Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 531.36

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Зевин А. А.

Рассматриваются линейные системы с неконсервативными позиционными силами. Доказано, что теорема Релея о поведении собственных частот консервативных систем при изменении жесткости и инерции не может быть обобщена на рассматриваемые системы. Получено необходимое и достаточное условие стабилизации неустойчивой неконсервативной системы диссипативными силами определенного типа.

Установлено, что в случае вынужденных гармонических колебаний с частотой, лежащей вне границ спектра соответствующей консервативной системы, добавление неконсервативных сил уменьшает абсолютное значение функционала действия. Получены точные верхние оценки амплитуд вынужденных колебаний, не зависящие от неконсервативных сил.

1. Свободные колебания системы с неконсервативными позиционными силами описываются уравнением

$$M\mathbf{x}^{\cdot\cdot} + A\mathbf{x} = 0 \tag{1.1}$$
$$A = C + K, \quad M = \| m_{ij} \|_1^n, \quad C = \| c_{ij} \|_1^n, \quad K = \| k_{ij} \|_1^n,$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

где $\mathbf{x}$ — вектор обобщенных координат, M и C — симметрические матрицы инерции и упругости, K — кососимметрическая матрица неконсервативных сил.

В соответствии с теоремой Релея [1] частоты собственных колебаний соответствующей консервативной системы ($K = 0$) возрастают (не убывают) при увеличении жесткости и уменьшении инерции системы. В. Ф. Журавлев обобщил эту теорему на системы с гироскопическими силами [2]. Он же предложил следующую задачу: справедливо ли аналогичное утверждение для системы (1.1), хотя бы при достаточно малых неконсервативных силах? Ниже дается отрицательный ответ на этот вопрос.

Без ограничения общности полагаем, что $M = E$ — единичная матрица. Пусть λ_i — простое действительное собственное значение матрицы A, $\mathbf{a}_i$ — соответствующий собственный вектор, $\mathbf{b}_i$ — собственный вектор транспонированной матрицы A^T, отвечающий значению λ_i. В общем случае векторы $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i$ линейно независимы; это условие в дальнейшем считаем выполненным. Так как скалярное произведение $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) \neq 0$ [3], то примем $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = 1$.

Положим в (1.1) $C(\varepsilon) = C_0 + \varepsilon C_1$, где C_1 — симметрическая положительно-определенная матрица, и рассмотрим поведение $\lambda_i(\varepsilon)$ при возрастании ε. Покажем, что в отличие от случая консервативной системы $\lambda_i(\varepsilon)$ убывает по ε при определенном выборе C_1.

Как известно

$$\delta_i = d\lambda_i(\varepsilon)/d\varepsilon\,|_{\varepsilon=0} = (\mathbf{a}_i, C_1\mathbf{b}_i) \tag{1.2}$$

Полагая $\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_i + \mathbf{d}_i$, $\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{d}_i$ и учитывая симметрию матрицы C_1, найдем

$$\delta_i = (\mathbf{c}_i, C_1\mathbf{c}_i) - (\mathbf{d}_i, C_1\mathbf{d}_i) \tag{1.3}$$

Пусть N — ортогональная матрица, первая строка которой равна $\mathbf{c}_i/\|\mathbf{c}_i\|$; Δ — диагональная матрица с элементами $0, 1, \ldots, 1$; $S = N^T \Delta N$. Очевидно, что матрица S неотрицательно определенная; ее простому собственному значению $\lambda = 0$ отвечает собственный вектор $\mathbf{c}_i$; остальные собственные значения равны единице. Поэтому $(\mathbf{c}_i, S\mathbf{c}_i) = 0$; $(\mathbf{d}_i, S\mathbf{d}_i) > 0$ ввиду линейной независимости $\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{d}_i$.

Положим $C_1 = S + \mu E$; ясно, что при $\mu > 0$ матрица C_1 положительно определена. Так как $\delta_i < 0$ при $\mu = 0$, то это неравенство справедливо и при достаточно малых μ. Таким образом, при указанном выборе C_1 собственное значение $\lambda_i(\varepsilon)$ убывает по ε на некотором интервале $(0, \varepsilon_*)$, несмотря на то, что $C(\varepsilon)$ возрастает.

