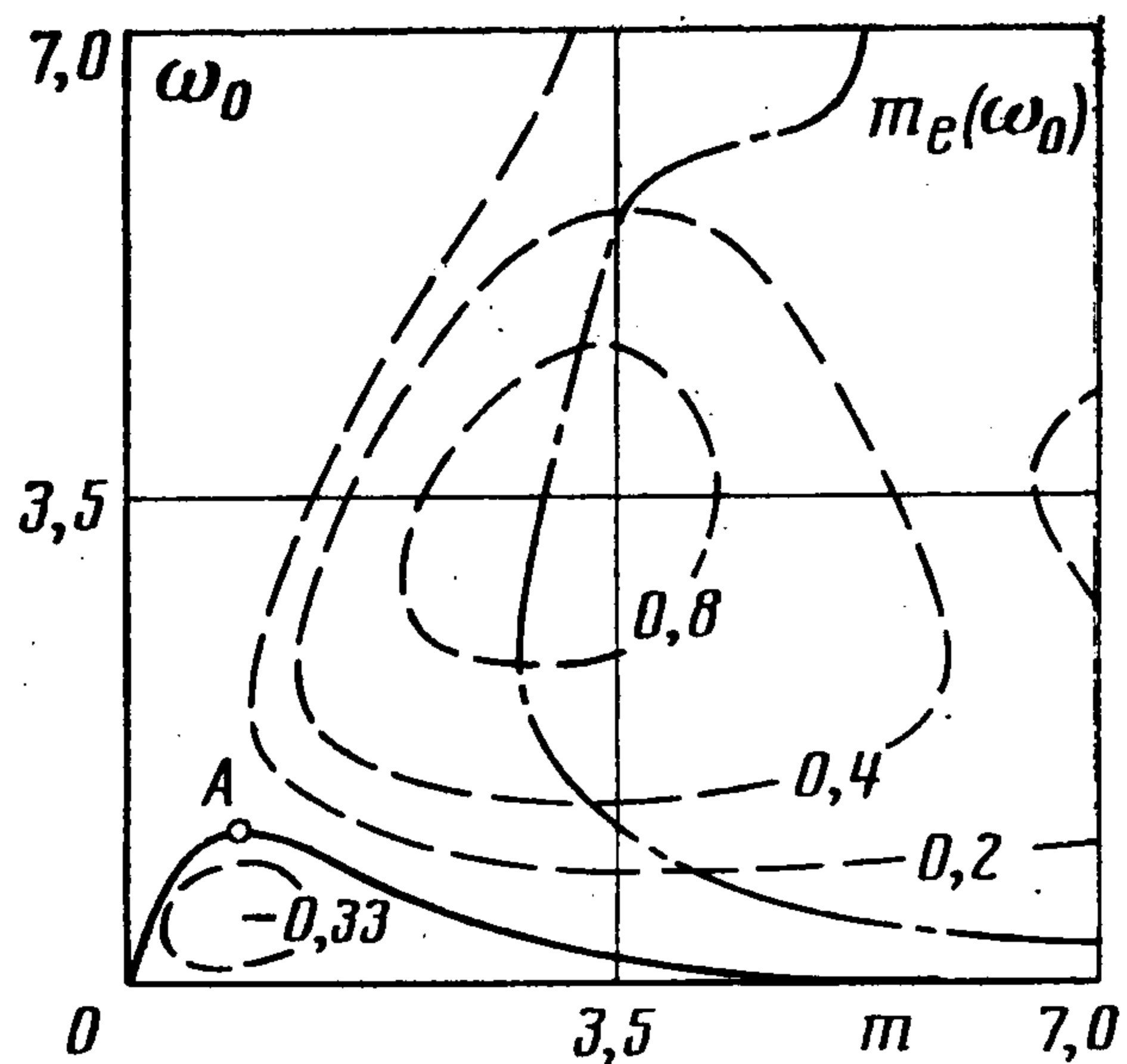
Так, групповая скорость волнового пакета дается соотношениями $U = -\partial \operatorname{Im} \omega_1 / \partial k$, $V = -\partial \operatorname{Im} \omega_1 / \partial m$ (U и V — проекции вектора скорости распространения максимума амплитуды возмущения на оси x и z), вычисляемыми в точке (k, m) с максимальным инкрементом нарастания σ_e . В данном случае при $M_\infty > M_\infty^*$ таких точек две: (k_e, m_e) и $(k_e, -m_e)$. В силу симметрии ДС по m , различие скоростей U, V для этих точек может состоять лишь в разных знаках V (что означало бы раздвоение волнового пакета). Прямой подсчет дает $V = 0$ для всех чисел Маха и $U = U_0(1 - M_\infty^2)^{-1/2}$ при $M_\infty \leq M_\infty^*$, $U = U_0(2M_\infty)^{1/2}$ при $M_\infty > M_\infty^*$, где $U_0 = 4,49$ — групповая скорость распространения плоских возмущений в несжимаемой жидкости [7]. Поэтому, хотя при $M_\infty > M_\infty^*$ наиболее неустойчивыми становится пара симметричных косых волн, возмущение тем не менее не раздваивается и в этом случае.

