Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 532.5

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЯХ, КОГДА ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ МИНИМАЛЬНОЙ

Владимиров В. А.

Выясняются возможности перенесения методов доказательства неустойчивости [1—3] на гидродинамику идеальной, несжимаемой, неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости. В отличие от общей постановки [3] твердые границы сосуда, содержащего жидкость, считаются неподвижными, так что выделяется чисто гидродинамическая часть задачи. Изучаются примеры двуслойной (с учетом поверхностного натяжения и без него) и непрерывно стратифицированной жидкостей. Основной результат состоит в указании во всех случаях функционалов Ляпунова W, растущих в силу линеаризованных уравнений движения жидкости. Структура этих функционалов такова, что их нарастание означает неустойчивость в смысле роста интегралов от квадратов возмущений гидродинамических полей (неустойчивость по линейному приближению в среднеквадратическом). Вид функционалов W диктуется гамильтоновой формулировкой теоремы о неустойчивости конечномерных механических систем [2] и известными способами введения канонических переменных в гидродинамику [4, 5]. В силу известной эквивалентности эффектов стратификации и вращения [6, 7] все полученные в работе результаты справедливы для двух классов вращающихся течений однородной жидкости.

В аналитической механике широко известны теоремы Ляпунова и Четаева (обращения теоремы Лагранжа), состоящие в доказательстве неустойчивости положения равновесия механической системы при наличии в нем максимума или седловой точки потенциальной энергии [1, 2]. Путь обобщения этих теорем на системы, содержащие твердые тела и жидкость, указан в [3] (теорема III, с. 178).

1. Основные уравнения. Рассматриваются трехмерные движения идеальной несжимаемой жидкости, целиком заполняющей область τ с фиксированной границей $\partial\tau$. В декартовых координатах x_1, x_2, x_3 уравнения движения и граничные условия имеют вид

$$\rho Du_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad D\rho = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$u_k n_k = 0 \ \text{при} \ \mathbf{x} \equiv (x_1, \ x_2, \ x_3) \in \partial\tau \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, ρ и p — поля скорости, плотности и давления, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — нормаль к $\partial\tau$, $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$ — потенциал внешнего поля массовых сил, такой, что $|\nabla\Phi| \neq 0$ в τ. По повторяющимся индексам ведется суммирование. Интеграл энергии для (1.1), (1.2) имеет вид суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$T_0 \equiv \int_\tau \rho\frac{u_i u_i}{2}\,d\tau, \quad \Pi_0 \equiv \int_\tau \rho\Phi\,d\tau \tag{1.3}$$

$$E_0 \equiv T_0 + \Pi_0 = \text{const}, \quad d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3$$

Состояния гидростатического равновесия представляют собой решения (1.1), (1.2) вида

$$\mathbf{u} \equiv 0, \ \rho = \rho_0(\Phi), \ p = p_0(\Phi) \tag{1.4}$$

Линеаризация (1.1) на (1.4) дает уравнения

$$\rho_0 \mathbf{u}_t = -\nabla p' - \rho' \nabla \Phi \tag{1.5}$$

$$\rho_t' + (\mathbf{u}\nabla)\rho_0 = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

в которых $\mathbf{u}$, ρ' и p' — поля возмущений скорости, плотности и давления.

2. **Двуслойная жидкость.** Исследуемое на устойчивость состояние есть гидростатическое равновесие(1.4)двух жидкостей с постоянными плотностями $\rho_0 = \rho_+$ и $\rho_0 = \rho_-$, заполняющих части τ_+ и τ_- области τ ($\tau = \tau_+ \bigcup \tau_-$). Граница раздела жидкостей $\partial\sigma$ совпадает с одним из уровней $\Phi = \text{const}$. Пусть ν — единичная нормаль к $\partial\sigma$, направленная в жидкость ρ_-. На $\partial\sigma$ определяется функция $g > 0$, такая, что $g\nu = \nabla\Phi$. Выбор $g > 0$ означает, что Φ нарастает от τ_+ к τ_-, а сила везде на $\partial\sigma$ направлена от τ_- к τ_+.