Аналогично можно показать, что в отличие от случая консервативной системы величина λ_i может убывать при уменьшении матрицы инерции M.

Проиллюстрируем полученный вывод на примере. Пусть

$$M = E, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{Vmatrix}, \quad \delta^2 = \frac{3}{4}$$

Первое собственное значение матрицы $A = C + K$ равно $\lambda_1 = 1{,}5$; соответствующие собственные векторы матриц A и A^T равны $\mathbf{a}_1 = (\sqrt{2}\delta, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{b}_1 = (\sqrt{2}\delta, -\sqrt{2}/2)$. Поэтому $\mathbf{c}_1 = (\sqrt{2}\delta, 0)$, $\mathbf{d}_1 = (0, \sqrt{2}/2)$, $N = E$, $S = \operatorname{diag}(0, 1)$. Положим $C_1 = \operatorname{diag}(\mu, 1)$, тогда собственные значения $\lambda_i(\varepsilon)$ — корни уравнения

$$F(\lambda, \varepsilon) = \lambda^2 - (4 + \varepsilon + \mu\varepsilon)\lambda + 3 + \varepsilon + \delta^2 + 3\mu\varepsilon + \mu\varepsilon^2 = 0 \tag{1.4}$$

Из (1.4) найдем $\delta_1 = {}^3/_2\mu - {}^1/_2$, поэтому при $\mu \in (0, {}^1/_3)$ $\lambda_1(\varepsilon)$ убывает при малых ε, хотя $C(\varepsilon)$ возрастает.

Отметим, что из доказанного выше утверждения отнюдь не следует, что можно уменьшить λ_i до любого заданного значения, увеличивая определенным образом матрицу C. Как известно [4], действительные части собственных значений матрицы A удовлетворяют неравенству

$$\nu_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \nu_n \tag{1.5}$$

где ν_1 — наименьшее, ν_n — наибольшее собственное значение матрицы C. Так как при возрастании C величина ν_1 возрастает, то действительные собственные значения матрицы A «в целом» также возрастают, хотя на некоторых интервалах они могут и убывать.

Замечание. При анализе устойчивости неконсервативных механических систем вида (1.1) типична следующая ситуация. Элементы матрицы A зависят от некоторого параметра μ (в задачах аэроупругости, например, μ — скорость ветрового потока [5]). При $\mu = 0$ собственные значения матрицы A действительны и положительны, т. е. система (1.1) устойчива. Критическим является такое значение μ, начиная с которого хотя бы один характеристический показатель переходит в правую полуплоскость. Такой переход происходит при встрече положительных собственных значений λ_1 и λ_{i+1} (колебательная форма потери устойчивости — флаттер) либо при изменении знака наименьшего собственного значения λ_1 (неколебательная форма потери устойчивости — дивергенция). Из неравенства (1.5) следует, что если при возрастании μ соответствующая консервативная система ($K = 0$) остается устойчивой, то дивергенция невозможна.

2. Рассмотрим стабилизацию неустойчивой неконсервативной системы при помощи диссипативных сил. Как известно [5], добавление таких сил, вообще говоря, может даже дестабилизировать устойчивую неконсервативную систему. Поэтому ниже рассматривается специальный класс диссипативных сил, при котором матрица коэффициентов диссипации пропорциональна инерционной матрице (такое демпфирование принято назы-

вать внешним [6]). Соответствующее уравнение движения приводится к виду

$$(2.1)\qquad \mathbf{x}^{\cdot\cdot} + \varepsilon \mathbf{x}^{\cdot} + A\mathbf{x} = 0$$

где положительный параметр ε характеризует величину диссипативных сил.

Пусть $\lambda_j = a_j + ib_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ — собственные значения матрицы A. Если какое-либо из значений $b_j \neq 0$ либо $a_j < 0$, то при $\varepsilon = 0$ система (2.1) неустойчива.

