УДК 531.38 + 532.5

О КВАДРАТИЧНЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Рубановский В. Н.

Рассматриваются общие случаи интегрируемости уравнений Кирхгофа—Клебша [1, 2] с четвертым квадратичным интегралом, не зависящим явно от времени. Приведено доказательство теоремы Стеклова [3] о том, что четыре случая, указанные Клебшем [2], Стекловым [3] и Ляпуновым [4], являются единственными, для которых уравнения движения по инерции тела в жидкости допускают четвертый квадратичный интеграл. Дан анализ утверждения Ляпунова [4], что его случай интегрируемости можно рассматривать как предельный для случая Стеклова, а третий случай Клебша — как предельный для второго случая Клебша. Показано, что указанный Колосовым [6] четвертый интеграл уравнений Кирхгофа—Клебша не приводит к другим интегрируемым случаям, отличным от случаев Стеклова и Ляпунова.

В последние годы в печати появились работы [8—10], в которых «открываются» новые случаи интегрируемости уравнений движения заряженного тела в магнитном поле, изоморфных уравнениям Кирхгофа—Клебша, и тем самым отрицается справедливость теоремы Стеклова. Это побудило автора провести анализ работы [3], который подтвердил безупречность указанной теоремы.

1. Рассмотрим задачу о движении по инерции свободного тела, ограниченного односвязной поверхностью, в беспредельной по всем направлениям однородной несжимаемой идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности.

Кинетическая энергия системы тело плюс жидкость определяется выражением [2]

$$T=\frac{1}{2}(a_{ij}x_ix_j+2b_{ij}x_iy_j+c_{ij}y_iy_j) \tag{1.1}$$

$$a_{ij}=a_{ji},\quad b_{ij}=b_{ji},\quad c_{ij}=c_{ji}$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — определенные для данной системы постоянные, x_i и y_i — проекции на оси неизменно связанной с телом второй центральной прямоугольной системы осей координат [3] $Ox_1x_2x_3$, в которой $c_{ij}=0$ $(i\neq j)$, x-вектора количеств движения системы (импульсивной силы) и y-вектора ее кинетического момента относительно центральной точки O (импульсивной пары). Здесь и всюду далее по повторяющимся индексам i, j ведется суммирование от 1 до 3.

Движение тела в жидкости описывается уравнениями [1—3]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{x}\times\frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}},\quad \frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{y}\times\frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}}+\mathbf{x}\times\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \tag{1.2}$$

Известны три первых интеграла этих уравнений [1]

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathrm{const},\quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathrm{const},\quad T=\mathrm{const} \tag{1.3}$$

Поскольку к уравнениям (1.1) применима [2] теория последнего множителя Якоби, особое значение приобретает нахождение в дополнение к трем интегралам (1.3) четвертого, не зависящего явно от времени и содержащего произвольную постоянную.

Известны пять случаев, указанные Клебшем [2], Стекловым [3] и Ляпуновым [4], когда уравнения (1.2) допускают четвертый интеграл

$V = \text{const}$. Для них $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. В одном из этих случаев интеграл V линейный и имеет вид $V = y_3 = \text{const}$, если $a_{11} = a_{22}$, $b_{11} = b_{22}$, $c_{11} = c_{22}$ (первый случай Клебша). В остальных случаях четвертый интеграл квадратичный и имеет вид

$$V = {}^1/_2\,(A_{ii}x_i^2 + 2B_{ii}x_iy_i + C_{ii}y_i^2) \tag{1.4}$$

При этом для второго случая Клебша (величина τ произвольна)

$$a_{11} = a + \tau c_{22}c_{33}\ (1\ 2\ 3),\quad b_{11} = b_{22} = b_{33} = b \tag{1.5}$$
$$A_{11} = \tau c_{11}\ (1\,2\,3),\quad B_{11} = B_{22} = B_{33} = 0,\quad C_{11} = C_{22} = C_{33} = -1$$

Для третьего случая Клебша

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b,\quad c_{11} = c_{22} = c_{33} = c \tag{1.6}$$
$$A_{11} = a_{22}a_{33},\quad C_{11} = -ca_{11}\ (1\ 2\ 3),\quad B_{11} = B_{22} = B_{33} = 0$$

Для случая Стеклова (величина σ произвольна)

$$b_{11} = b + \sigma c_{22}c_{33},\quad a_{11} = a + \sigma^2 c_{11}(c_{22} - c_{33})^2\ (1\ 2\ 3) \tag{1.7}$$
$$A_{11} = \sigma^2(c_{22} - c_{33})^2,\quad B_{11} = -\sigma c_{11}\ (1\ 2\ 3),\quad C_{11} = C_{22} = C_{33} = 1$$

Наконец, для случая Ляпунова

$$a_{11} = a + (b_{22} - b_{33})^2 c^{-1}\ (1\ 2\ 3),\quad c_{11} = c_{22} = c_{33} = c \tag{1.8}$$
$$A_{11} = b_{11}(b_{22} + b_{33})^2,\quad B_{11} = cb_{11}(b_{22} + b_{33}),\quad C_{11} = c^2b_{11}\ (1\ 2\ 3)$$

Второй и третий случай Клебша можно характеризовать одним условием [2]

$$\frac{a_{22} - a_{33}}{c_{11}} = \frac{a_{33} - a_{11}}{c_{22}} = \frac{a_{11} - a_{22}}{c_{33}} \tag{1.9}$$

