Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Воротников В. И.

Доказывается, что задача устойчивости (асимптотической устойчивости) по части переменных линейной системы с периодическими, аналитическими коэффициентами эквивалентна задаче устойчивости (асимптотической устойчивости) по всем переменным либо этой же системы, либо вспомогательной линейной системы с периодическими, но разрывными, вообще говоря, коэффициентами, размерность которой меньше размерности исходной системы. В случае разрывности коэффициентов вспомогательной системы понятия ее решений и устойчивости решений уточняются. Приводится конструктивная процедура построения вспомогательной системы, даются необходимые и достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) по части переменных, обобщающие результаты теории Флоке — Ляпунова.

Показывается, что класс нелинейных систем, для которых вопрос об устойчивости относительно части переменных решается линейным приближением, можно расширить, если вместо линейной части исходной нелинейной системы рассматривать специально построенную систему линейного приближения, эквивалентную некоторой нелинейной подсистеме исходной нелинейной системы. Даются конструктивные процедуры построения указанных вспомогательных систем, доказывается теорема об устойчивости относительно части переменных. Дополняются известные теоремы об устойчивости в критических по Ляпунову случаях.

1. Постановка задачи устойчивости линейной системы с периодическими коэффициентами. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$m > 0, \quad p \geqslant 0, \quad n = m + p$$

или, в переменных y, z

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l \quad (j = 1, \ldots, p)$$

Коэффициенты A_{ij}, a_{ik}, b_{il}, c_{jk}, d_{jl} — периодические периода T аналитические функции $t \in [0, \infty)$.

Рассмотрим задачу об устойчивости (асимптотической устойчивости) по отношению к $y_1, \ldots, y_m$ [1, 2] невозмущенного движения $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (1.1).

2. Вспомогательное утверждение. Представим систему (1.1) в векторной форме

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}^{\cdot} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} \quad (\mathbf{x}^{\cdot} = A^*\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

где A^*, A, B, C, D — матричные функции $t \in [0, \infty)$ соответствующих размеров, и рассмотрим матрицы

$$G_1 = L_1,\ G_2 = \{L_1, L_2\}, \ldots, G_j = \{L_1, \ldots, L_j\} \quad (j = 3, \ldots \ldots, p + 1)$$

элементы которых определяются соотношениями

$$L_1 = B^T, \ldots, L_j = L_{j-1}^{\cdot} + D^T L_{j-1} \ (j = 2, \ldots, p + 1)$$

($L_j^{\cdot}$ — производная матричной функции L_j, T — знак транспонирования). Все элементы матриц G_i, L_i ($i = 1, \ldots, p + 1$) будут периодическими периода T аналитическими функциями $t \in [0, \infty)$.

Множество точек $t \in [0, T]$, за исключением, быть может, их некоторого конечного множества M, будем обозначать $[0, T] \setminus M$.

Лемма 1. 1) Каждая из функций $F_i(t) = \operatorname{rank} G_i(t)$ $(i = 1, \ldots \ldots, p+1)$ сохраняет на промежутке $[0, T] \setminus M$ постоянное значение N_i ($1 \leqslant \leqslant N_i \leqslant p$; $N_i = 0$, если все элементы матрицы G_i тождественно равны нулю на $[0, T]$), причем при всех $t \in [0, T] \setminus M$ линейно независимой является одна и та же система N_i векторов-столбцов матрицы G_i ($i = 1, \ldots \ldots, p + 1$).

2) Существует постоянное число s (имеется в виду минимальное число s, $2 \leqslant s \leqslant p + 1$, обладающее подобным свойством), такое, что при всех $t \in [0, T] \setminus M$ справедливо соотношение

$$\operatorname{rank} G_{s-1} = \operatorname{rank} G_s = N \quad (1 \leqslant N = \text{const} \leqslant p) \tag{2.2}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим множество $\Delta_i = \{F_{ij}(t)\}$ всех возможных квадратных матриц, получающихся из $G_i(t)$ вычеркиванием столбцов и строк. Функции $|F_{ij}(t)|$, являющиеся определителями указанных матриц, будут аналитическими и могут обращаться в нуль лишь на конечном множестве M значений $t \in [0, T]$, если эти функции не тождественно равны нулю при всех $t \in [0, T]$ [3]. Функция $F_i(t)$ ($i = 1, \ldots, p + 1$), по определению, в каждой точке $t \in [0, T]$ равна максимальному порядку $k_i(t)$ отличного от нуля определителя $|F_{ij}|$. Обозначим $k_i^+ = \max k_i(t)$, $t \in [0, T]$. Поскольку в случае, когда все элементы матрицы $G_i(t)$ тождественно равны нулю на $[0, T]$, утверждение леммы очевидно (в этом случае $F_i \equiv 0$, $t \in [0, T]$), то считаем, что $1 \leqslant k_i^+ \leqslant p$. Значит, в множестве Δ_i найдется такая квадратная матрица F_{ij}^* размера $k_i^+ \times k_i^+$, что $|F_{ij}^*| \neq 0$ хотя бы при одном $t_i = t_{*i} \in [0, T]$. Но тогда на основании свойств аналитических функций $|F_{ij}^*| \neq 0$ при всех $t \in \in [0, T] \setminus M$. Поэтому $k_i(t) = k_i^+$ при всех $t \in [0, T] \setminus M$. Полагая $N_i = k_i^+$, заключаем, что $F_i = N_i$, $t \in [0, T]$. На основании доказанного найдется $t \in t_i^* \in \in [0, T]$, такое, что система N_i векторов-столбцов матрицы $G_i(t)$ линейно независима. Из элементов этих векторов-столбцов можно составить квадратную матрицу размера $N_i \times N_i$, определитель которой при $t = t_i^*$, а следовательно, и при всех $t \in [0, T] \setminus M$ отличен от нуля. Значит, выбранная система N_i векторов-столбцов линейно независима при всех $t \in [0, T] \setminus M$. Первая часть леммы доказана.

2) При всех $t \in [0, T]$ найдется $s = s(t)$, такое, что равенство (2.2) выполнено. Пусть $k = \max s(t)$, $t \in [0, T]$. Тогда на основании доказанного в первой части число $N^+ = \operatorname{rank} G_k(t^+)$ (t^+ — значение t, при котором достигается $\max s(t)$) остается постоянным при всех $t \in [0, T] \setminus M$. Поэтому равенство $\operatorname{rank} G_{k-1} = \operatorname{rank} G_k$ будет выполняться не только при $t = t^+$, но и при всех $t \in [0, T] \setminus M$. Полагая $s = k$, заключаем, что лемма доказана.

Замечание. Требование об исключении, быть может, конечного числа точек из $[0, T]$ в лемме 1 существенно. Это ясно, например, уже в случае системы $y_1^{\cdot} = \sin tz_1 + + z_2$, $z_i^{\cdot} = z_i$ ($i = 1, 2$), когда $\operatorname{rank} G_2 = \operatorname{rank} G_3 = 2$ при всех $t \in [0, 2\pi]$, за исключением $t_1 = \pi/2$, $t_2 = 3\pi/2$, и в тоже время $\operatorname{rank} G_2 \neq \operatorname{rank} G_3$ при $t = t_i$ ($i = 1, 2$).