Лемма 1. Для асимптотической устойчивости системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.2)\qquad \varepsilon^2 > b_j^2/a_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

Доказательство. Заменой $\mathbf{x} = \mathbf{y} \exp(-{}^1/_2\varepsilon t)$ уравнение (2.1) приводится к виду

$$(2.3)\qquad \mathbf{y}^{\cdot\cdot} + (A - {}^1/_4\varepsilon^2 E)\,\mathbf{y} = 0$$

Полагая $\mathbf{y} = \mathbf{y}_j \exp(c_j + id_j)\,t$, найдем, что характеристические показатели системы (2.3) удовлетворяют соотношению $(c_j + id_j)^2 = {}^1/_4\varepsilon^2 - \lambda$. Поэтому

$$(2.4)\qquad c_j^{1,2} = \pm \{{}^1/_2\,[{}^1/_4\varepsilon^2 - a_j + (({}^1/_4\varepsilon^2 - a_j)^2 + b_j^2)^{1/2}]\}^{1/2}$$

Очевидно, что система (2.1) асимптотически устойчива, если $\varepsilon/2 > |\,c_j^{1,2}\,|$ для всех j. Это условие при учете (2.4) дает неравенство (2.2).

Как следует из (2.2), неконсервативная система стабилизируется диссипативными силами указанного вида, если только $a_j > 0$ для всех j. Учитывая неравенство (1.5), найдем, что если соответствующая консервативная система устойчива, то при любых неконсервативных силах система (2.1) асимптотически устойчива, начиная с некоторого ε.

Величины b_i удовлетворяют неравенству [4]

$$(2.5)\qquad b_i \leqslant k_* \sqrt{{}^1/_2 n\,(n-1)}, \quad k_* = \max k_{ij}$$

Учитывая (1.5) и (2.5), получим достаточное условие асимптотической устойчивости системы (2.1), не требующее вычисления собственных значений матрицы A:

$$(2.6)\qquad \varepsilon^2 > {}^1/_2 k_*^2 n\,(n-1)/\nu_1$$

Это условие наиболее полезно в случае, когда известна лишь верхняя граница элементов матрицы неконсервативных сил.

3. Рассмотрим вынужденные гармонические колебания в системе с неконсервативными позиционными силами

$$(3.1)\qquad \mathbf{x}^{\cdot\cdot} + C\mathbf{x} + K\mathbf{x} = \mathbf{p}\cos\omega t, \quad \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T$$

Предположим, что частота вынуждающей силы лежит вне частотного интервала соответствующей консервативной системы, т. е. $\omega^2 \notin [\nu_1, \nu_n]$. Тогда в силу (1.5) $\det|\,C + K - \omega^2 E\,| \neq 0$, поэтому уравнение (3.1) имеет периодическое решение $\mathbf{x} = \mathbf{a}\cos\omega t$, где вектор $\mathbf{a}$ определяется из уравнения

$$(3.2)\qquad (C + K - \omega^2 E)\,\mathbf{a} = \mathbf{p}$$

Положим

$$(3.3)\qquad J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi/\omega} ((\mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{x}^{\cdot}) - (C\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (2\mathbf{p}\cos\omega t, \mathbf{x}))\,dt$$

Величина J представляет собой интеграл действия, вычисленный на интервале, равном периоду колебаний. Для периодического решения найдем

$$(3.4)\qquad J = {}^1/_2\pi\omega^{-1}(\omega^2(\mathbf{a},\mathbf{a}) - (C\mathbf{a},\mathbf{a}) + 2(\mathbf{p},\mathbf{a}))$$

При фиксированных C и $\mathbf{p}$ величина J — функция элементов k_{ij} матрицы K, т. е. $J = J(K)$.

Лемма. Максимум $|J(K)|$ достигается при $K = 0$.