налагаемым на коэффициенты формы (1.1), а случаи Стеклова и Ляпунова — двумя условиями [4]

$$\frac{b_{22} - b_{33}}{c_{11}} = \frac{b_{33} - b_{11}}{c_{22}} = \frac{b_{11} - b_{22}}{c_{33}} \tag{1.10}$$
$$a_{11} - \frac{(b_{22} - b_{33})^2}{c_{11}} = a_{22} - \frac{(b_{33} - b_{11})^2}{c_{22}} = a_{33} - \frac{(b_{11} - b_{22})^2}{c_{33}}$$

Стеклов [3] поставил задачу о нахождении всех случаев, когда уравнения (1.2) допускают четвертый общий интеграл в виде целой однородной функции переменных x_j, y_j степени n и дал ее решение для $n = 1$ и $n = 2$. Он показал, что для $n = 1$ других случаев, отличных от первого случая Клебша, не существует. Для этого случая тело обладает свойством не изменять своего вида от поворота вокруг оси x_3 на 90°. В частности, при $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$ этот случай вырождается в случай Кирхгофа [1], отвечающий телу вращения.

Для $n = 2$ показано ([3], гл. IV, с. 107 и поправка к гл. IV, с. IX—X), что других случаев, отличных от (1.5)—(1.8), не существует. Далее это утверждение будем называть теоремой Стеклова.

2. Приведем расширенное доказательство теоремы Стеклова. Четвертый квадратичный однородный интеграл V уравнений (1.2) будем искать в виде, аналогичном (1.1) при замене T на V и a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} на A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, при этом $A_{ij} = A_{ji}$, $C_{ij} = C_{ji}$. Представим T и V в виде

$$T = T_{xx} + T_{yy} + T_{xy},\quad V = V_{xx} + V_{yy} + V_{xy}$$

где в правых частях первые, вторые и третьи члены обозначают части T и V, зависящие соответственно только от x_i, только от y_i и одновременно от x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$.

Вычислим производную по времени $V^{\bullet} = W$ от функции V в силу уравнений (1.2) и представим ее в виде

$$W = W_{xxx} + W_{xxy} + W_{xyy} + W_{yyy}$$

где слагаемые справа обозначают части W, в которые переменные x_i, y^i входят соответственно в комбинациях $x_ix_jx_k$, $x_ix_jy_k$, $x_iy_jy_k$, $y_iy_jy_k$, $(i, j, k = 1, 2, 3)$. Требование тождественного по x_i, y_i равенства нулю функции W приводит к необходимости выполнения следующих четырех тождеств:

(2.1) $$W_{xxx} = \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{xx}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial V_{xy}}{\partial \mathbf{y}}\right) = 0$$

(2.2) $$W_{xxy} = \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{xx}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{xy}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial V_{xy}}{\partial \mathbf{y}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial T_{xx}}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial V_{yy}}{\partial \mathbf{y}}\right) + \mathbf{y} \cdot \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{xy}}{\partial \mathbf{y}}\right) = 0$$

(2.3) $$W_{xyy} = \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{xy}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial V_{yy}}{\partial \mathbf{y}}\right) +$$
$$+ \mathbf{y} \cdot \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{xy}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{yy}}{\partial \mathbf{y}}\right) = 0$$

(2.4) $$W_{yyy} = \mathbf{y} \cdot \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial V_{yy}}{\partial \mathbf{y}}\right) = 0$$

Поскольку в (2.1)—(2.4) функции T и V входят симметричным образом, то справедлива следующая

Лемма. Если уравнения (1.2) допускают квадратичный однородный первый интеграл $V = \text{const}$, не зависящий явно от времени, то уравнения (1.2) при замене в них T на V будут допускать интеграл $T = \text{const}$.

Отсюда следует, что если для уравнения (1.2) известен какой-либо общий случай интегрируемости с четвертым квадратичным однородным интегралом V, то для них можно сразу же указать другой общий случай интегрируемости, поменяв местами роли функций T и V. В этом смысле общие случаи интегрируемости уравнений (1.2) с четвертым квадратичным однородным интегралом являются парными. Примерами таких пар служат второй и третий случаи Клебша и случаи Стеклова и Ляпунова. Для каждой такой пары интегрируемых случаев наборы четырех первых интегралов, необходимые для сведения задачи к квадратурам, состоят из одних и тех же интегралов. Поэтому для такой пары общих решений уравнений (1.2) движения изображающих точек в пространстве переменных x_i, y_i происходят по одному и тому же двумерному интегральному многообразию, однако для них движения изображающих точек, определяемые уравнениями (1.2) при одних и тех же начальных условиях, будут различными.

Рассмотрим тождество (2.4). Оно приводит к соотношениям

(2.5) $$\sum_{(1 2 3)} (c_{22} - c_{33}) C_{11} = 0$$

(2.6) $$(c_{33} - c_{11}) C_{23} = 0, \quad (c_{11} - c_{22}) C_{23} = 0 \quad (1\ 2\ 3)$$

Уравнения (2.6) можно заменить одним уравнением

(2.7) $$(C_{23}{}^2 + C_{31}{}^2 + C_{12}{}^2)\, \Delta_c = 0. \quad \Delta_c = \sum_{(1 2 3)} (c_{33} - c_{11})^2$$

Действительно, складывая соотношения (2.6), получаем $(c_{33} - c_{22})C_{23} = 0$ (1 2 3); возводя это соотношение, а также соотношения (2.6) в квадрат и почленно все их складывая, получаем (2.7).

Из (2.5) при $\Delta_c \neq 0$ находим

(2.8) $$C_{11} = C + \tau c_{11} \quad (1\ 2\ 3)$$

где C, τ — неопределенные постоянные.