Можно обобщить модель Гаусса [16, 17] на случай двух наиболее неустойчивых волн. Окончательные формулы здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Отметим только, что изолинии амплитуды $|A_c'|$ в окрестности максимума при $x = U_0 t$, $z = 0$ — по-прежнему, эллипсы, причем при приближении M_∞ к M_∞^* эти эллипсы сжимаются вдоль оси z (что связано с обращением в ноль $\partial^2 \omega_1(k_e, m_e; M_\infty^*) / \partial m^2$).

На фиг. 2 цифрами 1, 2 и 3 помечены зависимости от числа Маха соответственно величин σ_e / σ_{oe} , U / U_0 и λ / λ_0 , где $\lambda = 2\pi / k_e$ — характерная длина волны в пакете, а $\lambda_0 = 2\pi / k_2^*$ — ее значение в несжимаемой жидкости. Эти зависимости имеют непрерывную производную в точке сопряжения $M_\infty = M_\infty^*$.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Пространственная неустойчивость. Проведем качественный анализ пространственной неустойчивости, для чего в ДС (1.1) положим $\omega = i\omega_0$ (ω_0 — вещественная частота), а m будем по-прежнему считать вещественным. Тогда комплексная величина $k(m, \omega_0; M_\infty)$ — подлежит определению из соотношения

$$(3.1) \quad \Phi(\Omega_0) = Q(k, m; M_\infty), \quad \Omega_0 = i^{1/2} \omega_0 k^{-2/3}$$

В случае пространственной неустойчивости ДС уже не удастся свести к какому-либо хорошо изученному типу для плоских возмущений. Однако можно показать, что (3.1) также обладает счетным набором корней; неустойчивым будет только один, обозначим его k_1 .

