Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 531.36 : 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Акуленко Л. Д.

Методом усреднения исследуется класс сложных колебательных систем, описываемых векторными интегродифференциальными уравнениями с осциллирующими ядрами. Такие уравнения возникают при анализе механических объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными инерционными и упругими параметрами. Рассматриваются два физически различных случая колебаний твердых тел: «резонансный» и «нерезонансный», которые определяются свойствами средних значений ядер интегральных слагаемых. В первом случае доказано, что уравнения первого приближения эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. порядок системы уравнений движения твердых тел увеличивается вдвое. Во втором случае установлены достаточные условия медленности оскулирующих исходных переменных в обычном для метода усреднения смысле; при этом порядок системы уравнений сохраняется. Сформулированы условия, при выполнении которых строго обосновывается применимость метода усреднения на асимптотически больших интервалах времени; построены конструктивные оценки погрешностей. На основании развитого подхода изучены возмущенные горизонтальные колебания твердого тела, содержащего прямоугольную полость с двухслойной тяжелой жидкостью и упруго соединенного с неподвижным основанием; обнаружены и исследованы качественные эффекты.

1. Постановка задачи. Исследование ряда механических колебательных систем, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, приводит к необходимости решения задач Коши для систем возмущенных интегродифференциальных уравнений (ИДУ) вида

$$z^{\cdot} = Az + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} W(t,\tau)\, z(\tau)\, d\tau + G(t, z, \varepsilon) \tag{1.1}$$

$$z(t_0) = z^\circ, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad t - t_0 \in [0, T(\varepsilon))$$

Здесь z — n-мерный вектор, $z \in D_z$ — некоторая открытая область; A — постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, собственные числа которой имеют нулевые вещественные части, причем кратным числам отвечают простые элементарные делители [1, 2], т. е. общее решение $z_0(t) = Z(t)c$ ($Z(t)$ — фундаментальная матрица, $c = \mathrm{const}$) системы $z_0^{\cdot} = Az_0$ содержит только тригонометрические функции t ($\sin \omega_k t$, $\cos \omega_k t$, 1). Функция $W(t, \tau)$ — $(n \times n)$-матрица, ядро линейного интегрального оператора в (1.1), характеризующее влияние распределенных частей системы на сосредоточенные (см. п. 3). Элементы матрицы $W(t, \tau)$ считаются заданными в квадранте τ, $t \in [t_0, \infty)$, суммируемыми равномерными почти периодическими функциями (РППФ) обоих аргументов [3]. Возможность независимого изменения τ, t обусловлена обратимостью во времени колебательных процессов в распределенных (упругих или жидких) средах. Считается, что функция $G(t, z, \varepsilon)$ квазипериодична и суммируема по t [4, 5], непрерывно дифференцируема по z, $z \in D_z$ и, кроме того, допускает представление по ε: $G(t, z, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{\pi} g(t, z, \varepsilon)$, где $\pi > 0$, g равномерно непрерывна по ε (далее зависимость g от ε не указывается); таким образом, функция $G(t, z, 0) \equiv 0$ для почти всех $t \geqslant t_0$, $z \in D_z$.

Для приложений важно исследовать поведение системы (1.1) при малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ на асимптотически достаточно большом интервале времени: $T(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Порядок $\pi > 0$ стремления функции G к нулю и T к бесконечности по ε уточняется ниже. Получающиеся при этом модели должны приводить к существенному, качественному изменению поведения системы (1.1) и представлять теоретический и прикладной интерес. Одним из таких приемов исследования является применяемый далее метод усреднения [5—7].

Для удобства применения асимптотических методов интегродифференциальная задача Коши (ИДЗК) (1.1) приводится к «стандартному виду» [6] неособенной для $t \in [t_0, \infty)$ заменой ($z \to x$):

$$x^{\cdot}(t) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} K(t, \tau) x(\tau) d\tau + F(t, x(t), \varepsilon), \quad x(t_0) = x^\circ \tag{1.2}$$

$$K(t, \tau) = Z^{-1}(t) W(t, \tau) Z(\tau), \quad F(t, x, \varepsilon) = Z^{-1}(t) G(t, Z(t) x, \varepsilon)$$

$$z = Z(t) x, \quad F = \varepsilon^\pi f, \quad t - t_0 \in [0, T(\varepsilon)], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

Матричное ядро $K(t, \tau)$ обладает свойствами исходного ядра $W(t, \tau)$, а вектор-функция $F(t, x, \varepsilon)$, $x \in D_x$ — свойствами $G(t, z, \varepsilon)$, $z \in D_z$. Эволюция нового «медленного» n-вектора x рассматривается на интервале времени $t - t_0 \in [0, T(\varepsilon)]$, на котором происходит существенное по отношению к параметру ε его изменение ($x(t) - x^\circ \sim 1$).

Замечания. 1°. При определенных оговорках [1, 2, 4—7] к виду (1.2) приводятся ИДУ (1.1), в которых $A = A(t)$ — периодическая матрица, а $G(t, z, \varepsilon) = g_0(t) + \varepsilon^\pi g(t, z)$, где $g_0(t)$ — РППФ.

2°. ИДЗК (1.1) или (1.2) эквивалентны задачам Коши для счетной системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [8, 9]. Метод усреднения применительно к квазилинейным колебательным системам со счетным числом степеней свободы развивался в [8] (построение так называемого одночастотного приближения).