Проведем анализ уравнений (2.5), (2.7).

Пусть $\Delta_c \neq 0$. Тогда из (2.7) следует, что $C_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Учитывая (2.8), получим

(2.9) $$V_{yy} = {}^1/_2 Cy^2 + \tau T_{yy} \quad (y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

Это соотношение приводит к необходимости анализа случаев, когда

а) $C \neq 0$, $\tau = 0$; б) $C = 0$, $\tau \neq 0$ $(\tau = 1)$;

в) $C = \tau = 0$; г) $C \neq 0$, $\tau \neq 0$ $(\tau = 1)$.

В случаях б) и г) можно считать $\tau = 1$; для этого следует постоянные c_{ii} заменить на $c_{ii}\tau^{-1}$ $(i = 1, 2, 3)$. Для случаев а) —г) при учете (2.9) имеем

а) $V = {}^1/_2 Cy^2$; б) $V_{yy} = T_{yy}$; в) $V_{yy} = 0$;

г) $V = {}^1/_2 Cy^2 + T_{yy}$.

Анализ случая б) сводится к анализу случая в). Действительно, поскольку T — интеграл уравнений (1.2), то отыскание искомого интеграла V можно свести к задаче нахождения интеграла $U = V - T = U_{xy} + U_{xx}$, для которого $U_{yy} = 0$. По аналогичным соображениям анализ случая г) приводится к анализу случая а).

Приходим к следующему заключению.

При $\Delta_c \neq 0$ следует различать два случая.

Случай 1. $V_{yy} = {}^1/_2 Cy^2$, $C \neq 0$, $\Delta_c \neq 0$.

Случай 2. $V_{yy} = 0$.

Пусть теперь $\Delta_c = 0$. Тогда необходимо рассмотреть

Случай 3. $T_{yy} = {}^1/_2 cy^2$, $c \neq 0$ $(c = c_{11} = c_{22} = c_{33})$.

Далее, тождеству (2.4) можно удовлетворить считая $T_{yy} = 0$. Это приводит к следующему случаю, который Стеклов [3] не рассматривал (потому что для задачи о движении тела в жидкости он физически нереализуем и может представлять интерес только с математической точки зрения):

Случай 4. $T_{yy} = 0$.

Проведем анализ каждого случая в отдельности.

3. *Случай* 1. Рассмотрим тождество (2.3). Оно распадается на три следующие:

$$\sum_{(1\,2\,3)} (c_{33} - c_{22}) B_{11} y_2 y_3 + c_{22} y_2 \frac{\partial V_{xy}}{\partial x_3} - c_{33} y_3 \frac{\partial V_{xy}}{\partial x_2} +$$
$$+ C\left(y_3 \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_3}\right) = 0 \quad (1\,2\,3)$$

которые после подстановки выражений

$$\frac{\partial V_{xy}}{\partial x_1} = B_{1i} y_i, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_1} = b_{1i} y_i \quad (1\,2\,3)$$

приводят к соотношениям

(3.1) $$(c_{22} - c_{33})B_{11} + c_{33}B_{22} - c_{22}B_{33} + C\,(b_{33} - b_{22}) = 0 \quad (1\,2\,3)$$

(3.2) $$(c_{33} - c_{11})B_{12} + c_{33}B_{21} - Cb_{21} = 0 \quad (1\,2\,3)$$
$$(c_{22} - c_{33})B_{21} - c_{33}B_{12} + Cb_{12} = 0 \quad (1\ 2\ 3)$$

(3.3) $$c_{11}B_{21} = Cb_{21}, \quad c_{22}B_{12} = Cb_{12} \quad (1\,2\,3)$$

Подставляя в (3.2) значения Cb_{21} и Cb_{12} из (3.3), получаем уравнения

$$(c_{11} - c_{33})(B_{12} + B_{21}) = 0, \quad (c_{33} - c_{22})(B_{12} + B_{21}) = 0 \quad (1\,2\,3)$$

которые приводят к соотношению

$$\Delta_c \sum_{(123)} (B_{23} + B_{32})^2 = 0$$

Отсюда следует, что

(3.4) $$B_{23} + B_{32} = 0 \quad (1\,2\,3)$$

Вычтем теперь из второго равенства (3.3) первое; тогда при учете (3.4) получим уравнения

$$(c_{11} + c_{22})B_{12} = 0 \quad (1\,2\,3)$$

из которых в предположении, что

(3.5) $$D_c = (c_{11} + c_{22})(c_{22} + c_{33})(c_{33} + c_{11}) \neq 0$$

находим $B_{12} = B_{23} = B_{31} = 0$, а принимая во внимание (3.4) и (3.2), дополнительно находим

$$B_{21} = B_{32} = B_{13} = 0, \quad b_{12} = b_{21} = 0 \quad (1\,2\,3)$$

В результате имеем

(3.6) $$B_{23} = B_{32} = 0, \quad b_{23} = b_{32} = 0 \quad (1\,2\,3)$$
$$V_{xy} = B_{ii}x_iy_i, \quad T_{xy} = b_{ii}x_iy_i$$

Далее, складывая уравнения (3.1), получаем соотношение

$$\sum_{(123)} (c_{22} - c_{33}) B_{11} = 0$$

из которого находим

(3.7) $$B_{11} = B + \rho c_{11} \quad (1\,2\,3)$$

где B, ρ — неопределенные постоянные.