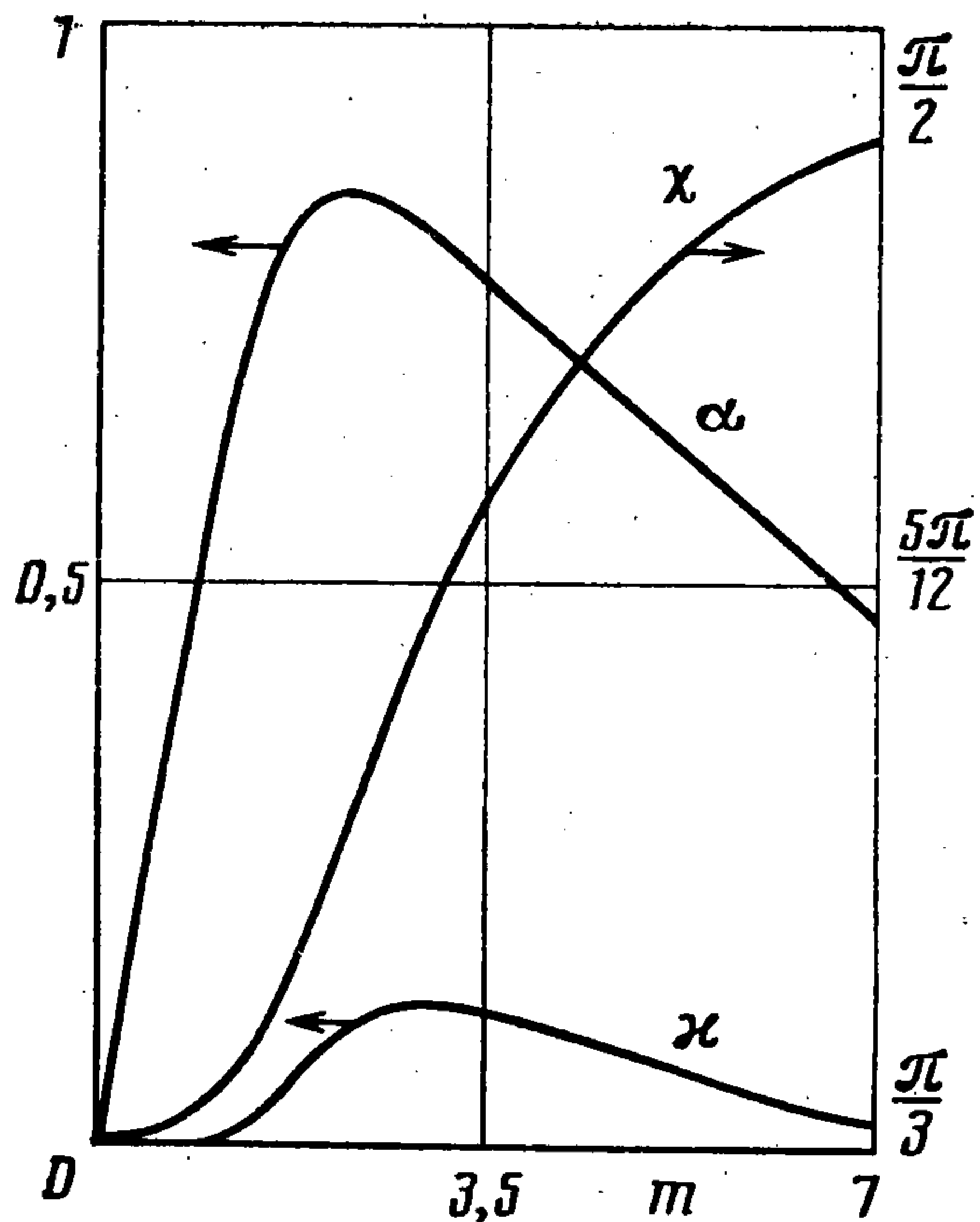
Изолинии инкремента нарастания $\kappa(m, \omega_0) = -\text{Im } k_1(m, \omega_0; M_\infty)$ для $M_\infty = 2$ (при этом числе Маха проводился эксперимент [18] и делались расчеты [11], § 6.1) приведены на фиг. 3 (нормированы на максимальное значение $\kappa = \kappa_{ee} = 0,127$). Следует отметить ярко выраженный максимум, достигающийся на наклонной волне с $m = m_e = 3,02$ при $\omega_0 = 3,5$. (Зависимость бокового волнового числа m_e , отвечающего наиболее неустойчивой волне при $\omega_0 = \text{const}$, от частоты показана штрихпунктиром.) Нейтральная кривая с $\kappa = 0$ на фиг. 3 проведена сплошной линией.

Для нее существует аналитическое представление [13], которое здесь не приводится ввиду его громоздкости. Укажем только координаты точки А, помеченной на фиг. 3 светлой точкой: $m = k_*' (2M_\infty)^{-2/3} (2M_\infty^2 - 1)^{1/2}$, $\omega_0 = \omega_*' (2M_\infty)^{-1/2}$ ($\omega_*' = 2,298$ — нейтральная частота для прямых плоских волн в несжимаемой жидкости [3, 4, 7]). Отсюда видно, что при $M_\infty > 1$ с увеличением числа Маха размеры устойчивой области уменьшаются.