3. Построение вспомогательной системы. Пусть s — минимальное число, при котором для всех $t \in [0, T] \setminus M$ справедливо равенство (2.2). На основании леммы 1 в матрице G_{s-1} найдется N линейно независимых при $t \in$

$\in [0, T] \setminus M$ векторов-столбцов $g_i = [g_{i1}(t), \ldots, g_{ip}(t)]$, $i = 1, \ldots, N$.

Для построения вспомогательной системы введем новые переменные

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{p} g_{ij}(t) z_j \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{3.1}$$

Поскольку справедливо равенство (2.2), то заключаем, учитывая структуру матриц G_i $(i = 1, \ldots, p + 1)$, что при введении переменных (3.1) получаем вспомогательную линейную систему

$$\xi^{\cdot} = Q\xi, \quad \xi = (y_1, \ldots, y_m, \mu_1, \ldots, \mu_N) \tag{3.2}$$

Здесь Q — матрица размера $(m + N) \times (m + N)$, элементы которой — непрерывные при всех $t \in [0, T] \setminus M$ (и, следовательно, при всех $t \in [0, \infty) \setminus M^*$, где M^* — счетное множество точек), аналитические на интервалах непрерывности, периодические периода T функции $t \in [0, \infty)$. Разрывы функций, входящих в матрицу Q, обусловлены тем, что линейная независимость векторов g_i может нарушаться на конечном множестве точек из промежутка $[0, T]$ и, следовательно, на счетном множестве точек M^* из $[0, \infty)$. Итак, справедлива

Лемма 2. Для системы (2.1) может быть построена вспомогательная линейная система (3.2), размерность которой равна $m + N$, $N = \operatorname{rank} G_{s-1}(t)$.

4. Структура вспомогательной системы и ее решения. Введем матрицы: 1) $R_1(t)$ размера $N \times p$, строки которой — линейно независимые при $t \in [0, T] \setminus M$ столбцы из G_{s-1}; 2) $R_2(t)$ размера $N \times N$, столбцы которой — линейно независимые при $t \in [0, T] \setminus M$ столбцы из R_1 (пусть эти столбцы имеют номера $i_1, \ldots, i_N$ в R_1); 3) $R_3(t)$ размера $p \times N$, строка с номером i_j $(j = 1, \ldots, N)$ которой является строкой с номером j матрицы R_2^{-1}, а остальные строки из R_3 — нулевые при $t \in [0, T]$ (матрица $R_2^{-1}(t)$ и, следовательно, R_3 имеют, вообще говоря, разрывы коэффициентов на конечном множестве точек из $[0, T]$);

$$R_4 = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & R_1 \end{Vmatrix}, \quad R_5 = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & R_3 \end{Vmatrix}, \quad R_6 = R_5^{\cdot} \tag{4}$$

Лемма 3. Вспомогательная линейная система (3.2) состоит из уравнений

$$\xi^{\cdot} = R_4 [A^* R_5 - R_6] \xi \tag{4.1}$$

Доказательство. Переход от системы (2.1) к системе (3.2) эквивалентен линейной замене переменных

$$\mathrm{w} = R(t)\,\mathrm{x}; \quad R = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & R^* \end{Vmatrix}, \quad R^* = \begin{Vmatrix} R_1 \\ R_* \end{Vmatrix}$$

причем R_* — произвольная матрица размера $(p - N) \times p$, коэффициенты которой — аналитические, периодические периода T функции, такая, что матрица R — невырожденная при $t \in [0, T] \setminus M$. При этом систему (3.2) составят первые $m + N$ уравнений системы $\mathrm{w}^{\cdot} = R\,[A^* R^{-1} - R^{-1}]\,\mathrm{w}$. Используя схему анализа структуры матрицы вида RA^*R^{-1} из [4], можно показать, что для первых $m + N$ строк этой матрицы при всех $t \in [0, T]$ справедливо соотношение $RA^*R^{-1} = R_4 A^* R_6$. Кроме того, непосредственной проверкой можно убедиться, что для первых $m + N$ строк матрицы $RR^{\cdot -1}$ при всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство $RR^{\cdot -1} = R_4 R_6$. Из полученных соотношений следует, что уравнения (4.1) действительно образуют систему (3.2). Лемма доказана.

На каждом из интервалов I_i, где коэффициенты системы (3.2) непрерывны (и являются аналитическими функциями) выполнены условия теоремы существования и единственности решений [5]. Поэтому на каждом из интервалов I_i существует единственное решение $\xi = \xi_{(3.2)}(t)$ системы (3.2), удовлетворяющее соответствующим начальным условиям на этом интервале и продолжимое на весь интервал I_i; кроме того, указанные решения будут аналитическими функциями $t \in I_i$. Всевозможные наборы таких решений (в набор входит только одно решение с каждого интервала I_i) можно трактовать как решение системы (3.2) при $t \in [0, \infty)$ в том плане, что эти решения будут определены при почти всех $t \in [0, \infty)$ (точнее — при всех $t \in [0, \infty)$, за исключением счетного множества M^* точек разрыва коэффициентов системы (3.2) на $[0, \infty)$) и при $t \in [0, \infty)\setminus M^*$ удовлетворяют системе (3.2). Для нахождения таких решений достаточно найти фундаментальную матрицу $G(t)$ решений системы (3.2) на интервалах I_i.

Покажем, какова матрица G на интервалах I_i. В силу теоремы Флоке [5—7] фундаментальная матрица решений системы (2.1) имеет вид $X = \Phi e^{tL}$, где Φ — аналитическая, периодическая периода T матричная функция размера $n \times n$, такая, что $|\Phi| \neq 0$, $t \in [0, \infty)$, L — постоянная матрица того же размера. (Матричная функция e^{tL} — фундаментальная матрица решений системы $\eta^{\cdot} = L\eta$. Корни ρ_i $(i = 1, \ldots, n)$ уравнения $|L - \rho E_n| = 0$ называются характеристическими показателями системы (2.1).) Поскольку система (3.2) получается из (2.1) в результате линейного (с коэффициентами — аналитическими, периодическими периода T функциями $t \in [0, \infty)$), невырожденного при $t \in I_i$ преобразования переменных, а размерность системы (3.2) равна $m + N$, то на интервалах I_i фундаментальная матрица решений системы (3.2) имеет вид $G = \Psi e^{tK}$, где Ψ — аналитическая, периодическая периода T матричная функция t размера $(m + N) \times (m \times N)$, такая, что $|\Psi| \neq 0$, $t \in I_i$, K — постоянная матрица того же размера. Корни ω_j $(j = 1, \ldots, m + N)$ уравнения $|K - \omega E_{m+N}| = 0$ будем называть характеристическими показателями системы (3.2). Множество $\{\omega_1, \ldots, \omega_{m+N}\}$ есть подмножество множества характеристических показателей системы (2.1).