Уравнения (3.1) при учете (3.7) запишем в виде

(3.8) $$\rho c_{11} (c_{22} - c_{33}) = C\,(b_{22} - b_{33}) \quad (1\,2\,3)$$

Умножая эти уравнения соответственно на b_{11}, b_{22}, b_{33} и складывая, приходим к соотношению

(3.9) $$\rho K = 0, \quad K = \sum_{(123)} b_{11}c_{11}(c_{22} - c_{33})$$

Следовательно, или а) $K = 0$, или б) $\rho = 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) Пусть $\rho \neq 0$ и, следовательно, $K = 0$.

Из равенства $K = 0$ находим

(3.10) $$b_{11} = b + \sigma c_{22}c_{33} \quad (1\,2\,3)$$

где b, σ — неопределенные постоянные. Подстановка значений (3.10) в уравнения (3.8) приводит их к виду

$$(\rho + \sigma C)c_{11}(c_{22} - c_{33}) = 0 \quad (1\,2\,3)$$

Отсюда, поскольку $\Delta_c \neq 0$, получаем соотношение

(3.11) $$\rho = -\sigma C, \quad \sigma \neq 0$$

Рассмотрим теперь тождество (2.2). Оно распадается на три следующие:

(3.12) $$c_{11}\left(x_3 \frac{\partial V_{xx}}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial V_{xx}}{\partial x_3}\right) + C\left(x_2 \frac{\partial T_{xx}}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T_{xx}}{\partial x_2}\right) -$$
$$- Lx_2x_3 = 0 \quad (1\,2\,3)$$
$$L = \sum_{(123)} (b_{22} - b_{33}) B_{11}$$

которые после подстановки выражений

$$\frac{\partial V_{xx}}{\partial x_1}=A_{1i}x_i, \quad \frac{\partial T_{xx}}{\partial x_{1_i}}=a_{1i}x_i \quad (1\,2\,3)$$

приводят к соотношениям

(3.13) $\quad C\,(a_{33}-a_{22})-c_{11}\,(A_{33}-A_{22})=L \quad (1\,2\,3)$

(3.14) $\quad Ca_{12}=c_{11}A_{12}, \quad Ca_{12}=c_{22}A_{12}, \quad Ca_{12}=c_{33}A_{12} \quad (1\,2\,3)$

Комбинируя уравнения (3.14), получаем равенства

$$(c_{11}-c_{22})A_{12}=0, \quad (c_{22}-c_{33})A_{12}=0, \quad (c_{33}-c_{11})A_{12}=0 \quad (1\,2\,3)$$

а из последних — соотношение $(A_{12}^2+A_{23}^2+A_{31}^2)\Delta_c=0$. Отсюда находим $A_{12}=A_{23}=A_{31}=0$, а из (3.14) дополнительно получаем $a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$.

Итак

(3.15) $\quad A_{12}=A_{23}=A_{31}=0, \quad a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$

$$V_{xx}={}^1\!/_2A_{ii}x_i^2, \quad T_{xx}={}^1\!/_2a_{ii}x_i^2$$

Подставляя в (3.12) значения (3.7), (3.10) и принимая во внимание (3.11), представим L в виде

(3.16) $\quad L=-\sigma^2CM, \quad M=\sum\limits_{(1\,2\,3)}c_{11}^2\,(c_{33}-c_{22})=$

$$=(c_{11}-c_{21})\,(c_{22}-c_{33})\,(c_{33}-c_{11})$$

Сложим теперь уравнения (3.13); тогда получим при учете (3.16) соотношение

$$\sum_{(1\,2\,3)}(c_{33}-c_{22})\,(A_{11}+3\sigma^2Cc_{11}^2)=0$$

из которого находим

(3.17) $\quad A_{11}=A+\sigma^2Cc_{11}\,(\mu-3c_{11}) \quad (1\,2\,3)$

где A, μ — неопределенные постоянные.

Подставляя в уравнения (3.18) значения (3.16), (3.17), представим их в виде

(3.18) $\quad a_{22}-a_{33}-\sigma^2c_{11}\,(c_{22}-c_{33})[\mu-3\,(c_{22}+c_{33})]=\sigma^2M \quad (1\,2\,3)$

Наконец, тождество (2.1) при учете (3.6), (3.15) приводит к соотношению

(3.19) $\quad \sum\limits_{(1\,2\,3)}[B_{11}\,(a_{33}-a_{22})-b_{11}\,(A_{33}-A_{22})]=0$

Это соотношение при учете (3.7), (3.10), (3.11) перепишем в виде

$$C\sum_{(1\,2\,3)}c_{11}\,(a_{22}-a_{33})+\sum_{(1\,2\,3)}c_{22}c_{33}\,(A_{22}-A_{33})=0$$

Подставляя сюда значения (3.17) и значение $a_{22}-a_{33}$ из (3.18), получаем равенство

$$\mu\sum_{(1\,2\,3)}(c_{33}-c_{22})\,(c_{11}^2+c_{22}c_{33})-3\sum_{(1\,2\,3)}c_{22}c_{33}\,(c_{33}^2-c_{22}^2)-Mc_{ii}=0$$

которое при помощи тождеств

(3.20) $\quad \sum\limits_{(1\,2\,3)}c_{22}c_{33}\,(c_{33}-c_{22})=M, \quad \sum\limits_{(1\,2\,3)}c_{22}c_{33}\,(c_{33}^2-c_{22}^2)=Mc_{ii}$

представим в виде $(\mu-2c_{ii})M=0$. Отсюда находим

(3.21) $\quad \mu=2c_{ii}$

Умножим теперь уравнения (3.18) соответственно на c_{11}, c_{22}, c_{33} и сложим их; тогда при учете (3.16) получим соотношение

$$\sum_{(123)} a_{11}(c_{33}-c_{22}) + \sigma^2 \sum_{(123)} c_{11}^2 (c_{33}-c_{22}) \sum_{(123)} c_{11} = 0$$