3°. Приемы приближенного исследования линейных ИДЗК типа (1.1), когда $A = A(\varepsilon t)$, $W = W(\varepsilon t, \varepsilon \tau)$ — медленно изменяющиеся матрицы, содержатся в [10]; ИДЗК в стандартной форме (1.2) с нелинейным по x ядром интегрального оператора при весьма жестких требованиях на средние рассматривались в [11] и др.

4°. К ИДЗК вида (1.1), (1.2) приводятся системы, описывающие колебания твердых тел, связанных граничными условиями с волновыми движениями систем с распределенными параметрами (струн, брусов, валов, стержней, тяжелой жидкости и др.), а также посредством сосредоточенных обратных связей (например, упругих элементов) с неподвижными объектами. Рассматривались [12] горизонтальные периодические движения прямоугольного сосуда, содержащего идеальную тяжелую жидкость со свободной поверхностью.

Методом усреднения изучалось [9] решение линейной ИДЗК вида (1.1), (1.2) без учета возмущений ($G = F \equiv 0$), описывающей одномерные колебания твердого тела, содержащего прямоугольную полость, целиком заполненную тяжелой идеальной двухслойной жидкостью (соответствующий пример с учетом возмущений рассмотрен ниже в п. 3).

В данной работе метод усреднения развивается для ИДЗК общего вида (1.2). Проводятся обоснования и оценки погрешностей при различных предположениях относительно свойств функций $K(t, \tau)$ и $F(t, x, \varepsilon)$, $\tau, t \in [t_0, \infty)$, $x \in D_x$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

2. Построение и обоснование схем метода усреднения. Основным математическим аппаратом для приближенного построения ИДЗК более простой, чем исходная (1.2), анализа решения и оценок точности является векторное интегральное уравнение (ИУ) типа Вольтерры

$$x(t) = x^\circ + \varepsilon \int_{t_0}^{t} L(t,\tau) x(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x(\tau), \varepsilon) d\tau \tag{2.1}$$

$$L(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} K(\sigma,\tau) d\sigma = K_0^{(1)}(\tau)(t-\tau) + L_*(t,\tau),$$

$$K_0^{(1)}(\tau) = \langle K(t,\tau)\rangle_t$$

ИУ (2.1) следует непосредственно из ИДУ (1.2) и свойств РППФ [3]. В (2.1) элементы матриц $K_0^{(1)}(\tau)$, $L_*(t,\tau)$ считаются РППФ, непрерывными и равномерно ограниченными при $\tau, t \in [t_0, \infty)$. Здесь и далее индекс (1) или (2) сверху означает, что по первому или второму аргументу проведена операция усреднения (индекс 0 внизу); при усреднении по обоим аргументам верхние индексы опускаются.

Далее устанавливается характер изменения «медленной» переменной x по отношению к t и ε в зависимости от свойств матрицы $L(t,\tau)$ (2.1). Различаются два случая: 1) «резонансный», когда $K_0^{(1)}(\tau) \not\equiv 0$, и 2) «нерезонансный», если $K_0^{(1)}(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [t_0, \infty)$ и выполнены дополнительные достаточные условия.

2.1. Усреднение в «резонансном» случае. Пусть $K_0^{(1)}(\tau) \not\equiv 0$; тогда в общем случае полагается $\pi = {}^1/_2$ и с ИУ (2.1) сопоставляется в медленном времени θ усредненное ИУ

$$\xi(\Theta) = x^\circ + K_{00} \int_{\theta_0}^{\theta} (\theta - \vartheta)\xi(\vartheta) d\vartheta + \int_{\theta_0}^{\theta} f_0(\xi(\vartheta)) d\vartheta \tag{2.2}$$

$$\theta = \sqrt{\varepsilon} t,\ \theta - \theta_0 \in [0, \Theta],\ K_{00} = \langle K_0^{(1)}(\tau)_\tau\rangle,\quad f_0(\xi) = $$
$$= \langle f(t,\xi)\rangle_t$$

Здесь и далее $\Theta = \mathrm{const}$, т. е. $T(\varepsilon) = \Theta/\sqrt{\varepsilon} \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$. ИУ (2.2) дифференцированием по θ приводится к усредненной ИДЗК, отвечающей исходной ИДЗК (1.2)

$$\xi'(\theta) = K_{00} \int_{\theta_0}^{\theta} \xi(\vartheta) d\vartheta + f_0(\xi(\theta)),\quad \xi(\theta_0) = x^\circ \tag{2.3}$$

ИДЗК (2.3) можно представить в форме задачи Коши для систем ОДУ $2n$-порядка двумя способами:

$$\gamma' = \xi,\quad \xi' = K_{00}\gamma + f_0(\xi),\quad \gamma(\theta_0) = 0,\quad \xi(\theta_0) = x^\circ \tag{2.4}$$

$$\gamma'' = K_{00}\gamma + f_0(\gamma'),\quad \gamma(\theta_0) = 0,\quad \gamma'(\theta_0) = x^\circ \tag{2.4$'$}$$

$$\xi' = \nu,\quad \nu' = K_{00}\xi + f_0'(\xi)\nu,\quad \xi(\theta_0) = x^\circ,\quad \nu(\theta_0) = f_0(x^\circ) \tag{2.5}$$

$$\xi'' = K_{00}\xi + f_0'(\xi)\xi',\quad \xi(\theta_0) = x^\circ,\quad \xi'(\theta_0) = f(x^\circ) \tag{2.5$'$}$$