Везде далее, не нарушая общности рассуждений, считаем, что точка $t = 0$ не является точкой разрыва коэффициентов системы (3.2); тогда, учитывая соотношения

$$G(0) = \Psi(0), \quad G(T) = \Psi(T)e^{TK}, \quad \Psi(0) = \Psi(T)$$

заключаем, что

$$K = [\ln G(T) - \ln G(0)]/T \tag{4.2}$$

При анализе устойчивости относительно $y_1, \ldots, y_m$ невозмущенного движения $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (2.1) введенная трактовка понятия решения системы (3.2) при $t \in [0, \infty]$ оказывается излишне широкой. Действительно, смысл построения вспомогательной системы (3.2) в том, чтобы выяснить характер поведения определяемых переменными (3.1) решений $\mu_i(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ системы (2.1). Поэтому интерес представляют те решения $\xi = \xi_{(3.2)}(t)$ системы (3.2), которые при $t \in [0, \infty)\setminus M^*$ совпадают с решениями $\xi_{(2.1)}(t) = [y_1(t), \ldots, y_m(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_N(t)]$ системы (2.1). Поскольку на интервалах I_i система (3.2) получается из (2.1) в результате линейного невырожденного преобразования переменных, то представляющее интерес множество решений системы (3.2) существует. Обозначим это множество E. Отметим, что для всех $t_0 \in [0, \infty)\setminus M^*$ и $\xi(t_0)$ решение $\xi_{(3.2)}(t) \in E$ определяется единственным образом.

Далее важно знать не явный вид решений $\xi_{(3.2)}(t) \in E$, а лишь их характер поведения при $t \in [0, \infty) \setminus M^*$ (ограниченность, стремление к нулю при $t \to \infty$). С этой целью уточним понятие устойчивости по Ляпунову движения (решения) $\xi = 0$ системы (3.2). (Решение $\xi = 0$ системы (3.2) понимается в том плане, что при всех $t \in [0, \infty) \setminus M^*$ оно существует в силу выполнимости для системы (3.2) условий теоремы существования и единственности решения и при $t \in [0, \infty) \setminus M^*$ удовлетворяет системе (3.2)).

Определение 1. Движение $\xi = 0$ системы (3.2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любых чисел ε, $t_0 \geqslant 0$ $(t_0 \in [0, \infty) \setminus M^*)$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что из $\| \xi(t_0) \| < \delta$ следует $\| \xi_{(3.2)}(t;\, t_0,\, \xi(t_0)) \| < \varepsilon$, $\xi_{(3.2)}(t) \in E$ при всех $t \in [0, \infty) \setminus M^*$. Если, кроме того, $\lim \| \xi_{(3.2)}(t;\, t_0,\, \xi(t_0)) \| = 0$, $t \to \infty$, то движение $\xi = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Учитывая структуру фундаментальной матрицы $G(t)$ решений системы (2.1) и соотношение (4.2), заключаем, что справедлива

Лемма 4. Движение $\xi = 0$ системы (3.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все корни уравнения

$$| [\ln G(T) - \ln G(0)] / T - \omega E_{m+N} | = 0 \tag{4.3}$$

имеют отрицательные вещественные части.

5. Критерий устойчивости по части переменных линейных систем с периодическими, аналитическими коэффициентами. *Теорема* 1. Для асимптотической устойчивости относительно $y_1, \ldots, y_m$ невозмущенного движения $y = 0$, $z = 0$ системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы движение $\xi = 0$ системы (3.2) было асимптотически устойчиво по Ляпунову, т. е. все корни уравнения (4.3) имели отрицательные вещественные части.

Доказательство. Структура фундаментальной матрицы $X(t)$ решений системы (2.1) такова, что асимптотическая устойчивость по $y_1, \ldots, y_m$ движения $y = 0$, $z = 0$ системы (2.1) является экспоненциальной асимптотической устойчивостью и непосредственным интегрированием первых m уравнений системы (2.1) убеждаемся в том, что для этого необходимо выполнение на траекториях системы (2.1) неравенств

$$| \mu_i(t) | = \Big| \sum_{l=1}^{p} b_{il}(t) z_l(t) \Big| \leqslant \alpha_i \exp[-\beta_i (t - t_0)] \quad (i = 1, \ldots, m)$$

в которых α_i, β_i — положительные постоянные. Поэтому для асимптотической устойчивости по $y_1, \ldots, y_m$ движения $y = 0$, $z = 0$ системы (2.1) необходима еще асимптотическая устойчивость и по переменным μ_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Выбирая из переменных μ_i $(i = 1, \ldots, m)$ линейно независимые при $t \in [0, T] \setminus M$ (пусть это $\mu_1, \ldots, \mu_{m_1}$, $m_1 \leqslant m$) и обозначая $\xi = (y_1, \ldots, y_m, \mu_1, \ldots, \mu_{m_1})$, имеем две возможности: 1) образуется вспомогательная система (3.2); 2) образование вспомогательной системы (3.2) при данном наборе переменных в векторе ξ невозможно. Учитывая, что в случае 1) невозмущенное движение $y = 0$, $z = 0$ системы (2.1) будет асимптотически устойчиво по y_i, μ_j $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, m_1)$ тогда и только тогда, когда движение $\xi = 0$ системы (3.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову, заключаем, что в случае 1) необходимость асимптотической устойчивости по Ляпунову движения $\xi = 0$ системы (3.2) доказана. Поскольку приведение к системе вида (3.2) в конечном счете всегда возможно за счет введения в вектор ξ дополнительных переменных, то, как и в случае 1), необходимость асимптотической устойчивости по Ляпунову движения $\xi = 0$ системы (3.2) доказана. На основании леммы 4 движение $\xi = 0$ системы (3.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все корни уравнения (4.3) имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, необходимость условий теоремы доказана. Достаточность очевидна.

Следствие 1. Для устойчивости (неасимптотической) относительно $y_1, \ldots, y_m$ невозмущенного движения $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы движение $\xi = 0$ системы (3.2) было устойчиво по Ляпунову, т. е. все корни уравнения (4.3) имели отрицательные вещественные части, были нулевыми или чисто мнимыми, причем в последних двух случаях кратным корням соответствуют простые элементарные делители.

Замечания. 1°. Поскольку полученные критерии устойчивости носят характер неравенств, которым удовлетворяют корни уравнения (4.3), то для определения этих корней можно пользоваться численными и приближенными методами нахождения фундаментальных матриц $G(0)$, $G(T)$ решений вспомогательной системы (3.2). Таким образом, проблема изучения устойчивости по части переменных на бесконечном промежутке времени $[0, \infty)$ сводится к проблеме численного интегрирования на конечном промежутке $[0, T]$.