или при учете второго тождества в (3.20)

$$\sum_{(123)} a_{11}(c_{33}-c_{22}) + \sigma^2 \sum_{(123)} c_{22}c_{33}(c_{33}^2 - c_{22}^2) = 0$$

Это равенство при помощи тождества

$$c_{22}c_{33} = P - c_{11}(c_{22}+c_{33}), \quad P = c_{11}c_{22} + c_{22}c_{33} + c_{33}c_{11}$$

представим в виде

$$\sum_{(123)} (c_{33}-c_{22})[a_{11} - \sigma^2 c_{11}(c_{22}^2 + c_{33}^2)] = 0$$

Отсюда находим

$$a_{11} = a + \sigma^2 c_{11}(c_{22}^2 + c_{33}^2) + \tau c_{11} \quad (1\,2\,3) \tag{3.22}$$

где a, τ — неопределенные постоянные. Подстановка значений (3.22) в уравнения (3.18) приводит их к виду

$$(c_{22} - c_{33})\tau = 0 \quad (1\,2\,3)$$

Отсюда следует, что $\tau = 0$.

Итак, для коэффициентов функций T и V окончательно получаем выражения

$$a_{11} = a + \sigma^2 c_{11}(c_{22}^2 + c_{33}^2), \quad b_{11} = b + \sigma c_{22}c_{33} \quad (1\,2\,3)$$
$$A_{11} = A + \sigma^2 C c_{11}(2c_{22} + 2c_{33} - c_{11}), \quad B_{11} = B - \sigma C c_{11},$$
$$C_{11} = C \neq 0 \quad (1\,2\,3)$$
$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0, \quad A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, 3)$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а b, σ, c_{11}, c_{22}, c_{33} — параметры, удовлетворяющие условиям положительной определенности квадратичной формы (1.1). Интеграл V имеет вид

$$V = {}^1/_2 Ax\cdot x + Bx\cdot y - CV_S$$

где

$$V_S = \frac{1}{2} \sum_{(123)} [\sigma^2 c_{11}(c_{11} - 2c_{22} - 2c_{33}) x_1^2 + 2\sigma c_{11} x_1 y_1 - y_1^2]$$

— интеграл, отвечающий случаю Стеклова [3].

б) Пусть теперь в (3.9) $\rho = 0$. В этом случае равенства (3.6) сохраняются, а из (3.6), (3.8) и (3.12) получаем

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B, \quad b_{11} = b_{22} = b_{33} = b, \quad L = 0 \tag{3.23}$$

Далее, из (3.14) по-прежнему получаем равенства (3.15), а из (3.13) при $L = 0$ — соотношение (1.9), из которого заключаем, что

$$a_{11} = a + \tau c_{22}c_{33} \quad (1\,2\,3) \tag{3.24}$$

где a, τ — неопределенные постоянные. Подстановка значений (3.24) в уравнения (3.13) при $L = 0$ приводит их к виду

$$C\tau (c_{22} - c_{33}) = A_{33} - A_{22} \quad (1\,2\,3) \tag{3.25}$$

Умножая эти уравнения соответственно на c_{11}, c_{22}, c_{33} и складывая, приходим к равенству

$$\sum_{(123)} (c_{22} - c_{33}) A_{11} = 0$$

из которого получаем

(3.26) $\quad A_{11} = A + \mu c_{11} \quad (1\,2\,3)$

где A, μ — неопределенные постоянные. Уравнения (3.25) при подстановке значений (3.25) принимают вид

$$(C\tau + \mu)(c_{22} - c_{33}) = 0 \quad (1\,2\,3)$$

и приводят к равенству $\mu = -C\tau$.

Наконец, соотношение (3.19) при подстановке значений (3.23) удовлетворяется тождественно.

Окончательно получаем для коэффициентов функций T и V выражения

$$a_{11} = a + \tau c_{22}c_{33}, \quad b_{11} = b \quad (1\,2\,3)$$

$$A_{11} = A - C\tau c_{11}, \quad B_{11} = B, \quad C_{11} = C \neq 0 \quad (1\,2\,3)$$

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0, \quad A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = 0 \ (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

где A, B, C — произвольные постоянные, a, b, τ, c_{11}, c_{22}, c_{33} — параметры, удовлетворяющие условиям положительной определенности квадратичной формы (1.1). Интеграл V имеет вид

$$V = {}^1/_2 Ax\cdot x + Bx\cdot y - CV_{C_2}$$

где $$V_{C_2} = \frac{1}{2}\sum_{(1\,2\,3)} (\tau c_{11}x_1^2 - y_1^2)$$

— интеграл, отвечающий второму случаю Клебша.

Итак, анализ случая 1 приводит к случаю интегрируемости Стеклова и второму случаю Клебша.