Доказательство. В силу (3.2) $(C\mathbf{a},\mathbf{a}) - \omega^2(\mathbf{a},\mathbf{a}) = (\mathbf{p},\mathbf{a})$, поэтому

$$(3.5)\qquad J = {}^1/_2\pi\omega^{-1}(R\mathbf{a},\mathbf{a}),\quad R = C - \omega^2 E$$

Учитывая, что $(R^{-1})^T = R^{-1}$, $(K, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, K\mathbf{a})$, при помощи (3.2) найдем

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}(R^{-1}\mathbf{p},\mathbf{p}) &= (R^{-1}(R+K)\mathbf{a}, (R+K)\mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{a}, R\mathbf{a}) + (R^{-1}K\mathbf{a}, K\mathbf{a})\end{aligned}$$

Если $\omega^2 < \nu_1$, то $R > 0$, поэтому $J(K) > 0$, $(R^{-1}K\mathbf{a}, K\mathbf{a}) \geqslant 0$ и в силу (3.6) $J \leqslant {}^1/_2\pi\omega^{-1}(R^{-1}\mathbf{p},\mathbf{p}) = J(0)$. Если $\omega^2 > \nu_n$, то $R < 0$, $J(K) < 0$, $J \geqslant {}^1/_2\pi\omega^{-1}(R^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{p}) = J(0)$. Следовательно, в обоих случаях $|J(K)| \leqslant |J(0)|$.

Таким образом, добавление неконсервативных сил уменьшает абсолютное значение функционала действия.

При $K \neq 0$ равенство $J(K) = J(0)$ имеет место, если только $K\mathbf{a} = 0$. При этом, как видно из (3.2), амплитуды консервативной и неконсервативной систем совпадают.

Из неравенства $|(\mathbf{a}, R\mathbf{a})| \leqslant |R^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{p}|$, справедливого при любой матрице K, следует, что амплитуды колебаний $|a_i|$ системы (3.1) имеют верхние границы, не зависящие от величин неконсервативных сил. Поэтому представляет интерес найти максимум $|a_i|$ на множестве всех кососимметрических матриц K.

Обозначим R_i, K_i матрицы, полученные из R и K вычеркиванием i-х строк и столбцов, $V_i = R_i + K_i$; $\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_i, \mathbf{a}_*$ и $\mathbf{p}_*$ — векторы, образованные из i-х столбцов матриц R_i, K_i и векторов $\mathbf{a}, \mathbf{p}$ вычеркиванием i-й компоненты.

Лемма 3. Максимум i-й амплитуды колебаний системы (3.1) равен

$$(3.7)\qquad a_i^* = |c_i| + \sqrt{c_i^2 + d_i}$$

$$c_i = \frac{p_i - \mathbf{r}_i^T R_i^{-1}\mathbf{p}_*}{2(r_{ii} - \mathbf{r}_i^T R_i^{-1}\mathbf{r}_i)},\quad d_i = \frac{\mathbf{p}_*^T R_i^{-1}\mathbf{p}_*}{4(r_{ii} - \mathbf{r}_i^T R_i^{-1}\mathbf{r}_i)}$$

Равенство $|a_i| = a_i^*$ достигается, когда элементы матрицы K удовлетворяют соотношению (3.11).

Доказательство. Предполагая сначала элементы матрицы K_i фиксированными, найдем максимум $|a_i|$ по элементам вектора $\mathbf{k}_i$.

Прежде всего покажем, что искомый максимум существует.

Определитель матрицы $R + K$ можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_0 + (\mathbf{k}_i, \mathbf{c}) + (\mathbf{k}_i, S\mathbf{k}_i)$$