2°. Пусть при выполнении условия (2.2) матрицу G_{s-1} при всех $t \in [0, \infty)$ можно представить в виде

$$G_{s-1} = \{g_{ij}\}, \quad g_{ij} = g_j g_{ij}^* \quad (i = 1, \ldots, m + N, \ j = 1, \ldots, p)$$

причем g_j, g_{ij}^* — аналитические периодические периода T функции $t \in [0, \infty)$, такие, что $\operatorname{rank} G_{s-1}^* = \operatorname{rank} G_s^* = N$, $G_s^* = G_{s-1}^{\cdot *} + D^T G_{s-1}^*$, $G_{s-1}^* = \{g_{ij}^*\}$, $2 \leqslant s \leqslant p + 1$, $t \in [0, T]$. В этом случае введением новых переменных

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{p} g_{ij}^*(t) z_j \quad (i = 1, \ldots, N)$$

для системы (2.1) можно построить вспомогательную линейную систему типа (3.2) с аналитическими периодическими периода T коэффициентами.

Пример. Пусть система (2.1) имеет вид

$$(5.1) \qquad \begin{aligned} y_1^{\cdot} &= -y_1 + \sin 2t z_1 + 2\cos^2 t z_2 \\ z_1^{\cdot} &= -\cos t y_1 - z_1 + z_2, \quad z_2^{\cdot} = \sin t y_1 - z_1 - z_2 \end{aligned}$$

Вспомогательную линейную систему (3.2) в данном случае составят уравнения

$$(5.2) \qquad \begin{aligned} &y_1^{\cdot} = -y_1 + \mu_1, \quad \mu_1^{\cdot} = (-1 - \operatorname{tg} t)\,\mu_1 \\ &(\mu_1 = \sin 2t z_1 + 2\cos^2 t z_2) \end{aligned}$$

Интегрируя систему (5.2), находим ее решения

$$y_1(t) = \{[y_1(t_0) - \operatorname{tg} t_0 \mu_1(t_0)] + \mu_1(t_0) \sin t / \cos t_0\} e^{-(t-t_0)}$$

$$\mu_1(t) = [\mu_1(t_0) \cos t / \cos t_0]\, e^{-(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Поскольку характеристические показатели $\omega_1 = \omega_2 = -1$ системы (5.2) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (5.1) асимптотически устойчиво по отношению к y_1 на основании теоремы 1.

Введением новой переменной $\mu_2 = \sin t z_1 + \cos t z_2$ для (5.1) может быть также образована система

$$(5.3) \qquad y_1^{\cdot} = -y_1 + 2\cos t \mu_2, \quad \mu_2^{\cdot} = -\mu_2$$

с аналитическими коэффициентами. Характеристические показатели систем (5.2) и (5.3) совпадают.

6. Устойчивость относительно части переменных по линейному приближению. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$(6.1)\qquad y_i^{\cdot}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l+Y_i(t,\mathrm{y},\mathrm{z})$$

$$z_j^{\cdot}=\sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l+Z_j(t,\mathrm{y},\mathrm{z})\quad(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,p)$$

Здесь a_{ik}, b_{il}, d_{jl} — постоянные, Y_i, Z_j — нелинейные члены. Считаем, что правые части системы (6.1) в области

$$(6.2)\qquad t\geqslant 0,\ \|\mathrm{y}\|<H,\ \|\mathrm{z}\|<\infty$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности, а решения системы (6.1) z-продолжимы [2].

Представим функции Y_i $(i=1,\ldots,m)$ в виде

$$(6.3)\qquad Y_i(t,\mathrm{y},\mathrm{z})=Y_i{}^{\circ}(\mathrm{z})+\sum_{j=1}^{N} Y_j{}^{*}(\mathrm{y})\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}(\mathrm{z})+Y_i^{**}(t,\mathrm{y},\mathrm{z})$$

где функции $Y_i{}^{\circ}$, $\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}$ определяются равенствами

$$(6.4)\qquad Y_i{}^{\circ}(\mathrm{z})=\sum_{v=2}^{r} U_v^{(i)}(\mathrm{z}),\quad \overline{Y}^{\circ}{}_{ij}(\mathrm{z})=\sum_{v=1}^{s}\overline{U}_v^{(ij)}(\mathrm{z})$$

в которых $U_l{}^{(i)}$, $\overline{U}_v{}^{(ij)}$ — однородные формы переменных $z_1,\ldots,z_p$ соответственно порядка l $(l\leqslant r)$ и v $(v\leqslant s)$; r, s — конечные числа. Функции $Y_j{}^{*}$ (y) — аналитические в области $\|y\|<H$, причем $Y_j{}^{*}(0)=0$.

Смысл разложения (6.3), (6.4) в том, чтобы из Y_i $(i=1,\ldots,m)$ выделить члены $Y_i{}^{\circ}$, $\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,N)$, которые будут использоваться как дополнительные переменные для образования вспомо.ательной линейной системы, а оставшиеся выражения $Y_i{}^{**}$ $(i=1,\ldots,m)$ оценить (с точки зрения задачи устойчивости по $y_1,\ldots,y_m$) посредством y_i, $Y_i{}^{\circ}$, $\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,N)$. Поскольку разложение (6.3), (6.4) для функций Y_i $(i=1,\ldots,m)$ можно сделать неоднозначно, включая в $Y_i{}^{\circ}$, $\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}$ ту или иную совокупность членов указанного вида, то имеющийся произвол должен использоваться для рационализации поиска наиболее приемлемого решения.

В качестве системы первого приближения для (6.1) возьмем уравнения

$$(6.5)\qquad y_i^{\cdot}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l+Y_i{}^{\circ}(\mathrm{z})+\sum_{j=1}^{N} Y_j{}^{*}(\mathrm{y})\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}(\mathrm{z})$$

$$z_j^{\cdot}=\sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l\quad(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,p)$$

Покажем, что при изучении устойчивости относительно $y_1,\ldots,y_m$ невозмущенного движения $\mathrm{y}=0$, $\mathrm{z}=0$ системы (6.1) нелинейную систему (6.5) можно посредством нелинейных преобразований заменить специально построенной линейной системой. Для построения такой системы введем новые переменные

$$(6.6)\qquad \mu_i^{(1)}=\sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l+Y_i{}^{\circ}(\mathrm{z})=\sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l+\sum_{v=2}^{r} U_v^{(i)}(\mathrm{z})$$

$$\mu_{ij}^{(2)}=\overline{Y}_{ij}{}^{\circ}(\mathrm{z})=\sum_{v=1}^{s}\overline{U}_v^{(ij)}(\mathrm{z})\quad(i,j=1,\ldots,m)$$

При таком введении новых переменных возможны два случая.