Линейная задача устойчивости изучается в классе движений с потенциальными полями скорости $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ каждой жидкости при отсутствии возмущений плотности $\rho' \equiv 0$. Описание движений жидкости сводится к рассмотрению кинематического и динамического условий на невозмущенной границе

$$N_t = u_k \nu_k, \ [\rho\varphi_t] = -[\rho] g N \tag{2.1}$$

де N — нормальное смещение границы контакта жидкостей; квадратные скобки означают скачок величины на $\partial\rho$: $[\varphi] \equiv \varphi_+ - \varphi_-$.

Уравнения типа (2.1) часто получают путем линеаризации в эйлеровых координатах со «снесением» граничных условий с неизвестной движущейся границы $\partial\sigma^*$ на невозмущенную границу $\partial\sigma$ [7, 8]. При этом возникают трудности как в трактовке самих полей эйлеровых возмущений в областях между $\partial\sigma^*$ и $\partial\sigma$, так и в интерпретации процедуры снесения. Свободный от этих трудностей метод линеаризации, приводящий к тем же соотношениям (2.1), изложен в [9] (§ 13).

Аналог интеграла энергии (1.3) для задачи (2.1) имеет вид

$$E = T + \Pi = \text{const} \tag{2.2}$$

$$2T \equiv \rho_+ \int\limits_{\tau_+} u_k u_k \, d\tau + \rho_- \int\limits_{\tau_-} u_k u_k \, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\partial\sigma} [\rho\varphi] u_k \nu_k \, dS, \quad 2\Pi \equiv [\rho] \int\limits_{\partial\sigma} g N^2 \, dS$$

При $[\rho] g > 0$ в области τ_- находится более легкая жидкость и интеграл (2.2) позволяет говорить об устойчивости в среднеквадратическом. Простейшее определение устойчивости можно дать, например, в духе [10] (с. 24), измеряя отклонение возмущенного решения от невозмущенного непосредственно с помощью двух величин T и Π. Устойчивость состояния покоя (1.4) при этом будет означать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется другое число $\delta > 0$, такое, что из выполнения в начальный момент времени неравенств $T(0) < \delta$, $\Pi(0) < \delta$ для всех $t > 0$ вытекает $T(t) < \varepsilon$, $\Pi(t) < \varepsilon$. Этот факт можно рассматривать как гидродинамический аналог теоремы Лагранжа об устойчивости состояния равновесия при наличии в нем минимума потенциальной энергии. Действительно, для функционала Π_0 (1.3) можно показать [3, 11], что его первая вариация обращается в нуль в силу условий равновесия, а вторая равна величине Π (2.2).

Для демонстрации неустойчивости при $[\rho]g < 0$ вводится функционал

$$(2.3) \qquad W - \int_{\partial\sigma} [\rho\varphi] N \, dS$$

производная которого по времени в силу уравнений (2.1) равна

$$(2.4) \qquad dW/dt = 2(T - \Pi) \equiv 2(E - 2\Pi)$$

с T, Π, E из (2.2). Поскольку при $[\rho]g < 0$ всегда $\Pi < 0$, то $dW/dt > 2E$. Выбирая в качестве начальных данных возмущение с $E > 0$, получаем для (2.3) линейную оценку нарастания $W > W_0 + 2Et$. Из нее вытекает неравенство

$$(2.5) \qquad \int_{\partial\sigma} ([\rho\varphi]^2 + N^2) \, dS > 2W_0 + 4Et$$

означающее неустойчивость в смысле нарастания среднеквадратических значений N и (или) $[\rho\varphi]$. В силу условий

$$(2.6) \qquad \int_{\partial\sigma} [\rho\varphi]/g \, dS = \mathrm{const}$$

нарастание $[\rho\varphi]$ не может происходить за счет входящей в определение потенциала функции, зависящей только от времени. Равенство (2.6) проверяется прямым вычислением производной по времени с использованием (2.1) и условия несжимаемости жидкости в виде

$$\int_{\partial\sigma} N \, dS = 0$$

Постоянная в (2.6) может быть сделана равной нулю выбором постоянных в определениях φ_+ и φ_-.