Вторая форма задачи Коши (2.5) или (2.5′) допускается, поскольку функция $f_0(\xi)$ непрерывно дифференцируема по $\xi \in D_x$. Из (2.4)—(2.5′) следует, что на интервале $\theta - \theta_0 \sim \Theta \sim 1$ усредненные переменные ξ, γ, ν получают существенные приращения порядка единицы, что важно для приложений. Аналогично изменяется исходная переменная $x = x(t, \varepsilon)$, поскольку справедливо

Утверждение 1. Пусть $K(t,\tau)$, $\tau, t \in [t_0, \infty)$ — РППФ, а функция $f(t, x)$ квазипериодична по t и непрерывно дифференцируема по x, причем производная равномерно ограничена для $t \in [t_0, \infty)$, $x \in D_x$, и пусть решение $\xi = \xi(\theta)$ усредненной ИДЗК (2.3) существует и $\xi(\theta) \in D_x$,

$\theta - \theta_0 \in [0, \Theta]$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon) - \xi(\theta)| \leqslant \sqrt{\varepsilon} C(\Theta), \quad t - t_0 \in [0, \Theta / \sqrt{\varepsilon}] \tag{2.6}$$

где C — не зависящий от t, ε параметр, определяемый конструктивно на основе свойств функций $K(t, \tau)$, $f(t, x)$.

Действительно, полагая $x = \xi + \delta$, где δ — оцениваемая неизвестная переменная (погрешность), получим при помощи соотношений (2.1)—(2.3) выражение

$$\delta(t) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} L(t, \tau) \delta(\tau) d\tau + \sqrt{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} [f(\tau, \xi + \delta) - f(\tau, \xi)] d\tau + \tag{2.7}$$
$$+ \sqrt{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} [L(t, \tau) - K_{00}(t - \tau)] \xi(\vartheta) d\vartheta + \sqrt{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} [f(\tau, \xi) - f_0(\xi)] d\tau$$

В ИУ (2.7) интегрирование проводится с учетом зависимостей $\delta = \delta(\tau)$, $\xi = \xi(\vartheta)$, $\vartheta = \sqrt{\varepsilon}\tau$. Для оценки величины $\delta(t)$ и интервала времени $t - t_0 \sim T(\varepsilon)$ применяется лемма Гронуолла [2, 4, 6, 7]; в результате следует искомая оценка (2.6):

$$|\delta(t)| \leqslant \sqrt{\varepsilon} (q\Theta + f_*) \exp [{}^1/{}_2 k_0^{(1)} \Theta^2 + \sqrt{\varepsilon} l_* \Theta + f_{0*}' \Theta] \equiv \tag{2.8}$$
$$\equiv \sqrt{\varepsilon} C_* (\Theta, \sqrt{\varepsilon}) \leqslant \sqrt{\varepsilon} C(\Theta), \quad t - t_0 \in [0, \Theta / \sqrt{\varepsilon}],$$
$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$
$$k_0^{(1)} = \sup_{\tau} \| K_0^{(1)}(\tau) \|, \quad l_* = \sup_{\tau, t} \| L_*(t, \tau) \|;$$
$$\tau, t \in [t_0, \infty)$$
$$f_{0*}' = \sup_{t} \max_{\theta - \theta_0} \left\| \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial \xi} \right\|, \quad f_* = \max_{t - t_0} \left| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, \xi) - f_0(\xi)] d\tau \right|$$
$$q = \max_{\theta - \theta_0} \left| \varepsilon \int_{t_0}^{t} \{[K_0^{(1)}(\tau) - K_{00}](t - \tau) + L_*(t, \tau)\} \xi(\vartheta) d\tau \right|$$
$$t - t_0 \in [0, \Theta / \sqrt{\varepsilon}], \; \theta - \theta_0 \in [0, \Theta]$$

Коэффициенты f_{0*}', f_* и q в (2.8) непрерывно зависят от параметров Θ, $\sqrt{\varepsilon}$. Ограниченность нормы матрицы $\partial f(t, \xi)/\partial \xi$ следует из непрерывности и квазипериодичности ее элементов по t, $t \in [t_0, \infty)$ и непрерывности и равномерной ограниченности по ξ, $\xi \in D_x$. Ограниченность коэффициентов f_* и q устанавливается представлениями функций $f(\tau, \xi)$, $K_0^{(1)}(\tau)$ в виде рядов Фурье [3] с последующим интегрированием по частям и учетом оценки $\xi^{\cdot} = O(\sqrt{\varepsilon})$, $t - t_0 = O(1/\sqrt{\varepsilon})$. Подробное доказательство оценки для q содержится в [9], а для f_* — в [5], как при усреднении ОДУ.

2.2. Усреднение в «нерезонансном» случае. Пусть теперь $K_0^{(1)}(\tau) \equiv 0$; тогда остаются справедливыми результаты п. 2.1 при $K_{00} = 0$ (утверждение 1 и уравнения (2.2)—(2.5)). Представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах возможность асимптотического анализа ИДЗК (1.2) или ИУ (2.1) для интервала времени $t - t_0 \in [0, \Theta/\varepsilon]$. Итак, пусть выполняются соотношения

$$K_0^{(1)}(\tau) = \langle K(t, \tau) \rangle_t \equiv 0, \quad F(t, x, \varepsilon) = \varepsilon f(t, x) \tag{2.9}$$