где Δ_0 — определитель матрицы R, $(\mathbf{k}_i, \mathbf{c})$ — линейная, $(\mathbf{k}_i, S\mathbf{k}_i)$ — квадратичная форма коэффициентов k_{ij}. Покажем, что S — знакоопределенная матрица того же знака, что и R ($S > 0$ при $\omega^2 < \nu_1$, $S < 0$ при $\omega^2 > \nu_n$). Действительно, если $S \ngeqslant 0$ при $R > 0$ либо $S \nleqslant 0$ при $R < 0$, то $\Delta = 0$ при некотором $\mathbf{k}_i$ и, следовательно, матрица $R + K$ имеет собственное значение $\lambda_i = 0$. Последнее, однако, невозможно ввиду $\nu_1 - \omega^2 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \nu_i - \omega^2$. Предположим теперь, что $(\mathbf{k}_i, \mathbf{a}) = 0$ и $(\mathbf{k}_i, S\mathbf{k}_i) = 0$ при некотором $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_i^*$. Положив $\mathbf{k}_i = \varepsilon\mathbf{k}_i^*$ и представив решение (3.2) в виде $a_i = \Delta_i/\Delta$, найдем, что Δ_i — линейная функция ε (малым возмущением вектора $\mathbf{p}$ можно в случае необходимости достичь того, чтобы коэффициент при ε не был равен нулю), в то время как Δ не зависит от ε. Поэтому $|a_i| \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$, что противоречит ограниченности $|a_i|$. Таким образом, S — знакоопределенная матрица; следовательно, $|a_i| \to 0$ при $\|\mathbf{k}_i\| \to \infty$. Поэтому точная верхняя граница $|a_i(\mathbf{k}_i)|$ достигается при конечных $\mathbf{k}_i$, т. е. искомый максимум $|a_i(\mathbf{k}_i)|$ существует.

Запишем систему (3.2) в виде

$$a_i r_{ii} + ((\mathbf{r}_i - \mathbf{k}_i),\ \mathbf{a}_*) = p_i,\quad a_i(\mathbf{r}_i + \mathbf{k}_i) + V_i\mathbf{a}_* = \mathbf{p}_* \tag{3.8}$$

Выразив $\mathbf{a}_*$ из второго уравнения (3.8) при помощи обратной матрицы V^{-1}, из первого уравнения найдем

$$a_i = \frac{p_i - (\mathbf{r}_i^T - \mathbf{k}_i^T)V_i^{-1}\mathbf{p}_*}{r_{ii} - \mathbf{r}_i^T V_i^{-1}\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_i^T V_i^{-1}\mathbf{k}_i - \mathbf{r}_i^T V_i^{-1}\mathbf{r}_i + \mathbf{k}_i^T V_i^{-1}\mathbf{r}_i} \tag{3.9}$$

В точке максимума $|a_i(\mathbf{k}_i)|$ производные (3.9) по элементам вектора $\mathbf{k}_i$ равны нулю. Это приводит к системе уравнений относительно $\mathbf{k}_i$

$$-(V_i^{-1} + (V_i^{-1})^T)\,\mathbf{k}_i = (V_i^{-1} + (V_i^{-1})^T)\,\mathbf{r}_i - a_i^{-1}V_i^{-1}\mathbf{p}_* \tag{3.10}$$

Матрица, обратная $V_i^{-1} + (V_i^{-1})^T$, равна ${}^1/_2 V_i^T R^{-1} V_i$. Действительно, учитывая, что $V_i + V_i^T = 2R_i$, получим

$$V_i^T R_i^{-1} V_i (V_i^{-1} + (V_i^{-1})^T) = V_i^T R_i^{-1} + V_i^T R_i^{-1}(2R - V_i^T)(V_i^{-1})^T = 2E$$

Поэтому решение системы (3.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= -{}^1/_2 V_i^T R_i^{-1} V_i\,((V_i^{-1} - (V_i^{-1})^T)\,\mathbf{r}_i - a_i^{-1}V_i^{-1}\mathbf{p}_* = \\ &= {}^1/_2 a_i^{-1} V_i^T R_i^{-1}\mathbf{p}_* - {}^1/_2 V_i^T R_i \mathbf{r}_i + {}^1/_2 V_i^T R_i^{-1}(2R_i - V_i^T)(V_i^{-1})^T\mathbf{r}_i = \\ &= {}^1/_2 a_i^{-1} V_i^T R_i^{-1}\mathbf{p}_* + \mathbf{r}_i - V_i^T R_i^{-1}\mathbf{r}_i \end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставив это выражение в (3.9) и учитывая при этом, что

$$(R_i^{-1})^T = R_i^{-1},\quad R_i^T = R_i,\quad K_i^T = -K_i,\quad \mathbf{a}^T B\mathbf{c} = \mathbf{c}^T B^T \mathbf{a}$$