Неравенство (2.5) можно рассматривать как аналог теоремы Ляпунова о неустойчивости при наличии в положении равновесия максимума потенциальной энергии ([1], с. 90).

3. **Учет поверхностного натяжения.** Здесь для упрощения изложения поле тяжести полагается однородным $\Phi = gx_3$, $g = \mathrm{const} > 0$, коэффициент поверхностного натяжения α на границе раздела жидкостей постоянен. Рассматриваются только две постановки. В первой из них область τ — слой $a < x_3 < b$, так что поверхности $\partial\tau$ и $\partial\sigma$ не пересекаются. Интегралы энергии будут иметь смысл для периодических или быстро затухающих по x_1, x_2 движений. Во второй постановке область τ конечна, поверхностное натяжение на $\partial\tau$ отсутствует, поверхности $\partial\sigma$ и $\partial\tau$ пересекаются под прямым углом. Угол смачивания также равен $\pi/2$. При сформулированных условиях поверхность $\partial\sigma$ задается уравнением $x_3 \equiv 0$. Соотношения (2.1) обобщаются так [11]:

$$N_t = u_3, \quad [\rho\varphi_t] = -[\rho] gN + \alpha\Delta N, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Кинетическая энергия (2.2) не изменяется, потенциальная принимает вид

$$(3.1) \qquad \Pi = \int_{\partial\sigma} \{[\rho] gN^2 + \alpha(\nabla N)^2\} \, dx_1 \, dx_2, \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

При $[\rho]g > 0$ будет иметь место устойчивость в среднеквадратическом. Отличие от случая $\alpha = 0$ состоит в том, что величина отклонения возмущенного решения от невозмущенного теперь измеряется интегралами T и Π, второй из которых содержит не только величину N, но и ее первые производные.

Функционал W, подходящий для демонстрации неустойчивости при $[\rho]g < 0$, остается прежним ((2.3), (2.4)):

$$W = \int_{\partial\sigma} [\rho\varphi] N\, dx_1\, dx_2, \quad dW/dt = 2(T - \Pi) \tag{3.2}$$

только П берется уже из (3.1). Существенное изменение состоит в том, что в силу неравенств $[\rho]g < 0$, $\alpha > 0$ интеграл (3.1) может быть либо положительно-определенным, либо не иметь определенного знака. В первом случае будет иметь место устойчивость равновесия тяжелой жидкости над легкой (стабилизация поверхностным натяжением [11]). Наличие устойчивости во втором случае можно показать, записав (3.2) в виде $dW/dt = 2(2T - E)$ и выбрав начальные данные с $E < 0$. Для этого достаточно взять, например, $T(0) = 0$, $\Pi(0) < 0$. Тогда

$$dW/dt > 2|E|, \quad W > W_0 + 2|E|t \tag{3.3}$$

после чего рассмотрение проводится как в п. 2.

Величина П (3.1) по-прежнему совпадает со второй вариацией потенциальной энергии ([11], с. 127). Поэтому при наличии возмущений с $\Pi > 0$ и $\Pi < 0$ можно сказать, что потенциальная энергия не достигает в положении равновесия ни максимума, ни минимума. При такой интерпретации вытекающее из (3.3) утверждение о неустойчивости можно рассматривать как аналог теоремы Четаева ([2], с. 40).

4. Непрерывная стратификация. Вся область τ теперь заполнена неоднородной жидкостью с непрерывно изменяющейся плотностью $\rho(\mathbf{x}, t)$. Рассматриваются состояния покоя (1.4) с гладкими функциями $\rho_0(\Phi)$, $p_0(\Phi)$. Интеграл энергии для малых возмущений (1.5), (1.2) имеет вид

$$E = T + \Pi = \text{const}, \quad 2T = \int_\tau \rho_0 u_k u_k\, d\tau \tag{4.1}$$

$$2\Pi = -\int_\tau \Phi'(\rho_0)\rho^2\, d\tau, \quad \Phi' \equiv d\Phi/d\rho_0$$

При $\Phi' < 0$ из положительной определенности интегралов (4.1) вытекает устойчивость состояний (1.4) в среднеквадратическом. Этот факт также можно рассматривать как гидродинамический аналог теоремы Лагранжа. Такая его трактовка в нелинейной постановке дана в [12].