т. е. степень $\pi = 1$ и согласована с постановкой задачи. Тогда ядро $L(t, \tau)$ в (2.1) — РППФ для τ, $t \in [t_0, \infty)$. С исходным ИУ (2.1) сопоставляются следующие ИУ с усредненными по аргументу интегрирования функциями L, f (аналогия с усреднением ОДУ):

$$\eta(t)=x^{\circ}+\varepsilon L_0^{(2)}(t)\int_{t_0}^{t}\eta(\tau)\,d\tau+\varepsilon\int_{t_0}^{t}f_0(\eta(\tau))\,d\tau \tag{2.10}$$

$$L_0^{(2)}(t)=\langle L(t,\tau)\rangle_\tau=\langle L_*(t,\tau)\rangle_\tau,\quad t-t_0\in[0,\Theta/\varepsilon]$$

В общем случае переменные x, η немедленные в смысле [6, 7], т. е. не выполняется оценка $x^{\cdot}, \eta^{\cdot}=O(\varepsilon)$ для $t-t_0=O(1/\varepsilon)$. Это можно установить примерами.

1°. Рассмотрим частный случай ИУ (2.10), когда $f_0(\eta)\equiv 0$, $\eta\in D_x$ и $\langle L_0^{(2)}(t)\rangle_t=$ $=L_{00}=0$. Решение линейного ИУ строим в виде

$$\eta(t)=y(t)+\varepsilon L_0^{(2)}(t)\int_0^t y(\tau)\,d\tau\quad(t_0=0) \tag{2.11}$$

где y — новая неизвестная, определяемая как решение ИУ

$$y(t)=x^{\circ}+\varepsilon^2\int_0^t V(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{2.12}$$

$$V(t,\tau)=\int_\tau^t L_0^{(2)}(t)\,L_0^{(2)}(\sigma)\,d\sigma$$

Ядро $V(t,\tau)$ в (2.12) есть РППФ по обоим аргументам, причем $\|V\|\leqslant v_*=\mathrm{const}$. На основе результатов п. 2.1 для ИУ (2.12), полагая $y=x^{\circ}+\delta$, получим оценку

$$|\delta(t)|\leqslant\varepsilon C(\Theta),\quad |y^{\cdot}|=|\delta^{\cdot}|\leqslant\varepsilon B(\Theta),\quad t\in[0,\Theta/\varepsilon] \tag{2.13}$$

$$[\,|x^{\circ}|+\varepsilon C(\Theta)][(v_t')_*\Theta+\varepsilon v_*]=B_*(\Theta,\varepsilon)\leqslant B(\Theta),\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$$

Постоянная $(v_t')_*$ ограничивает сверху норму матрицы $\partial V/\partial t$, элементы которой должны быть равномерно ограниченными. Согласно (2.11), выражения для $\eta, \eta^{\cdot}$ имеют вид при $t\in[0,\Theta/\varepsilon]$:

$$\eta(t,\varepsilon)=x^{\circ}+\delta(t,\varepsilon)+\theta L_0^{(2)}(t)\,x^{\circ}+\varepsilon L^{(2)}(t)\int_0^t\delta(\tau,\varepsilon)\,d\tau\equiv \tag{2.14}$$

$$\equiv x^{\circ}+\theta L_0^{(2)}(t)\,x^{\circ}+\varepsilon e(t,\varepsilon),\quad |e|\leqslant e_*=\mathrm{const}$$

$$\eta^{\cdot}(t,\varepsilon)=y^{\cdot}(t,\varepsilon)+\theta L_0^{(2)\cdot}(t)\,x^{\circ}+\varepsilon L_0^{(2)\cdot}(t)\int_0^t\delta(\tau,\varepsilon)\,d\tau+\varepsilon L_0^{(2)}(t)\,[x^{\circ}+\delta(t,\varepsilon)]\equiv$$

$$\equiv\theta L_0^{(2)\cdot}(t)\,x^{\circ}+\varepsilon h(t,\varepsilon),\quad |h|\leqslant h_*=\mathrm{const},\quad t\in[0,\Theta/\varepsilon],\ \theta=\varepsilon t,\ \theta\in[0,\Theta]$$

Из (2.14) следует при $L_0^{(2)\cdot}(t)\not\equiv 0$, что эквивалентно $L_0^{(2)}(t)\not\equiv L_{00}=0$, искомая оценка: $\eta^{\cdot}=O(1)$ для $t=O(1/\varepsilon)$.

2°. Рассмотрим другой пример, когда существуют обратные матрицы $(L_0^{(2)}(t))^{-1}$, $t\in[0,\infty)$ и L_{00}^{-1}. Заменой $\eta\to y$ получим ИУ, эквивалентное ОДУ; действительно

$$\eta=[L_{00}-L_0^{(2)}(t)]\,L_{00}^{-1}x^{\circ}+L_0^{(2)}(t)\,L_{00}^{-1}y \tag{2.15}$$

$$y(t)=x^{\circ}+\varepsilon\int_0^t L_{00}\,[L_{00}-L_0^{(2)}(\tau)]\,L_{00}^{-1}x^{\circ}d\tau+\varepsilon\int_0^t L_{00}L_0^{(2)}(\tau)\,L_{00}^{-1}y(\tau)\,d\tau \tag{2.16}$$

Дифференцирование (2.16) по t позволяет получить при помощи метода усреднения в первом приближении по ε выражения для y, η:

$$y(t,\varepsilon)=\zeta(\theta)+\delta(t,\varepsilon),\quad |\delta|\leqslant\varepsilon C(\Theta),\quad \theta\in[0,\Theta] \tag{2.17}$$

$$\zeta(\theta)=Z(\theta)x^{\circ},\quad Z(\theta)=\exp(L_{00}\theta)\ (Z'=L_{00}Z)$$

$$\eta(t,\varepsilon)=x^{\circ}+L_0^{(2)}(t)L_{00}^{-1}[Z(\theta)-E]x^{\circ}+\varepsilon h(t,\varepsilon),\quad |h|\leqslant h_*=$$
$$=\mathrm{const}$$

Таким образом, y — медленная, а η — немедленная переменные в указанном выше смысле; среднее η по t при фиксированном θ есть медленная переменная. В результате также установлено, что при $K_0^{(1)}(\tau)\equiv 0$ вектор $x=x(t,\varepsilon)$ — решение ИУ (2.1) — в общем случае немедленный, а вместе с ним и вектор $\eta=\eta(t,\varepsilon)$ — решение ИУ (2.10).