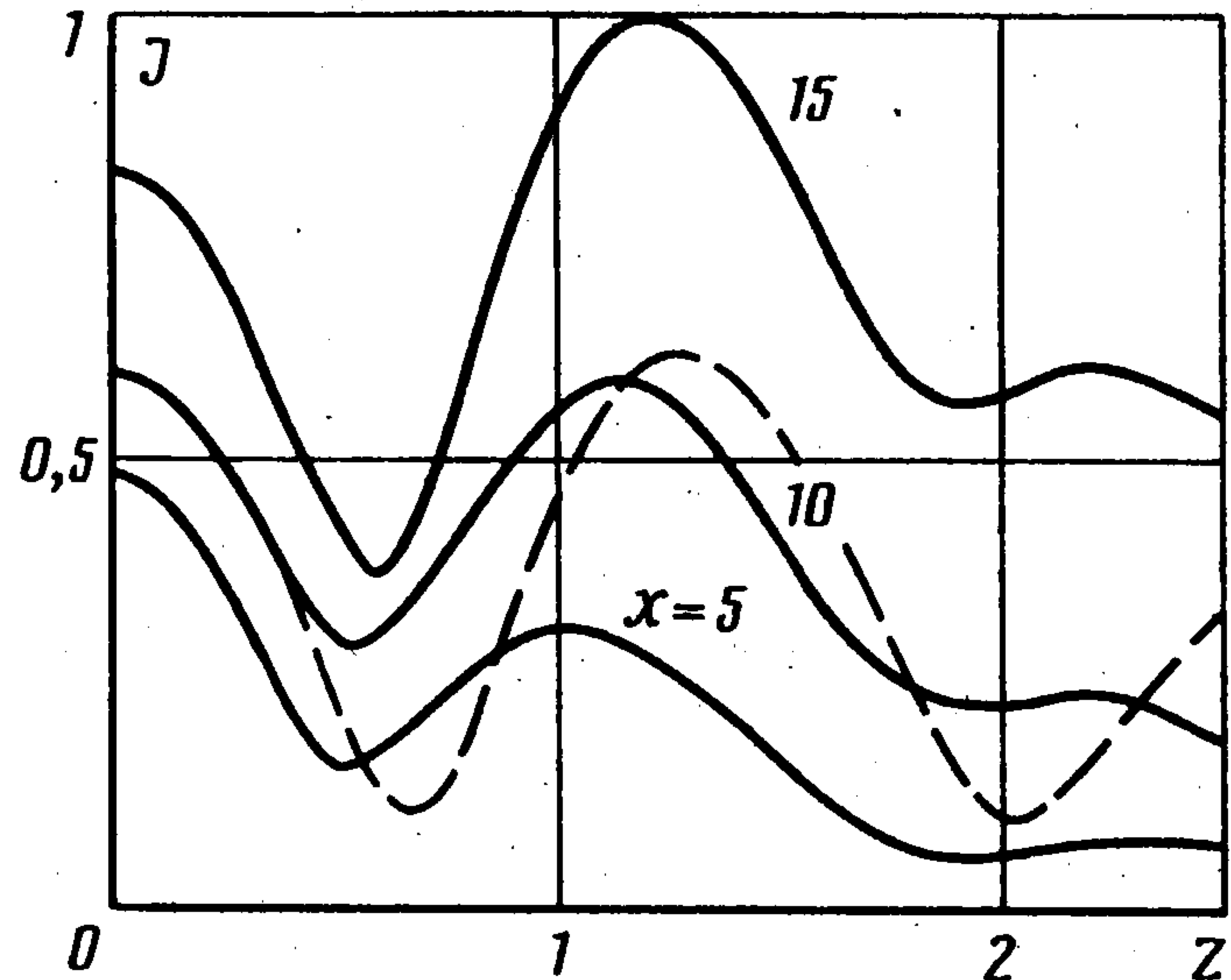
При $m \rightarrow 0$ имеем

$$k_1 = -\frac{m}{(M_\infty^2 - 1)^{1/2}} + \frac{M_\infty^4 m^5}{2(M_\infty^2 - 1)^{7/2} \omega_0^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}(1-i)m}{(M_\infty^2 - 1)^{1/2} \omega_0^{2/2}} \right) + O(m^7), \quad M_\infty > 1$$