Теперь в терминах точных уравнений (1.1) будет выделен класс движений, в котором изучаются случаи неустойчивости. После исключения давления из (1.1) получается уравнение «вмороженности» векторного поля $\lambda(\mathbf{x}, t)$

$$D\lambda = (\lambda\nabla)\mathbf{u} \tag{4.2}$$

$$\lambda \equiv \sigma + \nabla\rho \times \nabla a, \quad \sigma \equiv \operatorname{rot}(\rho\mathbf{u})$$

где функция $a(\mathbf{x}, t)$ по определению удовлетворяет уравнению

$$Da = \Phi - {}^1/_2 u_i u_i + F(\rho) \tag{4.3}$$

в котором $F(\rho)$ — произвольная функция аргумента ρ. Начальные данные $a(\mathbf{x}, 0)$ также произвольны. Соотношение (4.2) можно рассматривать как обобщение справедливого для однородной жидкости свойства «вмороженности» поля завихренности, вытекающего из (4.2) при $\rho \equiv \text{const}$. При такой трактовке обобщениями потенциальных течений будут потоки с $\lambda \equiv 0$, для которых из определения величины λ после интегрирования вытекает соотношение

$$\rho\mathbf{u} = \nabla\varphi + a\nabla\rho \tag{4.4}$$

в котором функция φ (x, t) выбирается из условий div u $= 0$ в τ и u·n $= 0$ на $\partial\tau$.

Следует отметить, что (4.4) — представление Клебша [8] для векторного поля ρu. Проведенный вывод (4.4) из (1.1) показывает, каким образом представление Клебша естественно возникает при интегрировании уравнений движения неоднородной жидкости. Из вывода ясно, что соотношение (4.4) справедливо, например, если движение возникло из состояния покоя, или, более широко, из состояния с σ (x, 0) $\equiv 0$. Действительно, пользуясь произволом в выборе a (x, 0), можно взять a (x, 0) $\equiv 0$ и равенство λ (x, t) $\equiv 0$ (4.2) будет обеспечено.

Второе принимаемое ограничение класса движений состоит в том, что лагранжево возмущение поля плотности равно нулю. Другими словами, начальные данные ρ (x, 0) возмущенного движения получены изменением координаты каждой жидкой частицы при неизменной ее плотности. Этот факт просто записывается при помощи поля лагранжевых смещений ξ (x, t) [9].

Окончательная система линеаризованных на (1.4) уравнений движения с учетом обоих принятых ограничений записывается в виде

$$a_t = -\Phi'(\rho_0)\rho, \quad \rho = -(\xi\nabla)\rho_0, \quad \xi_t = \mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\xi = 0 \tag{4.5}$$

с граничными условиями на $\partial\tau$

$$\xi\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{4.6}$$

и начальными условиями

$$a(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \xi(\mathbf{x}, 0) = \xi_0(\mathbf{x}) \tag{4.7}$$

причем первое уравнение в (4.5) получено после линеаризации (4.3) и выбора $F(\rho) = -\Phi(\rho)$.

Из a (x, 0) $= 0$, ρ_0u (x, 0) $= \nabla\varphi$, div u $= 0$ в τ и u·n $= 0$ на $\partial\tau$ вытекает u (x, 0) $\equiv 0$ ([13], с. 112). Для поля a (x, t) из (4.5)—(4.7) следует

$$dI/dt = 0, \quad I = 0; \quad I \equiv \int_\tau a\, d\tau \tag{4.8}$$

Для демонстрации неустойчивости состояний (1.4) при $\Phi' > 0$ функционал W теперь выбирается в форме

$$W = \int_\tau \rho a\, d\tau \tag{4.9}$$

Вычисление производной по времени в силу (4.5)—(4.7) дает

$$dW/dt = 2(T - \Pi) \equiv 2(2T - E) \tag{4.10}$$

с T, П, E из (4.1). Если повсюду в τ имеется $\Phi' > 0$, то $\Pi < 0$. Поскольку в рассматриваемом классе движений $T(0) = 0$, то $E < 0$ и из (4.10) вытекает линейная оценка нарастания $W > W_0 + 2\,|E|\,t$. Теперь видно, что

$$\int_\tau (\rho^2 + a^2)\, d\tau > 2W_0 + 4|E|t \tag{4.11}$$

В соответствии с (4.11) нарастают среднеквадратичные значения ρ и a. Рост возмущений плотности действительно имеет физический смысл неустойчивости. В то же время рост величины a может осуществляться за счет входящей в нее аддитивно функции времени и не означать нарастания скорости. Эту возможность исключает равенство $I = 0$ (4.8).