Утверждение 2. **При выполнении условий утверждения 1 относительно свойств гладкости, ограниченности и существования равномерного среднего по t, τ функций $L(t, \tau)$, $f(t, x)$ и условия $L_0^{(2)}(t) \equiv L_{00} = \mathrm{const}$ для $t \in [t_0, \infty)$ следует: 1) переменная $\eta = \eta(t, \varepsilon)$ медленная, а именно: $\eta = \eta(\theta)$, где $\theta = \varepsilon t$, $\theta - \theta_0 \in [0, \Theta]$, $\Theta \sim 1$; если при этом $\eta(\theta) \in D_x$, то 2) при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ справедлива оценка**

$$|x(t, \varepsilon) - \eta(\theta)| \leqslant \varepsilon C(\Theta), \quad t - t_0 \in [0, \Theta/\varepsilon], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \tag{2.18}$$

Доказательство свойства 1) следует непосредственно из ИУ (2.10) при $L_0^{(2)}(t) \equiv L_{00}$. Они допускают введение медленного аргумента $\theta = \varepsilon t$ и эквивалентны задаче Коши для ОДУ первого порядка

$$\eta(\theta) = x^\circ + L_{00}\int_{\theta_0}^{\theta} \eta(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{\theta_0}^{\theta} f_0(\eta(\vartheta))\, d\vartheta \tag{2.19}$$

$$\eta' = L_{00}\eta + f_0(\eta), \quad \theta - \theta_0 \in [0, \Theta] \tag{2.20}$$

Оценка (2.18), т. е. свойство 2), устанавливается на основании леммы Гронуолла для разности $\delta = x - \eta$; в самом деле, из ИУ

$$\delta(t) = \varepsilon\int_{t_0}^{t} [\Phi(t, \tau, \eta(\vartheta) + \delta(\tau)) - \Phi(t, \tau, \eta(\vartheta))]\, d\tau + \tag{2.21}$$

$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t} [\Phi(t, \tau, \eta(\vartheta)) - \Phi_0(t, \eta(\vartheta))]\, d\tau, \quad \vartheta = \varepsilon\tau$$

$$\Phi(t, \tau, x) = L(t, \tau)\, x + f(\tau, x), \quad \Phi_0(t, \eta) = \langle \Phi(t, \tau, \eta)\rangle_\tau$$

аналогично (2.8) для погрешности δ при помощи (2.21) получаем

$$|\delta| \leqslant \varepsilon(r + f_*)\exp[l + (f_\eta')_*] \equiv \varepsilon C_*(\Theta, \varepsilon) \leqslant \varepsilon C(\Theta) \tag{2.22}$$

$$l = \sup_{t,\tau} \| L(t, \tau)\|, \quad r = \sup_{t} \max_{\theta-\theta_0} \left| \int_{t_0}^{t} [L(t, \tau) - L_{00}]\, \eta(\vartheta)\, d\tau \right|$$

$$(f_\eta')_* = \sup_{t} \max_{\theta-\theta_0} \left\| \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\|, \quad f_* = \sup_{t} \max_{\theta-\theta_0} \left| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, \eta(\vartheta)) - f_0(\eta(\vartheta))]\, d\tau \right|$$

Комментарий к оценкам (2.22) аналогичен приведенному в п. 2.1 (см. (2.8)).

2.3. Замечания. 1°. Условие $L_0^{(2)}(t) \equiv L_{00}$ выполняется, например, при а) $L(t, \tau) = L^*(t - \tau) + L^{**}(t, \tau)$, где $\langle L^{**}(t, \tau)\rangle_T \equiv 0$, так как тогда $\langle L(t, \tau)\rangle_\tau = \langle L^*(\sigma)\rangle_\sigma = L_{00}$, или б) $L(t, \tau) = L^*(\tau) + L^{**}(t, \tau)$, в) и в других случаях (см. п. 3).

2°. Пусть в ИУ (2.1) возмущение F линейно по x, т. е. $f(t, x) = M(t)x + \mu(t)$, где M, μ — РППФ, и пусть имеется нерезонансная ситуация (2.9). Тогда заменой $x \to y$ типа (2.11) ИУ (2.1) преобразуется к удобному виду:

$$x(t) = y(t) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} N(t, \tau)\, y(\tau)\, d\tau, \quad N(t, \tau) \equiv L(t, \tau) + M(\tau) \tag{2.23}$$

$$y(t) = x^\circ + \varepsilon^2\int_{t_0}^{t} W(t, \tau)\, y(\tau)\, d\tau + \varepsilon m(t)$$

$$W(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^{t} N(t, \sigma)\, N(\sigma, \tau)\, d\sigma, \quad m(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\, d\tau$$