4. *Случай* 2. В этом случае тождество (2.3) распадается на три следующие:

$$c_{22}y_2(B_{31}y_1 + B_{32}y_2 + B_{33}y_3) - c_{33}y_3(B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + B_{23}y_3) + B_{11}(c_{33} - c_{22})y_2y_3 + B_{12}(c_{11} - c_{33})y_3y_1 + B_{13}(c_{22} - c_{11})y_1y_2 = 0 \quad (1\,2\,3)$$

которые приводят к соотношениям

(4.1) $\quad c_{22}B_{33} - c_{33}B_{22} + B_{11}(c_{33} - c_{22}) = 0 \quad (1\,2\,3)$

(4.2) $\quad B_{12}(c_{11} - c_{33}) = B_{21}c_{33}, \quad B_{13}(c_{11} - c_{22}) = B_{31}c_{22} \quad (1\,2\,3)$

$$c_{22}B_{32} = 0, \quad c_{33}B_{23} = 0 \quad (1\,2\,3)$$

Из (4.2) получаем

(4.3) $\quad B_{23} = B_{32} = 0 \ (1\,2\,3)$

Рассмотрим теперь уравнения (4.1) как линейные однородные уравнения относительно B_{11}, B_{22}, B_{33} при фиксированных c_{11}, c_{22}, c_{33}. Среди последних величин имеются отличные от нуля, поскольку $\Delta_c \neq 0$. Отсюда следует, что определитель Δ_B указанной системы уравнений должен быть равен нулю. Это приводит к равенству

$$\Delta_B = (B_{11} - B_{22})(B_{22} - B_{33})(B_{33} - B_{11}) = 0$$

из которого при учете (4.1) получаем

(4.4) $\quad B_{11} = B_{22} = B_{33} = B$

Рассмотрим теперь тождество (2.2). Оно распадается на три следующие:

$$c_{11}[x_3A_{2i}x_i - x_2A_{3i}x_i] = 0 \quad (1\,2\,3)$$

и приводят к соотношениям

$$c_{11}(A_{22} - A_{33}) = 0, \ c_{11}A_{21} = 0, \ c_{11}A_{31} = 0, \ c_{11}A_{23} = 0 \quad (1\,2\,3)$$

из которых получаем

$$(4.5)\qquad A_{11} = A_{22} = A_{33} = A,\ A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0$$

Тождество (2.1) автоматически выполняется при наличии равенств (4.4), (4.5).

Итак, в случае 2 интеграл $V = {}^1/_2 Ax\cdot x + Bx\cdot y$ является линейной комбинацией первых двух интегралов (1.3).

5. *Случай* 3. Поскольку выражение $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ не зависит от направления осей $Ox_1x_2x_3$, то направим их так, чтобы $V_{yy} = {}^1/_2 C_{ii}y_i^2$, при этом можно считать, что

$$(5.1)\qquad \Delta_C = (C_{11} - C_{22})^2 + (C_{22} - C_{33})^2 + (C_{33} - C_{11})^2 \neq 0$$

ибо иначе случай 3 приводится к случаю 2.

Далее, начало координат перенесем в точку O', для которой коэффициенты билинейной формы V_{xy} удовлетворяют равенствам $B_{ij} = B_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, при этом равенства $b_{ij} = b_{ji}$ могут не выполняться. Такая точка всегда существует и единственна, если ([5], с. 280)

$$(5.2)\qquad D_C = (C_{11} + C_{22})(C_{22} + C_{33})(C_{33} + C_{11}) \neq 0$$

Отметим, что условие (5.2) несущественно и от него можно освободиться следующим образом. Вместо интеграла V будем искать интеграл $U = V + \lambda T = U_{yy} + U_{yx} + U_{xx}$, где λ — неопределенная постоянная. Направим теперь оси системы координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы $U_{yy} = {}^1/_2(C_{ii} + \lambda c)y_i^2$, а затем перенесем начало координат в точку тела O', для которой коэффициенты билинейной формы U_{yx} обладают свойством симметрии. При этом постоянную λ выберем так, чтобы выполнялось условие

$$D(\lambda) = (C_{11} + C_{22} + 2\lambda c)(C_{22} + C_{33} + 2\lambda c)(C_{33} + C_{11} + 2\lambda c) \neq 0$$

В указанной системе координат анализ случая 3 дословно повторяет анализ случая 1, если в последнем поменять местами роли функций T и V или, что то же самое, заменить a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} на A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, а последние на первые. В результате в силу леммы вместо случая Стеклова получим случай Ляпунова, а вместо второго случая Клебша — его третий случай.

Резюмируя сказанное, приходим к заключению, что теорема Стеклова [3] безупречна, и поэтому результаты [8—10], ей противоречащие, ошибочны.

6. *Случай* 4. Приведем результат анализа этого случая в системе координат, в которой для (1.1) выполняются равенства $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = b_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$.

Если $T = {}^1/_2(a_ix_i^2 + 2b_ix_iy_i)$, то уравнения (1.2) допускают четвертый интеграл

$$(6.1)\qquad V = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = \mathrm{const}$$

Этот случай может представлять определенный интерес с математической точки зрения как один из примеров интегрирования уравнений Кирхгофа—Клебша в эллиптических функциях времени с использованием аппарата винтового исчисления [11].

Действительно, для этого случая уравнения (1.2) можно представить в виде (ε — множитель Клиффорда)

$$(6.2)\qquad S_1^{\boldsymbol{\cdot}} = (D_3 - D_2)S_2S_3 \quad (1\,2\,3)$$

$$S_1 = x_1 + \varepsilon y_1,\quad D_1 = b_1 + \varepsilon a_1 \quad (1\,2\,3),\quad \varepsilon^2 = 0$$

Уравнения (6.2) допускают первые интегралы

(6.3) $$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = G^2, \quad D_1S_1^2 + D_2S_2^2 + D_3S_3^2 = H$$

где G и H — произвольные дуальные постоянные. Отделяя в (6.3) главные и моментальные части [11], получим четыре первых интеграла (1.3), (6.1).