Пусть теперь функция ρ_0 (Φ) не монотонна. В этом случае в τ имеются области как нарастания, так и убывания плотности по направлению вектора силы. Для гладких ρ_0 (Φ) всегда существуют значения Φ, при которых $d\rho_0/d\Phi = 0$, поэтому выражения (4.1), (4.5) теряют смысл. Однако для возмущений с $\rho = -(\xi\cdot\nabla)\rho_0$ потенциальная энергия (4.1) и первое из уравнений (4.5) переписываются в формах, не имеющих особенностей:

$$2\Pi = \int\limits_{\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\xi_k\rho\, d\tau, \quad a_t = \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\xi_k$$

Для рассматриваемого случая в окрестности положения равновесия имеются возмущения как с $\Pi > 0$, так и с $\Pi < 0$. Выбор начальных данных с $T(0) = 0$, $\Pi(0) < 0$ опять приводит к (4.9)—(4.11).

Учитывая, что Π — вторая вариация потенциальной энергии Π_0 (1.3), неравенство (4.11) можно интерпретировать как линейный гидродинамический аналог теорем Ляпунова и Четаева о неустойчивости.

5. О выборе функционалов W. Эвристической основой выбора функционалов W (2.3), (4.9) послужила аналогия с конечномерными гамильтоновыми системами. Если q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ — обобщенные координаты и импульсы такой системы, то функция Ляпунова в доказательстве неустойчивости имеет вид $W = p_i q_i$ ([2], с. 40). Выражения (2.3), (4.9) сходны по структуре с точностью до замены суммирования по степеням свободы на интегрирование. Действительно, в гамильтоновых формулировках гидродинамики двуслойной жидкости роль канонических переменных играют $[\rho\varphi]$ и $\xi\cdot\mathbf{v}$ [4], а для неоднородной жидкости — величины a и ρ [5].

Особо следует отметить ключевую роль принятых в работе ограничений классов движений. Для этого заметим, что при помощи поля лагранжевых смещений ξ функционал W (2.3), (3.2) можно записать в виде суммы объемных интегралов

$$W = \rho_+\int\limits_{\tau_+}\mathbf{u}\xi\, d\tau + \rho_-\int\limits_{\tau_-}\mathbf{u}\xi\, d\tau \tag{5.1}$$

и понимать его более широко, считая поле скорости вихревым ($\omega \equiv \operatorname{rot}\mathbf{u} \neq 0$), удовлетворяющим в $\tau_\pm$ уравнениям

$$\rho_\pm\mathbf{u}_t = -\nabla p, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = \xi_t \tag{5.2}$$

на $\partial\tau$ — условиям непротекания

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \xi\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{5.3}$$

и на $\partial\sigma$ — кинематическому и динамическому условиям

$$N_t = \xi_t\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad [p] = [\rho]\,\xi\cdot\nabla\Phi \tag{5.4}$$

которые могут быть получены методом [9] (см. комментарий к (2.1)).