Возможны следующие представления для ядра $W(t, \tau)$: а) $W(t, \tau)$ — РППФ, $|W| \leqslant w_* = \mathrm{const}$ для $\tau, t \geqslant t_0$; б) функция $W(t, \tau)$ представима суммой $W(t, \tau) = W^*(\tau)(t - \tau) + W^{**}$ (этот случай имеет место при $N(t, \tau) \equiv N(\tau)$) или $W(t, \tau) = W^*(t - \tau)(t - \tau) + W^{**}(t, \tau)$, где W^*, W^{**} — РППФ; в) самом общем случае матрица-функция $W(t, \tau)$ может иметь вид $W(t, \tau) = W^*(t, \tau)(t-\tau) + W^{**}(t, \tau)$, где W^*, W^{**} — РППФ. В случаях а), б) при помощи утверждения 1 и результатов п. 2.1 устанавливается, что y — медленная переменная:

$$y = y(t, \varepsilon) = \zeta(\theta) + \delta(t, \varepsilon), \quad t - t_0 \in [0, \Theta / \varepsilon], \quad |\delta| \leqslant \varepsilon C(\Theta) \tag{2.24}$$

$$\zeta(\theta) = x^\circ + W_{00}^* \int\limits_{\theta_0}^{\theta} (\theta - \vartheta)\zeta(\vartheta)\, d\vartheta + \mu_0(\theta - \theta_0)$$

Соответствующие ИДЗК типа (2.3) и задачи Коши для ОДУ вида (2.4), (2.5) получаются аналогично указанному в п. 2.1. В общей ситуации в) вектор y немедленный в принятом для асимптотических методов смысле [6, 7] (см. п. 2.2). Его приближенное (асимптотическое) выражение для $t - t_0 \sim 1 / \varepsilon$ построить не удается, как и в общем случае нелинейной по x возмущающей функции $f(t, x)$ (1.2), (2.9).

3°. Эквивалентным изложенному подходу (2.23) будет прием усреднения по обоим аргументам ядра $N(t, \tau)$ в ИУ (2.1)

$$\eta(\theta) = N_{00} \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \eta(\vartheta)\, d\vartheta + \mu_0(\theta - \theta_0) + x^\circ \tag{2.25}$$

Условие ε-близости $\eta(\theta)$ и $x(t, \varepsilon)$ для $t - t_0 \in [0, \Theta / \varepsilon]$ имеет вид: $N_0^{(2)}(t) = \langle N(t, \tau)\rangle_\tau = N_{00} = \text{const}$, что отвечает условию $L_0^{(2)}(t) = L_{00} = \text{const}$ (см. п. 2.2, утверждение 2).

4°. Рассмотрим теперь ИДЗК (1.2), в которой ядро $K(t, \tau)$ усреднено по аргументу интегрирования τ ($K_0^{(2)}(t) = \langle K(t, \tau)\rangle_\tau$):

$$y^\cdot(t) = \varepsilon K_0^{(2)}(t) \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau + \varepsilon^\pi f(t, y(t)), \quad y(t_0) = x^\circ \tag{2.26}$$

Переменная $y = y(t, \varepsilon)$ — заведомо медленная в смысле п. 2.1: $y^\cdot = O(\sqrt{\varepsilon})$, $t - t_0 = O(1 / \sqrt{\varepsilon})(\pi = 1/2)$. Медленность в смысле п. 2.2 (при $\pi = 1$), вообще говоря, места не имеет. Пусть $y(t, \varepsilon)$ — решение ИДЗК (2.26) при $\pi = 1$ для $t - t_0 \in [0, \Theta / \varepsilon]$; тогда $|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon C(\Theta)$, если

$$\langle S(t, \tau)\rangle_\tau \equiv 0, \quad S(t, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t} [K(\sigma, \tau) - K_0^{(2)}(\sigma)]\, d\sigma \tag{2.27}$$

Чтобы переменная y была медленной для $t - t_0 = O(1 / \varepsilon)$, необходимо, чтобы $K_0^{(2)}(t) \equiv 0$; при этом обеспечивается ε-близость между $x(t, \varepsilon)$ и $y(t, \varepsilon)$, если $S(t, \varepsilon) = L(t, \tau)$ имеет нулевое среднее по $\tau : L_0^{(2)}(t) \equiv 0$, что является более жестким требованием, чем принятое в условиях утверждения 2 ($L_0^{(2)}(t) \equiv L_{00}$).

5°. Пусть имеется нерезонансная ситуация типа (2.9). Тогда при помощи леммы Гронуолла аналогично изложенному выше получается элементарная оценка (см. [9])

$$|x(t, \varepsilon) - x^\circ| \leqslant \varepsilon^\beta B(\Theta), \quad t - t_0 \in [0, \Theta / \varepsilon^{1-\beta}], \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \tag{2.28}$$

Здесь β — параметр, B — постоянная, не зависящая от t, ε. Если $\varphi(\theta)$ — решение усредненного ДУ $\varphi' = f_0(\varphi)$, $\varphi(\theta_0) = x^\circ$, где $\theta = \varepsilon^\pi t$ — «медленное время» $\theta - \theta_0 \in [0, \Theta]$, $0 < \pi < 1$, то можно получить следующую оценку:

$$|x(t, \varepsilon) - \varphi(\theta)| \leqslant \varepsilon^\gamma B(\Theta), \quad \gamma = \min(\pi, 1 - \pi), \quad 0 < \gamma < 1 \tag{2.29}$$