для любых $\mathbf{a}$, B, $\mathbf{c}$ после преобразований получим

$$a_i = [p_i + {}^1/_2 a_i^{-1}\mathbf{p}_*^T R_i^{-1}\mathbf{p}_* - \mathbf{r}_i^T R_i^{-1}\mathbf{p}_*]\,[r_{ii} + {}^1/_4 a_i^{-2}\mathbf{p}_*^T R_i^{-1}\mathbf{p}_* - \mathbf{r}_i^T R^{-1}\mathbf{r}_i]^{-1}$$

Таким образом, стационарное значение $a_i(\mathbf{k}_i)$ — корень квадратного уравнения

$$a_i^2 - 2c_i a_i - d_i = 0 \tag{3.12}$$

Наибольшее из абсолютных значений корней уравнения (3.12) a_i^* равно максимуму $|a_i|$ по переменным k_{ij} ($j = 1, \ldots, n$; $j \neq i$). Но так как коэффициенты этого уравнения не зависят от элементов матрицы K_i, то a_i^* равно максимуму $|a_i|$ по всем переменным k_{ij}, т. е. искомому максимуму $a_i(K)$. Таким образом, лемма доказана.

Заметим, что для случая, когда C — диагональная матрица, максимум $|a_i(K)$ найден в [7] в связи с другой физической задачей.

Если $\mathbf{p}_* = 0$, то $a_i^* = p_i(r_{ii} - \mathbf{r}_i^T R^{-1}\mathbf{r}_i)^{-1}$, что совпадает с соответствующим значением a_i при $K = 0$. Физически это означает, что если вынуждающая сила содержит одну компоненту, то добавление неконсервативных сил уменьшает (не увеличивает) соответствующую амплитуду колебаний.

Замечание. Полученные результаты позволяют решить следующую задачу, представляющую самостоятельный интерес для теории линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$. Предположим, что в представлении $A = R + K$, где R — симметрическая, K — кососимметрическая матрица, матрица R знакоопределенная. Как видно из доказательства леммы, экстремальные значения $a_i(K)$ — корни уравнения (3.12). Поэтому решение рассматриваемой системы допускает двустороннюю оценку, не зависящую от матрицы K:

$$a_i^- \leqslant a_i \leqslant a_i^+,\quad a_i^- = c_i - \sqrt{c_i^2 + d_i},\quad a_i^+ = c_i + \sqrt{c_i^2 + d_i}$$

При $\mathbf{p}_* \neq 0$ ($\mathbf{p}_*$ образуется из $\mathbf{p}$ исключением i-й компоненты) эти оценки точные; они достигаются, когда элементы матрицы K удовлетворяют соотношению (3.11), где $a_i = a_i^-$ и $a_i = a_i^+$ соответственно. При $\mathbf{p}_* = 0$ одна из величин a_i^-, a_i^+, равная нулю, не достигается при конечных K ($a_i \to 0$ при $\|K\| \to \infty$).

Отметим также, что из полученного выше при $\mathbf{p}_* = 0$ результата следует, что абсолютные значения диагональных элементов матрицы R^{-1} не меньше соответствующих значений матрицы $(R + K)^{-1}$.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стретт Дж. В.* (*Лорд Релей*). Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат. 1955. 504 с.
2. *Журавлев В. Ф.* Обобщение теоремы Релея на гироскопические системы // ПММ 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606—610.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1966. 576 с.
4. *Маркус М.*, *Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука. 1972. 232 с.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961. 339 с.
6. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем/Под ред. *В. В. Болотина*. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.
7. *Зевин А. А.* Верхние оценки величин импульсов в виброударных системах // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 5. С. 29—34.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
24.IX.1987