Первый случай. Система (6.5) принимает вид (считаем, не нарушая общности рассуждений, $N = m$)

$$
\begin{aligned}
(6.7)\qquad & y_i^{\cdot} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \mu_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} Y_j^{*}(\mathbf{y})\,\mu_{ij}^{2} \\
& \mu_j^{\cdot(1)} = \sum_{v=1}^{r} U_v^{(j)*}(z) = \sum_{l=1}^{m} L_{jl}^{(1)}\mu_l^{(1)} + \sum_{l,\,\varepsilon=1}^{m} \bar{L}_{jl\varepsilon}^{(1)}\mu_{l\varepsilon}^{(2)} \\
& \mu_{\gamma\theta}^{\cdot(2)} = \sum_{v=1}^{s} \bar{U}_v^{(\gamma\theta)*}(z) = \sum_{l=1}^{m} L_{\gamma\theta l}^{(2)}\mu_l^{(1)} + \sum_{l,\,\varepsilon=1}^{m} \bar{L}_{\gamma\theta l\varepsilon}^{(2)}\mu_{l\varepsilon}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
(6.8)\qquad z_\varepsilon^{\cdot} = \sum_{l=1}^{p} d_{\varepsilon l}z_l \quad (i, j, \gamma, \theta = 1, \ldots, m;\quad \varepsilon = 1, \ldots, p)
$$

где $U_v^{(j)*}$, $U_v^{(\gamma\theta)*}$ — однородные формы переменных $z_1, \ldots, z_p$ порядка v; $L_{jl}^{(1)}$, $\bar{L}_{jl\varepsilon}^{(1)}$, $L_{\gamma\theta l}^{(2)}$, $\bar{L}_{\gamma\theta l\varepsilon}^{(2)}$ — постоянные Поведение переменных, характеризующих состояние системы (6.7), полностью определяет поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$ системы (6.5).

Второй случай. Допустим, нарушаются сразу все равенства во второй и третьей группах уравнений системы (6.7). В этом случае еще раз введем новые переменные

$$
\bar{\mu}_j^{(1)} = \sum_{v=2}^{r} U_v^{(j)*}(\mathbf{z}),\qquad \bar{\mu}_{\gamma\theta}^{(2)} = \sum_{v=1}^{s} U_v^{(\gamma\theta)*}(\mathbf{z})\quad (j, \gamma, \theta = 1, \ldots, m)
$$

Поставив в соответствие новым переменным характеризующие их векторы (см. [8]), можно показать, что, продолжая процесс введения новых переменных, для системы (6.5) всегда можно построить конечномерную систему уравнений вида (6.7).

При переходе от системы (6.5) к (6.7) исходная система (6.1) преобразуется к виду (6.7), (6.8), где в правых частях уравнений добавлены соответственно слагаемые

$$
\begin{aligned}
(6.9)\qquad & Y_i^{**}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}),\ Z_j^{(1)}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{l=1}^{p} (\partial\mu_j^{(1)}/\partial z_l)\, Z_l \\
& Z_{\gamma\theta}^{(2)}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{l=1}^{p} (\partial\mu_{\gamma\theta}^{(2)}/\partial z_l)\, Z_l,\ Z_\varepsilon(t, y, z)\quad (i, j, \gamma, \theta = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

В общем случае, когда построение системы вида (6.7) возможно на некотором конечном шаге введения новых переменных, система (6.1) преобразуется к системе вида (6.7), (6.8) с добавлением указанных выше слагаемых (6.9); линейная часть этой системы (за исключением последней группы уравнений) образует замкнутую линейную стационарную систему относительно y_i $(i = 1, \ldots, m)$ и дополнительных переменных — вспомогательную линейную стационарную систему.

Рассмотренная замена нелинейной системы (6.5) системой вида (6.7) позволяет при изучении асимптотической устойчивости относительно $y_1, \ldots, y_m$ невозмущенного движения $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (6.1) вместо уравнений линейного приближения

$$
\begin{aligned}
& y_i^{\cdot} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l,\qquad z_j^{\cdot} = \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l \\
& (i = 1, \ldots, m;\quad j = 1, \ldots, p)
\end{aligned}
$$

рассматривать специально построенную систему линейного приближения — линейную часть системы вида (6.7), эквивалентную (при изучении устойчивости по $y_1, \ldots, y_m$) нелинейному приближению (6.5) исходной нелинейной системы (6.1). При этом построенные уравнения линейного приближения для исходной системы (6.1) содержат часть ее нелинейных членов и дают возможность упростить получение требуемых оценок для оставшейся группы нелинейных членов. Указанный подход позволяет расширить класс нелинейных систем, для которых вопрос об устойчивости относительно части переменных может быть решен линейным приближением [9, 10].

Обозначим ξ_i $(i = 1, \ldots, m^2 + 2m)$ компоненты вектора ξ, состоящего из переменных y_i, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_{\gamma\theta}^{(2)}$ $(i, j, \gamma, \theta = 1, \ldots, m)$, определяющих состояние системы (6.7), а Y_{*i} $(i = 1, \ldots, m^2 + 2m)$ — компоненты вектор-функции Y_*, состоящей из функций Y_i^{**}, $Z_j^{(1)}$, $Z_{\gamma\theta}^{(2)}$ $(i, j, \gamma, \theta = 1, \ldots, m)$.

Пусть в области $t \geqslant 0$, $\| \xi \| < H$, $\| \mathbf{z} \| < \infty$ выполняется условие

(6.10) $$| Y_* (t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) | \leqslant \alpha \| \xi \|$$

в котором α, H — достаточно малые положительные постоянные.

Теорема 2. Пусть все корни характеристического уравнения линейной части системы (6.7) имеют отрицательные вещественные части. Тогда невозмущенное движение $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (6.1) асимптотически устойчиво относительно $y_1, \ldots, y_m$, если ее нелинейные члены удовлетворяют условию (6.10).

Доказательство. При условиях теоремы и введенных обозначениях для линейной части системы (6.7) можно указать функцию $V = V(\xi)$, удовлетворяющую условиям теоремы Ляпунова

(6.11) $$c_1 \| \xi \|^2 \leqslant V \leqslant c_2 \| \xi \|^2, \quad \dot V_{(6.8)} \leqslant -c_3 \| \xi \|^2$$

где $\dot V_{(6.7)}$ — производная функция V в силу линейной части системы (6.7), c_i $(i = 1, 2, 3)$ — положительные постоянные. Вычисляя теперь производную этой функции V на траекториях системы (6.1)

$$\dot V_{(6.1)} = \dot V_{(6.7)} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \sum_{\gamma=1}^{m} Y_\gamma{}^*(\mathbf{y})\, \mu_{s\gamma} + $$
$$+ \sum_{j=1}^{m^2+2m} \frac{\partial V}{\partial \xi_j} Y_{*j}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (N = m)$$

и учитывая, что $Y_\gamma{}^*(0) = 0$ $(\gamma = 1, \ldots, m)$, на основании (6.10), (6.11) в области $t \geqslant 0$, $\| \xi \| < H$, $\| \mathbf{z} \| < \infty$ получаем оценку $\dot V_{(6.1)} \leqslant$ $\leqslant -c_3 \| \xi \|^2 + \beta \| \xi \|^2$, в которой β — достаточно малая постоянная. Поэтому найдется число $c > 0$, такое, что $\dot V_{(6.1)} \leqslant c \| \xi \|^2$. Значит, функция V удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости по части переменных [2] и невозмущенное движение $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (6.1) асимптотически ξ-устойчиво. Поскольку $\xi_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, то теорема доказана.