6°. Полученные результаты можно перенести непосредственно на ИДЗК вида (1.2) с медленно изменяющимися параметрами (после соответствующего преобразования ИДЗК вида (1.1))

$$x^\cdot(t) = \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} K(\theta, \vartheta, t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau + \varepsilon^\pi f(\theta, t, x(t)) \tag{2.30}$$

$$x(t_0) = x^\circ, \quad \theta = \varepsilon^\pi t, \quad \vartheta = \varepsilon^\pi \tau, \quad 0 < \pi \leqslant 1$$

Соответствующие различным предположениям п. 2.1 ($\pi = 1/2$) и п. 2.2 ($\pi =$ усредненные ИДЗК получаются по схемам (2.4) и (2.20):

$$\xi'(\theta) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} K_{00}(\theta, \vartheta)\, \xi(\vartheta)\, d\vartheta + f_0(\theta, \xi(\theta)), \quad \xi(\theta_0) = x^\circ \tag{2.31}$$

$$(2.32)\qquad \eta'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\Lambda_{00}(\theta,\vartheta)\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta+f_0(\theta,\eta(\theta)),\quad \eta(\theta_0)=x^\circ$$

$$\Lambda(\theta,\vartheta,t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}K(\theta,\vartheta,\sigma,\tau)\,d\sigma,\quad \langle\Lambda(\theta,\vartheta,t,\tau)\rangle_\tau=\Lambda_{00}(\theta,\vartheta)$$

7°. Для приложений представляет интерес дальнейшее развитие метода усреднения нелинейных ИДЗК и ИУ, например вида

$$(2.33)\qquad x^{\cdot}(t)=F(t,x(t),I,\varepsilon),\ x(t_0)=x^\circ$$

$$I=I[x]=\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}K(t,\tau,x(t),x(\tau))\,d\tau,\quad t-t_0\in[0,T(\varepsilon)]$$

$$(2.34)\qquad H(t,x(t),I[x],\varepsilon)=0,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$$

В частности, вектор-функции F, H могут быть линейными относительно вектора I — нелинейного интегрального оператора от x. Порядок π степени малого параметра ε, входящего в функции F, H, может быть различным, но соответствующим образом согласованным аналогично указанному в пп. 2.1, 2.2.

3. Возмущенные колебания сосуда, содержащего стратифицированную жидкость. При помощи развитой методики исследуются колебания системы, описываемой в безразмерных переменных ИДЗК вида (1.1)

$$(3.1)\qquad s^{\cdot\cdot}+s=-\varepsilon\int\limits_0^t\chi(t-\tau)\,s^{\cdot}(\tau)\,d\tau+\varepsilon^\pi p(t,s,s^{\cdot})$$

$$s(0)=s^\circ,\quad s^{\cdot}(0)=0,\quad t\in[0,\Theta\varepsilon^{-\pi}],\quad \pi={}^1/_2,\,1$$

$$\chi(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\nu_{2j+1}^4}{(2j+1)^4}\cos\nu_{2j+1}t\equiv\sum_{j=0}^{\infty}\chi_j\cos\nu_j^*t;\quad \nu_j\sim\sqrt{j},\quad j\to\infty$$

Соответствующие допущения, вывод ИДЗК (3.1) при $p\equiv0$ и ее исследование в резонансном случае содержатся в [9]. В (3.1): $s=s(t)$ — смещение сосуда, ν_j^* — собственные частоты внутренних волн двухслойной жидкости; $\varepsilon>0$ — малый числовой параметр, определяющий влияние колебаний жидкости на всю систему, масса которой равна сумме масс сосуда и жидкости и присоединенной массы. Посредством преобразования «поворота» ($(s,s^{\cdot})\to x^T$) ИДЗК (3.1) приводится к стандартному виду

$$(3.2)\qquad \begin{Vmatrix}s\\ s^{\cdot}\end{Vmatrix}=\Pi(t)\,x,\quad x=\begin{Vmatrix}a\\ b\end{Vmatrix},\quad \Pi(t)=\begin{Vmatrix}\cos t&\sin t\\ -\sin t&\cos t\end{Vmatrix}$$

$$x^{\cdot}(t)=\varepsilon\int\limits_0^tK(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau+\varepsilon^\pi f(t,x(t)),\quad x(0)=x^\circ$$

$$a^\circ=s^\circ,\quad b^\circ=0,\quad f^T(t,x)=p(t,\Pi(t)\,x)\,(-\sin t,\cos t)$$

$$K(t,\tau)=\chi(t-\tau)\begin{Vmatrix}-\sin t\sin\tau&\sin t\cos\tau\\ \cos t\sin\tau&-\cos t\cos\tau\end{Vmatrix},\quad \det K(t,\tau)\equiv0$$

Рассмотрим сперва строго резонансный случай $\nu_k^*=1$ ($k=0,1,2,\ldots$); отличие частот $O(\sqrt{\varepsilon})$ можно отнести к возмущению. Согласно п. 2.1, получим в медленном времени $\theta=\sqrt{\varepsilon}t$ усредненную ИДЗК вида (2.3) ($\chi_k=(2k+1)^{-4}$):

$$(3.3)\qquad \xi'(\theta)=K_{00}\int\limits_0^\theta\xi(\vartheta)\,d\vartheta+f_0(\xi(\theta)),\quad \xi(0)=x^\circ$$

$$\xi^T=(\alpha,\beta),\quad K_{00}=-(\chi_k/4)\,\mathrm{diag}\,(1,1),\quad \langle f(t,\xi)\rangle_t=f_0(\xi)$$