Уравнения (6.2) и интегралы (6.3) по форме совпадают с уравнениями и интегралами задачи о движении тела с одной закрепленной точкой в случае Эйлера. Для последней задачи известно общее решение в эллиптических функциях времени ([3], с. 56, 57). Заменяя в этом решении вещественные переменные и постоянные их дуальными аналогами, получим общее решение уравнений (6.2), отделяя в котором главные и моментальные части, получим общее решение уравнений (1.2) в эллиптических функциях времени [7].

7. Известно замечание Ляпунова [4] о том, что его случай интегрируемости уравнений (1.2) можно рассматривать как предельный для случая Стеклова, а третий случай Клебша — как предельный для второго случая Клебша.

Рассмотрим этот вопрос. Пусть T_S, T_L — кинетическая энергия системы тело плюс жидкость для случаев Стеклова и Ляпунова, а V_S, V_L — четвертые интегралы уравнений (1.2) для этих случаев.

Пусть

$$T_S = \frac{1}{2} \sum_{(123)} [e_1y_1^2 + 2\sigma e_2e_3x_1y_1 + \sigma^2 e_1(e_2^2 + e_3^2)x_1^2]$$

$$V_S = \frac{1}{2} \sum_{(123)} [y_1^2 - 2\sigma e_1x_1y_1 + \sigma^2(e_2 - e_3)^2x_1^2]$$

где e_1, e_2, e_3, σ — фиксированные постоянные. Тогда в силу леммы имеют место равенства $T_L = V_S$, $V_L = T_S$.

Рассмотрим однопараметрические семейства функций

(7.1) $$T(\lambda) = \lambda T_S + (1-\lambda)T_L = {}^1/_2\,[c_i(\lambda)y_i^2 + 2b_i(\lambda)x_iy_i + a_i(\lambda)x_i^2]$$

$$V(\lambda) = -\lambda V_S + (1-\lambda)V_L$$

(7.2) $$c_1(\lambda) = \lambda e_1 + 1 - \lambda, \quad b_1(\lambda) = \sigma[\lambda e_2e_3 - (1-\lambda)e_1] \quad (1\,2\,3)$$

$$a_1(\lambda) = \sigma^2[\lambda e_1(e_2^2 + e_3^2) + (1-\lambda)(e_2 - e_3)^2] \quad (1\,2\,3)$$

зависящие от параметра λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Уравнения (1.2) при $T = T(\lambda)$ допускают четвертый независимый интеграл $V = V(\lambda)$. Поэтому выражениями (7.1) определяется семейство интегрируемых случаев уравнений (1.2), содержащее при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ случаи Стеклова и Ляпунова.

Покажем, что при $\lambda \neq 0$ имеем случай Стеклова.

Действительно, из первой формулы (7.2) находим при $\lambda \neq 0$

(7.3) $$e_1 = (c_1 + \lambda - 1)\lambda^{-1} \quad (1\,2\,3)$$

Подставляя эти значения в две другие формулы (7.2), получаем соотношения

(7.4) $$b_1 = b + \sigma\lambda^{-1}c_2c_3, \quad a_1 = a + \sigma^2\lambda^{-2}c_1(c_2^2 + c_3^2) \quad (1\,2\,3)$$

$$b = \sigma(\lambda - 1)\lambda^{-1}[c_1 + c_2 + c_3 + 2(\lambda - 1)]$$

$$a = 2\sigma^2(\lambda - 1)\lambda^{-2}[c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 + (\lambda - 1)(c_1 + c_2 + c_3) + (\lambda - 1)^2]$$

связывающие коэффициенты кинетической энергии системы, определяющие случай Стеклова.

Умножим обе части (7.3) на λ и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$; тогда $c_j(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to 0$ $(j = 1, 2, 3)$. Переход к пределу при $\lambda \to 0$ в (7.4) приводит для $b_j(\lambda)$, $a_j(\lambda)$ к неопределенности вида $\infty \cdot 0$. Для раскрытия этой неопределенности выполним предельный переход при $\lambda \to 0$ в первой из формул (7.1); в результате получим

$$\lim b_1(\lambda) = -\sigma e_1, \quad \lim a_1(\lambda) = \sigma^2 (e_2 - e_3)^2 \quad (1\,2\,3), \quad \lambda \to 0$$

Последние предельные соотношения, дополненные равенствами $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, определяют случай Ляпунова.

Итак, семейства (7.1) представляют собой непрерывное однопараметрическое семейство интегрируемых случаев Стеклова, для которого случай Ляпунова является предельным при $\lambda \to 0$.

Рассмотрим теперь второй и третий случаи Клебша. Пусть T_2, T_3 — кинетическая энергия системы для второго и третьего случаев Клебша, а V_2, V_3 — четвертые интегралы уравнений (1.2) для этих случаев. Пусть

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{(123)} (e_1 y_1^2 + \tau e_2 e_3 x_1^2), \quad V_2 = {}^1/_2 (y_i^2 - \tau e_i x_i^2)$$

где e_1, e_2, e_3, τ — фиксированные постоянные. В силу леммы имеем $T_3 = V_2$, $V_3 = T_2$.

Рассмотрим семейства функций

(7.5) $$T(\lambda) = \lambda T_2 + (1 - \lambda) T_3 = {}^1/_2 [c_i(\lambda) y_i^2 + a_i(\lambda) x_i^2]$$
$$V(\lambda) = -\lambda V_2 + (1 - \lambda) V_3$$

(7.6) $$c_1(\lambda) = \lambda e_1 + 1 - \lambda, \quad a_1(\lambda) = \tau [\lambda e_2 e_3 - (1 - \lambda) e_1] \quad (1\,2\,3)$$

зависящие от параметра λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Уравнения (1.2) при $T = T(\lambda)$ допускают четвертый независимый интеграл $V = V(\lambda)$. Следовательно, выражениями (7.5) определяется однопараметрическое семейство интегрируемых случаев уравнений (1.2), содержащее при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ второй и третий случаи Клебша.