Для функционала (5.1) в силу (5.2)—(5.4) без предположения о потенциальности возмущений получается $dW/dt = 2(T - \Pi)$ с T и Π из (2.2), причем кинетическая энергия T берется только в форме суммы объемных интегралов. При $\Pi < 0$ для (5.1) справедливо неравенство $W > W_0 + 2Et$, приводящее вместо (2.5) к оценке

$$\rho_+\int\limits_{\tau_+}(|\mathbf{u}|^2 + |\xi|^2)\, d\tau + \rho_-\int\limits_{\tau_-}(|\mathbf{u}|^2 + |\xi|^2)\, d\tau > 2W_0 + 4Et \tag{5.5}$$

из которой можно сделать ошибочный вывод о неустойчивости в норме, среднеквадратической по скоростям и смещениям. Дело здесь в том, что из-за отсутствия в идеальной жидкости затухания возмущений скорости, смещения жидких частиц, вообще говоря, линейно растут даже при устойчивой плотностной стратификации. Поэтому линейное нарастание величины (5.1) не всегда соответствует физическому факту неустойчивости, Для пояснения рассмотрим вихревые течения в областях τ_+ и τ_- при наличии устойчивого плотностного расслоения $[\rho]g > 0$. Из (5.2) следует стационарность полей вихря $\omega_t \equiv 0$, больше никаких ограничений на ω (x) не налагается. Выбрав в $\tau_\pm$ некоторые поля вихря $\omega_\pm$ (x) и наложив условие $N = \xi \cdot \nu = 0$ на $d\sigma$, в каждой из областей $\tau_\pm$ можно построить стационарные решения $\mathbf{u}_\pm$ (x), в которых всегда $p_\pm \equiv 0$. Условия (5.3), (5.4) при этом выполнены. Для таких решений $\xi = \xi_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x})t$ и имеется линейный рост функционала (5.1) и квадратичный — (5.5). В то же время рассматриваемое возмущение стационарно и никакой неустойчивости, разумеется, нет.

Таким образом, принятое в пп. 2, 3 ограничение класса возмущений потенциальными имеет принципиальное значение. Именно для потенциальных возмущений функционал (5.1) сводится к формам (2.3), (3.2), позволяющим рассматривать не произвольные смещения жидких частиц, а только нормальные смещения поверхности раздела.

То же самое можно сказать о функционале (4.9) и классе движений (4.5). Использование (4.4), (4.5) позволяет свести (4.9) к виду

$$W = \int_\tau \rho_0 \mathbf{u} \cdot \xi \, d\tau .$$

Линейный рост функционала для возмущений, не представляемых в виде (4.4), не означает неустойчивости. Здесь даже при устойчивой стратификации $\Phi' < 0$ могут линейно нарастать компоненты ξ, параллельные поверхностям $\rho_0 = \text{const}$.

Замечания. 1°. При записи интегралов от сумм квадратов возмущений (2.5), (4.11), (5.5) подразумевается что для каждой из рассмотренных постановок введены безразмерные переменные. В качестве масштабов длины и времени во всех случаях может быть взят размер сосуда L и величина $(L/g)^{1/2}$.

2°. Использование эквивалентности эффектов стратификации и вращения в форме [6, 7] (гл. 8) позволяет прямыми переобозначениями получить утверждения о неустойчивости двух классов вращающихся течений однородной жидкости. Сюда относятся трансляционно-инвариантные и вращательно-симметричные потоки. Примером последних является течение Куэтта между вращающимися цилиндрами при условии убывания квадрата циркуляции скорости с увеличением радиуса. Для получения соответствующих формулировок достаточно взять из [6, 7] эквиваленты плотности и поля тяжести и воспользоваться формулировками данной работы.

3°. С математической точки зрения приведенные утверждения о неустойчивости имеют характер априорных оценок, поскольку соответствующие теоремы существования решений не доказаны.

4°. Настоящие результаты, поскольку они носят линейный характер, можно соотносить с выводами спектральной теории.

5°. Достоинствами излагаемого подхода является его простота, общность рассмотрения, идейное единство с механикой конечномерных систем, а также наличие принципиальной возможности рассмотрения нелинейных постановок.

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 472 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат. 1955. 207 с.
3. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 439 с.
4. *Захаров В. Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86—94.

5. *Воронович А. Г.* Гамильтоновский формализм для внутренних волн в океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 1. С. 82—91.
6. *Владимиров В. А.* О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения // ПМТФ. 1985. № 3. С. 58—68.
7. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. 1985. 318 с.
8. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
9. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир. 1973. 288 с.
10. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5—113.
11. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука. 1976. 504 с.
12. *Владимиров В. А.* Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 727—733.
13. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука. 1964. 368 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 28.V.1987