Пример. Пусть система (6.1) имеет вид

(6.12)
$$\dot y_1 = -y_1 + Y_1^* (y_1)\, z_1 z_2 + z_2^2 z_3 + Y_1^{**} (t, y_1, z_1, z_2, z_3)$$
$$\dot z_j = \Sigma_j + Z_j (t, y_1, z_1, z_2, z_3) \quad (j = 1, 2, 3)$$
$$(\Sigma_1 = z_1, \quad \Sigma_2 = -2z_2, \quad \Sigma_3 = z_2 + 2z_3)$$

причем Y_1^{**}, Z_j — аналитические в области (6.2) функции с непрерывными и ограниченными коэффициентами.

Среди корней характеристического уравнения линейной части системы (6.12) есть корни с положительными вещественными частями и, следовательно, движение $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ системы (6.12) неустойчиво по Ляпунову. Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости этого движения по y_1. Выбирая в качестве системы первого приближения для (6.12) уравнения вида (6.5) и вводя новые переменные $\mu_1 = z_1 z_2$, $\mu_2 = z_2^2 z_3$, построим систему

$$(6.13)\qquad \begin{aligned} & y_1^{\cdot} = -y_1 + Y_1^* (y_1)\mu_1 + \mu_2 + Y_1^{**} \quad (t, y_1, z_1, z_2, z_3) \\ & \mu_i^{\cdot} = \Sigma_i^* + Z_{3+i} \quad (t, y_1, z_1, z_2, z_3) \\ & z_j^{\cdot} = \Sigma_j + Z_j \quad (t, y_1, z_1, z_2, z_3) \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ & (\Sigma_1^* = -\mu_1, \ \Sigma_2^* = \mu_3, \ \Sigma_3^* = -6\mu_2 - 7\mu_3 \\ & Z_4 = z_1 Z_2 + z_2 Z_1, \ Z_5 = 2z_2 z_3 Z_2 + z_2^2 Z_3, \ Z_6 = -Z_3 + 3z_2^2 Z_2) \end{aligned}$$

Допустим, в области $t \geqslant 0$, $|y_1| < H$, $\|\mu\| < H$, $\|z\| < \infty$ выполняются условия ($Y_* = (Y_1^{**}, Z_4, Z_5, Z_6)$, суммирование по j от 1 до 3)

$$(6.14)\qquad |Y_*(t, y_1, z_1, z_2, z_3)| \leqslant \alpha_0 |y_1| + \Sigma\alpha_j |\mu_j|$$

где α_s ($s = 0, \ldots, 3$) — достаточно малые положительные постоянные. Поскольку все корни характеристического уравнения линейной части первых четырех уравнений системы (6.13) имеют отрицательные вещественные части, то при выполнении (6.14) движение $y_1 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$ исходной системы (6.12) асимптотически устойчиво по y_1 на основании теоремы 2.

7. Дополнительные возможности исследования устойчивости относительно части переменных по линейному приближению. Рассмотрим более общий случай выбора новых переменных при построении вспомогательной системы линейного приближения для системы (6.1). Представим Y_i ($i = 1, \ldots, m$) в виде (везде в этом пункте суммирование по v от 2 до r, по k от 1 до m, по l от 1 до p)

$$(7.1)\qquad Y_i(t, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = Y_i^{\circ}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) + Y_i^{**}(t, \mathrm{y}, \mathrm{z}), \quad Y_i^{\circ} = \Sigma U_v^{(i)}(\mathrm{y}, \mathrm{z})$$

где $U_\gamma^{(i)}$ — однородные формы конечного порядка γ переменных y, z и введем новые переменные

$$(7.2)\qquad \mu_i = \Sigma b_{il} z_l + \Sigma U_v^{(i)}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

При введении новых переменных возможны два случая. Первый случай. Система (6.1) приводится к виду

$$(7.3)\qquad \begin{aligned} & y_i^{\cdot} = \Sigma a_{ik} y_k + \mu_i + Y_i^{**}(t, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \\ & \mu_j^{\cdot} = \Sigma b_{jl}^* z_l + \Sigma U_v^{(j)*}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) + Z_j^*(t, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \Sigma e_{jk}\mu_k + Z_j^*(t, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \\ & z_s^{\cdot} = \Sigma d_{se} z_l + Z_s(t, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \\ & Z_j^* = \Sigma\, (\partial Y_j^{\circ}/\partial y_k) Y_k + \Sigma\, (\partial Y_j^{\circ}/\partial z_l) Z_l \\ & (i, j = 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, p) \end{aligned}$$

где b_{jl}^*, e_{jk} — постоянные, $U_\gamma^{(j)*}$ — однородные формы переменных y, z порядка γ. В этом случае из (7.3) можно выделить линейную стационарную систему

$$(7.4)\qquad \begin{aligned} & y_i^{\cdot} = \Sigma a_{ik} y_k + \mu_i, \quad \mu_j^{\cdot} = \Sigma e_{jk}\mu_k \\ & (i, j = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

являющуюся линейным приближением для первых двух групп уравнений системы (7.3).

Во втором случае, когда после введения переменных (7.2) построение системы вида (7.3) невозможно, можно показать, что, продолжая указанный процесс введения новых переменных, систему (6.1) всегда можно преобразовать к системе структуры (7.3) и выделить из нее линейную стационарную систему вида (7.4). Сделанный вывод справедлив и в случае, когда во второй группе уравнений линейной части системы (6.1) допускается наличие членов, линейных (с постоянными коэффициентами) по $y_1, \ldots$

$\ldots, y_m$; в этом случае вместо (7.4) из уравнений структуры (7.3) можно выделить линейную систему

(7.5) $$y_i^{\cdot} = \Sigma a_{ik} y_k + \mu_i, \quad \mu_j^{\cdot} = \Sigma a_{jk}^* y_k + \Sigma e_{jk} \mu_k \quad (i, j = 1, \ldots, m)$$

Пусть все корни характеристического уравнения системы (7.4) (системы (7.5)) имеют отрицательные вещественные части. Тогда невозмущенное движение системы (6.1) будет асимптотически устойчиво относительно $y_1, \ldots, y_m$, если ее нелинейные члены $Y_* = (Y_1^{**}, \ldots, Y_m^{**}, Z_1^*, \ldots$ $\ldots, Z_m^*)$ удовлетворяют в области $t \geqslant 0$, $\|\xi\| < H$, $\|z\| < \infty$, $\xi = (y_1, \ldots$ $\ldots, y_m, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ условиям (6.10). Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 2.

Если оценки вида (6.10) не выполняются, то для расширения возможностей их выполнения можно использовать следующие приемы.

1°. Каждое из выражений y^0_i представляется в виде совокупности нескольких новых переменных μ_{ij} (а не одной переменной μ_i) и переменных $y_1, \ldots, y_m$; в этом случае также всегда образуется система структуры (7.3) с линейной частью вида (7.4) или (7.5) и увеличивается возможность выполнения оценок типа (6.10).

2°. Процесс введения новых переменных можно продолжать выделяя из Y_i^{**}, Z_j^* $(i, j = 1, \ldots, m)$ ту или иную совокупность нелинейных членов и принимая их за новые переменные (до получения удовлетворительного решения). При этом строится система структуры (7.3) и увеличивается возможность выполнения для нее оценок типа (6.10).