Согласно (2.4), (2.5), ИДЗК (3.3) эквивалентна задаче Коши для двух ОДУ второго порядка; интегральный член приводит к дополнительной «возвращающей силе». При $f_0 \equiv 0$ в системе имеются «биения» (см. [9]): $s(t, \varepsilon) = s^\circ \cos(^1/_2\chi_k\theta) \cos t + O(\sqrt{\varepsilon})$ при $t \in [0, \Theta/\sqrt{\varepsilon}]$. Пусть $p = ds^3$, т. е. в ИДЗК (3.1) учитывается типичная нелинейная добавка к возвращающей сосуд упругой силе; тогда в (3.3): $f_0^T = (^3/_8)\, d\, (\alpha^2 + \beta^2)(-\beta, \alpha)$. Введением переменных ζ, η, где $\zeta' = \alpha$, $\eta' = \beta$, а начальные условия для простоты — нулевые (см. (2.4), (2.4')), получим систему двух ОДУ второго порядка, допускающую два первых интеграла $C_{1,2}$:

(3.4)
$$
\begin{gathered}
^1/_2(\zeta'^2 + \eta'^2) + (\chi_k/8)(\zeta^2 + \eta^2) = C_1, \quad C_1 = {}^1/_2 s^{\circ 2} > 0 \\
-\zeta'\eta + \eta'\zeta = (^3/_8)\, dC_1 (\zeta^2 + \eta^2) - (3/128)\, d\chi_k (\zeta^2 + \eta^2)^2 + C_2, \quad C_2 = 0
\end{gathered}
$$

На основе выражений (3.4) система полностью интегрируется; переходом к полярным координатам (r, φ) вместо (3.4) получим

(3.5)
$$
\begin{gathered}
^1/_2(r'^2 + r^2\varphi'^2) + (\chi_k/8)\, r^2 = {}^1/_2 s^{\circ 2} \\
r^2\varphi' = (3/16)\, ds^{\circ 2} r^2 - (3/128)\, d\chi_k r^4 \\
r'^2 + r^2 d^2 [(3/16)\, s^{\circ 2} - (3/128)\, \chi_k r^2]^2 + (\chi_k/4)\, r^2 = s^{\circ 2}
\end{gathered}
$$

Последнее соотношение (3.5) для r, интегрируемое в эллиптических функциях, получается комбинацией первых двух интегралов. После определения $r = r(\theta, s^\circ)$ из второго уравнения определяется и $\varphi'(\theta, s^\circ) = (3/128)\, d\chi_k r^2 - (3/16)\, ds^{\circ 2}$. Дифференцированием r и интегрированием φ' по θ определяются искомые $\alpha = \zeta'(\theta, s^\circ)$, $\beta = \eta'(\theta, s^\circ)$, которые согласно (3.2) и п. 2.1 определяют координату $s(t, \varepsilon)$ и скорость $s^{\cdot}(t, \varepsilon)$ сосуда с погрешностью $O(\sqrt{\varepsilon})$ для $t \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$.

Пусть теперь имеет место нерезонансная ситуация: $\nu_j^* \neq 1 + O(\sqrt{\varepsilon})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ и $\pi = 1$; тогда на основании (2.20) и п. 2.2

(3.6)
$$
\begin{gathered}
\alpha' = \Lambda\beta - (^3/_8)\, d\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad \beta' = -\Lambda\alpha + (^3/_8)\, d\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \\
\Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_j}{1 - \nu_j^{*2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nu_{2j+1}^4}{(2j+1)^4} \frac{1}{1 - \nu_{2j+1}^2} \qquad (\Lambda \gtrless 0)
\end{gathered}
$$

Из (3.6) следует, что при $p \equiv 0$ $(d = 0)$ влияние внутренних волн двухслойной жидкости на колебания системы эквивалентно «гироскопическим силам» и изменению частоты на величину $\varepsilon\Lambda$, знак которой может быть произвольным $(\Lambda \gtrless 0)$.

Учет нелинейного (кубического) возмущения приводит к аналогичному эффекту: $s = s^\circ \cos[1 + \varepsilon\Lambda - (^3/_8)\, \varepsilon ds^{\circ 2}]\, t + O(\varepsilon)$ для $t \in [0, \Theta/\varepsilon]$.

Также можно учесть влияние других возмущений: внешнего почти периодического возбуждения, вязкого и квадратического трения, параметрического возбуждения и т. п. Изложенная методика применима для изучения процессов колебаний упругих систем, содержащих элементы с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Автор благодарит С. В. Нестерова, обратившего внимание на важность асимптотического исследования интересного для механических приложений класса интегродифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат. 1956. 491 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
3. *Гутер Р. С.*, *Кудрявцев Л. Д.*, *Левитан Б. М.* Элементы теории функций. М.: Физматгиз. 1963. 244 с.
4. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for nonlinear differential equations // J. Mec. 1969. V. 8. No. 3. P. 357—372.
5. *Акуленко Л. Д.* Асимптотическое решение двухточечных краевых задач // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 632—639.
6. *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
7. *Волосов В. М.*, *Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
8. *Митропольский Ю. А.*, *Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища шк. 1976. 589 с.
9. *Акуленко Л. Д.*, *Нестеров С. В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27—36.
10. *Шкиль Н. И.*, *Вороной А. Н.*, *Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Киев: Вища шк. 1985. 247 с.
11. *Филатов А. Н.*, *Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука. 1976. 152 с.
12. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с.

Москва

Поступила в редакцию 30.XII.1986