Покажем, что при $\lambda \neq 0$ имеем второй случай Клебша.

Действительно, из (7.6) получаем при $\lambda \neq 0$

(7.7) $$\lambda e_1 = c_1 + \lambda - 1 \quad (1\,2\,3)$$

(7.8) $$a_1 = a + \tau \lambda^{-1} c_2 c_3 \quad (1\,2\,3), \quad a = \tau (\lambda - 1) \lambda^{-1} [c_1 + c_2 + c_3 + 2(\lambda - 1)]$$

Соотношениями (7.8), налагаемыми на коэффициенты кинетической энергии системы, определяется второй случай Клебша. Из (7.5) получаем предельные соотношения $(\lambda \to 0)$ $\lim c_1(\lambda) = 1$, $\lim a_1(\lambda) = -\tau e_1$ $(1\,2\,3)$, которыми определяется третий случай Клебша.

Итак, семейства (7.5) представляют собой семейство вторых случаев Клебша, для которых третий случай Клебша является предельным при $\lambda \to 0$.

8. Для задачи о движении тела в жидкости в случае, когда

$$T = {}^1/_2 (a_i x_i^2 + 2 b_i x_i y_i + c_i y_i^2)$$

а постоянные a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ подчинены условиям

А) $$\frac{c_1(c_2 - c_3)}{b_3 - b_2} = \frac{c_2(c_3 - c_1)}{b_1 - b_3} = \frac{c_3(c_1 - c_2)}{b_2 - b_1}$$

Б) $$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3}$$

Колосов [6] указал четвертый независимый интеграл уравнений (1.2) в форме

$$V = \frac{(b_3 - b_1)}{c_2}\left(y_1 - \frac{b_3 - b_2}{c_1} x_1\right)^2 + \frac{(b_3 - b_2)}{c_1}\left(y_2 - \frac{b_3 - b_1}{c_2} x_2\right)^2 \tag{8.1}$$

и показал, что частными случаями условий А) и Б) являются случаи Стеклова и Ляпунова, при этом четвертые интегралы для этих двух случаев могут быть представлены при помощи интегралов (1.3) в виде (8.1).

Может показаться, что соотношения А) и Б) налагают на девять постоянных a_i, b_i, c_i четыре условия и поэтому входящие в (8.1) пять из них можно рассматривать как произвольные параметры, тогда как в четвертых интегралах Стеклова и Ляпунова число аналогичных параметров равно четырем. Это может навести на мысль, что условиями А) и Б) вместе с (8.1) определяется более общий случай интегрируемости, содержащий как частные случаи Стеклова и Ляпунова.

Покажем, что условия А) и Б) эквивалентны условиям Ляпунова (1.10) и не приводят к другим случаям интегрируемости, отличным от случаев Стеклова и Ляпунова, при этом (8.1) — всего лишь иная форма записи четвертого интеграла для последних двух случаев.

В самом деле, условие А) приводит к двум соотношениям, которые получаются в результате приравнивания в А) первых двух и последних двух членов. Каждое из них приводится к одному и тому же соотношению, которое совпадает с первым из условий (1.10). Поэтому условия А) и Б) эквивалентны условиям (1.10).

Рассмотрим условия (1.10). Зафиксируем значения c_1, c_2, c_3. В первом из условий (1.10) будем рассматривать величины b_1, b_2, b_3 как декартовы координаты некоторой точки. Возможны два случая: $\Delta_c \neq 0$ и $\Delta_c = 0$.

В первом случае геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому условию (1.10), является плоскость, уравнения которой в параметрической форме можно представить в виде [3]

$$b_1 = b + \sigma c_2 c_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.2}$$

где b, σ — неопределенные постоянные. Тогда при учете (8.2) условия Б) приводят к соотношениям

$$a_1 = a + \sigma^2 c_1 (c_2 - c_3)^2 \tag{8.3}$$

где величина a произвольна. Соотношениями (8.2) и (8.3) определяется случай Стеклова.

Во втором случае имеем $c_1 = c_2 = c_3 = c$. Первое из условий (1.10) выполняется автоматически, а второе приводит к соотношениям, определяющим случай Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kirchhoff G. R.* Über die Bewegung eines Rotationskörpers in eines Flussigkeit // J. Reine und angew. Math. 1870. B. 71. S. 237—262.
2. *Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in eines Flussigkeit // Math. Annalen. 1870. B. 3. S. 238—262.
3. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: Тип. Дарре. 1893. 234 с.
4. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1954. Т. 1. С. 320—324.

5. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1954. Т. 1. С. 276—319.
6. *Колосов Г. В.* Заметка о движении твердого тела в несжимаемой жидкости в случаях В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова // Изв. Рос. Акад. наук. 1919. Т. 13. С. 711—716.
7. *Буров А. А., Рубановский В. Н.* Об одном общем решении уравнений типа Кирхгофа — Клебша // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 83—86.
8. *Лунев В. В.* Об однозначных решениях в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк. 1981. Вып. 11. С. 147—154.
9. *Лунев В. В.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 275. № 4. С. 824—826.
10. *Лунев В. В.* Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 276. № 2. С. 351—355.
11. *Диментберг Ф. М.* Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука. 1965. 199 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.VIII.1987