Например, введением новой переменной $\mu_1 = y_1^2 z_1$ уравнения

(7.6) $$y_1^{\cdot} = -3y_1 + y_1^2 z_1, \quad z_1^{\cdot} = 2y_1 + z_1$$

не приводятся к системе, замкнутой относительно y_1, μ_1, поскольку в уравнении $\mu_1^{\cdot} = -5\mu_1 + 2y_1^3 + 2y_1^3 z_1^2$ появляется член $2y_1^3 z_1^2$, который не выражается (необходимым образом) через y_1, μ_1. Однако, используя приемы 1°, 2°, можно образовать следующие вспомогательные системы:

1) $y_1^{\cdot} = -3y_1 + y_1\mu_1, \quad \mu_1^{\cdot} = -2\mu_1 + 2y_1^2 + \mu_1^2 \quad (\mu_1 = y_1 z_1)$;

2) $y_1^{\cdot} = -3y_1 + \mu_1, \quad \mu_1^{\cdot} = -5\mu_1 + 2y_1^3 + 2\mu_1\mu_2, \quad \mu_2^{\cdot} = -2\mu_2 + 2y_1^2 + \mu_2^2$

$(\mu_1 = y_1^2 z_1, \quad \mu_2 = y_1 z_1)$

В обоих случаях нулевое решение вспомогательных систем асимптотически устойчиво по Ляпунову и, следовательно, движение $y_1 = z_1 = 0$ системы (7.6), будучи неустойчивым по Ляпунову, является асимптотически устойчивым по y_1.

Замечание. Рассмотренный подход к исследованию y-устойчивости по линейному приближению является развитием подхода, предложенного в [8]; однако в отличие от [8] не предполагается ограниченность решений исходной системы дифференциальных уравнений и рассматривается более широкий класс нелинейностей.

Пример. Пусть уравнения возмущенного движения, нелинейные возмущения в которых считаем аналитическими в области (6.2) функциями с непрерывными и ограниченными коэффициентами, имеют вид

(7.7) $$\begin{aligned} y_1^{\cdot} &= ay_1 + by_1^k (y_1 z_1)^r + Y_1^{**}(t, y_1, z_1) \\ z_1^{\cdot} &= cy_1 + dz_1 + Z_1(t, y_1, z_1) \end{aligned}$$

где a, b, c, d — постоянные, k, r — целые числа, причем $k \geqslant 2$, $r \geqslant 1$, $k > r$. При $d > 0$ движение $y_1 = z_1 = 0$ системы (7.7) неустойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим вопрос об асимптотической y_1-устойчивости этого движения; для этого, вводя новую переменную $\mu_1 = y_1 z_1$, образуем систему

$$\begin{aligned} y_1^{\cdot} &= ay_1 + by_1^k \mu_1^r + Y_1^{**}(t, y_1, z_1) \\ \mu_1^{\cdot} &= (a + d)\mu_1 + Z_1^*(t, y_1, z_1) \\ z_1^{\cdot} &= cy_1 + dz_1 + Z_1(t, y_1, z_1) \end{aligned}$$

$$Z_1^* = cy_1^2 + by_1^{k-1}\mu_1^{r+1} + Z_1^{**}. \quad Z_1^{**} = y_1 Z_1 + z_1 Y_1^{**}$$

Если в области $t \geqslant 0$, $|y_1| < H$, $|\mu_1| < H$, $|z_1| < \infty$ справедлива оценка ($Y_* = (Y_1^{**}, Z_1^{**})$)

$$\| Y_* (t, y_1, z_1)\| \leqslant \alpha |y_1| + \beta |y_1 z_1|$$

где α, β — достаточно малые положительные постоянные, то при выполнении условий $a < 0$, $a + d < 0$ при любых c, b движение $y_1 = z_1 = 0$ системы (7.7) асимптотически устойчиво по y_1.

8. Устойчивость в критических по Ляпунову случаях. Пусть уравнения возмущенного движения (в векторной форме) имеют вид

$$\text{(8.1)} \qquad \mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z} + Y(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^{\cdot} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} + Z(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$(\mathbf{x}^{\cdot} = A^*\mathbf{x} + X(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}))$$

где A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размеров, а нелинейные возмущения Y, Z удовлетворяют в области $t \geqslant 0$, $\|x < H$ условиям [11, 12]

$$\text{(8.2)} \qquad Y(t, 0, 0) \equiv Y(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0, \quad Z(t, 0, 0) \equiv Z(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0$$

$$\text{(8.3)} \qquad (\| Y(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| + \| Z(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\|)/\| \mathbf{y} \| \rightrightarrows 0 \quad \text{при } \| \mathbf{y} \| + \| \mathbf{z} \| \to 0$$

Рассмотрим также более общую, чем (8.1), систему

$$\text{(8.4)} \qquad \mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z} + Y^{\circ}(\mathbf{z}) + Y(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$\mathbf{z}^{\cdot} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} + Z(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

в которой компоненты Y_i° ($i = 1, \ldots, m$) вектор-функции $Y^{\circ}(\mathbf{z})$ удовлетворяют условиям из п. 6.

Теорема 3. Пусть движение $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы

$$\text{(8.5)} \qquad \mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}^{\cdot} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z}$$

экспоненциально асимптотически y-устойчиво и устойчиво по Ляпунову. Тогда этим же свойством обладает и движение: 1) $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (8.1); 2) $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (8.4), если, кроме того, B — нулевая матрица, а нулевое решение системы

$$\text{(8.6)} \qquad \mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + Y^{\circ}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^{\cdot} = D\mathbf{z}$$

экспоненциально асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Сформулированное утверждение дополняет известные теоремы [11, 12] в том плане, что в [11] матрицы B, C, а в [12] матрица B — нулевые и, кроме того, в [11, 12] $Y^{\circ}(\mathbf{z}) = 0$. Покажем, что, если систему (8.1) или (8.4) преобразовать при помощи разработанных процедур построения вспомогательных систем, то доказательство из [11, 12] сохранится и для рассматриваемого случая.

1) Преобразуя линейную часть системы (8.1) при помощи линейной замены переменных, указанной в [4], получим уравнения (8.7)

$$\text{(8.7)} \qquad \xi^{\cdot} = Q_4 A^* Q_5 \xi + Y^*(t, \xi, \eta)$$
$$\eta^{\cdot} = C_1 \xi + C_2 \eta + Z^*(t, \xi, \eta)$$

в которых Q_4, Q_5, C_1, C_2 — постоянные матрицы соответствующих размеров (Q_4, Q_5 определены в [4]), причем движение $\xi = 0$, $\eta = 0$ линейной части системы (8.7) экспоненциально асимптотически ξ-устойчиво и устойчиво по Ляпунову. Компоненты, составляющие вектор-функции Y^*, Z^*, либо являются компонентами, составляющими вектор-функции Y, Z, либо их линейными комбинациями; поэтому можно показать, что для системы (8.7) выполнены условия [11, 12] и решение $\xi = 0$, $\eta = 0$ системы (8.7) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально асимптотически ξ-устойчиво.