Отсюда следует, что при малых m инкремент нарастания $\kappa = O(m^6)$ ничтожно мал даже по сравнению с волновым числом $\alpha = |\text{Re } k_1| = O(m)$. Это наглядно иллюстрирует фиг. 4, где приведены зависимости от m инкремента κ , волнового числа α и угла распространения волны $\chi = \text{arctg}(m/\alpha)$ при $\omega_0 = 3,5$. Следует отметить, что характер поведения κ и α качественно соответствует расчетам [11] по системе Дана — Линя и экспериментальным данным [18], за тем исключением, что прямая плоская волна в [11, 18] имеет ненулевые инкремент нарастания и волновое



Фиг. 4



Фиг. 5

число. Кроме того, $\chi \rightarrow \chi_0 = \text{arctg}(\sqrt{M_\infty^2 - 1}) = \pi/3$ (χ_0 — угол Маха) при $m \rightarrow 0$ (вместо $\chi \rightarrow 0$, как в [11, 18]).

Итак, обычная трехпалубная схема [1, 2] предсказывает ярко выраженный максимум инкремента нарастания на существенно трехмерных (косых) волнах. Прямые плоские неустойчивые волны в сверхзвуковом ПС эта теория не описывает. По-видимому, инкременты нарастания этих волн составляют бесконечно малые величины по отношению к инкрементам наиболее неустойчивых косых волн при $R \rightarrow \infty$. Но тогда основной вклад в волновые пакеты будут вносить косые волны, описываемые в рамках обычной схемы [1, 2], а вкладом прямых плоских волн при $R \rightarrow \infty$ можно пренебречь.

4. Гармонический источник. Пусть начиная с момента $t = 0$ производится вдув — отсос по гармоническому закону $v_0 = \sin(\omega_0 t) v_{00}(x, z)$ (таким образом, $v_0 = 0$ при $t < 0$). Введение начального момента $t = 0$ необходимо для однозначного определения весовых множителей при собственных функциях — экспоненциально нарастающих вниз по потоку волнах Толлмина — Шлихтинга [4, 9]. Начальный импульс при запуске источника порождает волновой пакет, рассмотренный ранее в п. 2. При $t \rightarrow \infty$ устанавливается гармонический режим колебаний. Имеем (см. [9])

$$A' = \text{Im} [I_1(x, z) e^{i\omega_0 t}] + \text{Re} [I_2(x, z) e^{i\omega_0 t}]$$

$$I_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{imz} \int_C \frac{(ik)^{-2/3} v_{00}^*(k, m)}{F[\Omega_0(k), k, m]} e^{ikx} dk$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik_1)^{-2/3} v_{00}^*(k_1, m)}{dF[\Omega_0(k_1), k_1, m]/dk} e^{\varphi(m, \omega_0; \text{tg } \alpha)x} dm$$

$$\Omega_0(k) = i^{1/3} \omega_0 k^{-2/3}, \quad \varphi = ik_1(m, \omega_0; M_\infty) + im \text{tg } \alpha, \quad \text{tg } \alpha = z/x$$

$$v_{00}^*(k, m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_{00}(x, z) e^{-i(kx+mz)} dx dz$$

Для выделения однозначной ветви выражения Q необходимо сделать разрезы в комплексной плоскости k (при фиксированном m) вдоль положительной части мнимой оси k , а также вдоль лучей $\text{Re } k = \pm m/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$, $\text{Im } k > 0$ в случае $M_\infty > 1$ и вдоль лучей $\text{Im } k \geq \pm m/\sqrt{1 - M_\infty^2}$, $\text{Re } k = 0$ при $M_\infty < 1$.

Под контуром интегрирования C в интеграле I_1 понимается любой контур в комплексной плоскости k (вообще говоря, зависящий от m как от параметра), проходящий выше первого, но ниже всех остальных корней ДС (3.1) [4, 9]. Как показывает прямой численный счет, интеграл I_1 довольно быстро затухает при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ и при $r \approx 5$ его вклад в A' составляет несколько процентов по сравнению с вкладом интеграла I_2 , описывающего суперпозицию растущих вниз по потоку косых волн Толлмина — Шлихтинга.

Характер поведения интеграла I_2 с увеличением x определяется выражением из экспоненты φ . Экспоненциальное нарастание дается величиной $\text{Re } \varphi = -\text{Im } k_1 = \kappa$, подробно рассмотренной в п. 3. Уже один только факт наличия наиболее неустойчивой косой волны (с $m = m_e \neq 0$) позволяет предсказать качественную картину развития волн неустойчивости на больших расстояниях вниз по потоку от источника: наиболее быстро возмущения растут под углом $\alpha = \alpha_e = \text{arctg} (|\partial \text{Re } k_1(m_e, \omega_0; M_\infty)/\partial m|)$ к оси x [9].

Зафиксируем $M_\infty = 2$ и $\omega_0 = 3,5$ (фиг. 4). Для этих значений параметров $\alpha_e = 4,7^\circ$. Однако ввиду малых величин инкрементов нарастания (напомним, что максимум κ_{ee} составляет всего лишь 0,127) асимптотические оценки еще плохо работают при $x = 5-15$ (погрешность составляет десятки процентов), что также было отмечено в [11].

Результаты численного счета интеграла I_2 представлены на фиг. 5 в виде зависимостей $J = |I_2|/I_0$ от z ($I_0 = 0,217$ — нормировочная константа). Функция вдува бралась в виде $v_{00} = 4\pi^{-1}a^{-2} \exp(-4a^{-2}(x^2 + z^2))$ с характерным размером источника $a = 2$ (результаты расчетов для $a = 1$ при $x = 10$ отмечены штрихами). Явно прослеживается тенденция к преимущественному росту возмущений в некотором направлении $\alpha_e = \text{arctg}(z/x)$, что качественно соответствует результатам работ [11, 18]. Более того, сам вид кривых с резким промежуточным первым максимумом и слабо намечающимся вторым удивительно похож на результаты [11, 18]. Из фиг. 5 угол α_e может быть оценен в $4-6^\circ$.

Подчеркнем, что согласно проведенным расчетам в пространственном пакете волн Толлмина — Шлихтинга возмущения нарастают вниз по потоку для фиксированных z из диапазона $0 \leq z \leq 2,5$, в том числе и строго вниз по потоку (хотя прямые плоские волны устойчивы в сверхзвуковом ПС).

Автор благодарит О. С. Рыжова за обсуждения и А. М. Тумина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53—57.
2. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1969. V. 312. No 1509. P. 181—206.
3. Жук В. И., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 552—563.
4. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264—272.
5. Рубан А. И. О генерации волн Толлмина — Шлихтинга звуком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 44—52.
6. Goldstein M. E. Scattering of acoustic waves into Tollmien — Schlichting waves by small streamwise variations in surface geometry // J. Fluid Mech. 1985. V. 154. P. 509—529.
7. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974—986.
8. Рыжов О. С., Савенков И. В. Асимптотическая теория волнового пакета в пограничном слое на пластинке // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 820—828.

9. Рыжов О. С., Савенков И. В. Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничный слой на пластинке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 4. С. 591—602.
10. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. 1980. 144 с.
11. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности: Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука. 1987. 282 с.
12. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure // J. méс. 1980. V. 19. No. 3. P. 561—580.
13. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. On the stability of a compressible boundary layer against three-dimensional disturbances with self-induced pressure gradient // Current problems in computational fluid dynamics. М.: Mir. 1986. P. 286—307.
14. Рыжов О. С. О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1035—1052.
15. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 1014—1028.
16. Criminale W. O., Kovaszny L. S. G. The groth of localized disturbances in a laminar boundary layer // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 1. P. 59—80.
17. Gaster M. Propagation of linear wave packet in laminar boundary layers // AIAA Journal. 1981. V. 19. No. 4. P. 419—423.
18. Косинов А. Д., Маслов А. А. Развитие искусственно вызванных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 37—42.

Москва

Поступила в редакцию
23.IX.1987