Значит, невозмущенное движение системы (8.1) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально асимптотически y-устойчиво.

2) Используя указанную в п. 6 процедуру, для системы (8.6) можно образовать (считаем, не нарушая общности, что образование вспомогательной системы произошло на первом шаге введения новых переменных) линейную стационарную систему $\mathbf{y}^\cdot = A\mathbf{y} + \mu$, $\mu^\cdot = D^*\mu$, нулевое решение $y = 0$, $\mu = 0$ которой экспоненциально асимптотически устойчиво (по всем переменным). При этом исходная система (8.4) преобразуется следующим образом:

(8.8)
$$\mathbf{y}^\cdot = A\mathbf{y} + \mu + (Y(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mu^\cdot = D^*\mu + Y^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$\mathbf{z}^\cdot = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} + Z(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$Y^* = (\partial Y^\circ/\partial \mathbf{z})(C\mathbf{y} + Z), \quad \xi = (\mathbf{y}, \mu)$$

причем решение $\xi = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы линейного приближения для (8.8) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально ξ-устойчиво. Поскольку

$$\| Y^* \| \leqslant \| C \| \| \partial Y^\circ/\partial z \| \| y \| + \| \partial Y^\circ/\partial z \| \| Z \|$$

то из (8.3) следует соотношение (при $\| y \| + \| z \| \to 0$)

$$(\| Y(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| + \| Y^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| + \| Z(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\|)/\| \xi \| \rightrightarrows 0$$

и, кроме того, на основании (8.2) $Y^*(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0$. Поэтому для системы (8.8) выполнены условия [11, 12] и движение $\xi = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (8.8) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально асимптотически ξ-устойчиво. Значит, невозмущенное движение $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ системы (8.4) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво.

Замечание. В теореме 3 важен не только факт экспоненциальной $\mathbf{y}$-устойчивости движения $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{z} = 0$ соответственно систем (8.5) и (8.6), но и вид переменных, образующих системы (8.7) и (8.8). В этом случае, например, условия (8.2) в первой части теоремы можно заменить более слабыми условиями $Y^*(t, 0, \eta) \equiv 0$, $Z^*(t, 0, \eta) \equiv 0$.

9. Устойчивость относительно части переменных при больших начальных возмущениях. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

(9.1)
$$\mathbf{x}^\cdot = X(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

правые части которой удовлетворяют общим требованиям из [2].

В [13, 14] показано (см. также [2]), что если для системы (9.1) найдется функция V, такая, что

(9.2)
$$a(\| \mathbf{y} \|) \leqslant V(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leqslant b(\| \mathbf{y} \|), \quad V(t, 0, 0) \equiv 0, \quad V^\cdot \leqslant 0$$

($a(r)$, $b(r)$ — непрерывные, монотонно возрастающие функции $r \in [0, H]$, $a(0) = b(0) = 0$), то движение $\mathbf{x} = 0$ обладает свойством: для любых ε, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\| \mathbf{y}_0 \| < \delta$, $\| \mathbf{z}_0 \| < \delta$ следует $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

При решении прикладных задач требование $\| \mathbf{z}_0 \| < \infty$ можно заменить условием $\| \mathbf{z}_0 \| < \Delta$, где $\Delta > 0$ — заданное число.

Определение 2. Пусть $\Delta > 0$ — заданное число. Движение $\mathbf{x}=0$ системы (9.1) называется $\mathbf{y}$-устойчивым при больших $\mathbf{z}_0$, если для любых ε, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\| \mathbf{y}_0 \| < \delta$, $\| \mathbf{z}_0 \| < \Delta$ следует $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Покажем, что при исследовании $\mathbf{y}$-устойчивости при больших z_0 требования к функции Ляпунова ослабляются в сравнении с [13, 14].

Теорема 4. Если для системы (9.1) найдется функция V, такая, что

(9.3) $$a(\|\mathbf{y}\|) \leqslant V(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leqslant b(\|\mathbf{x}\|)$$
$$V(t, 0, 0) \equiv V(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0, \quad V^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant 0$$

то движение $\mathbf{x} = 0$ y-устойчиво при больших $\mathbf{z}_0$.

Доказательство. В области $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| < L = \text{const} < \infty$ функция V в силу $V \leqslant b(\|\mathbf{x}\|)$ ограничена. Поэтому для всяких $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ в силу $V(t, 0, 0) \equiv V(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0$ можно найти $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \Delta$ при всех $t_0 \geqslant 0$ следует $V(t_0, \mathbf{x}_0) < a(\varepsilon)$. Для решения $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| < \Delta$ в силу $V^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant 0$ будем иметь (см. [2])

$$a(\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0) < a(\varepsilon), \quad t \geqslant t_0$$

откуда, учитывая свойства функции $a(r)$, выводим $\|\mathbf{y}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Замечания. 1°. Условия (9.3) слабее условий (9.2); в то же время y-устойчивость при больших $\mathbf{z}_0$ с практической точки зрения эквивалентна y-устойчивости в целом по $\mathbf{z}_0$ из [13, 14].

2°. Результаты [13, 14] и теорема 4 являются расширением теоремы В. В. Румянцева [1] об y-устойчивости.

Пример. Рассмотрим анализировавшееся в [15, 16] движение точки единичной массы в постоянном поле тяготения по поверхности $x_1 = 0{,}5x_2^2(1 + x_3^2)$ в пространстве $Ox_1x_2x_3$ с осью Ox_1, направленной вертикально вверх. В данном случае кинетическая энергия T и потенциальная Π имеют вид

$$T = {}^1/_2\,\{x_3^{\boldsymbol{\cdot}2} + x_2^{\boldsymbol{\cdot}2} + x_2^2\,[x_2^{\boldsymbol{\cdot}}(1 + x_3^2) + x_3^{\boldsymbol{\cdot}}x_3x_2]^2\}$$
$$\Pi = {}^1/_2\,gx_2^2(1 + x_3^2), \quad g = \text{const} > 0$$

Если $\mathbf{y} = (x_2, x_2^{\boldsymbol{\cdot}}, x_3^{\boldsymbol{\cdot}})$, $z = x_3$, то функция $V = T + \Pi$ удовлетворяет условиям (9.3) и, следовательно, положение равновесия $x_i = x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ точки y-устойчиво при больших z_0 на основании теоремы 4. Вместе с тем условие $V \leqslant b(\|\mathbf{y}\|)$ для функции V не выполняется и результаты [13, 14] неприменимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1957. № 4. С. 9—16.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364—384.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
4. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 291—301.
5. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1970. 331 с.
6. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука. 1972. 720 с.
7. *Рубановский В. Н.* Устойчивость нулевого решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Итоги науки. Общая механика. 1969. М.: ВИНИТИ. 1971. С. 85—157.
8. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 441—450.
9. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659—665.
10. *Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 422—426.
11. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 530 с.
12. *Озиранер А. С.* Об устойчивости движения в критических случаях // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 413—421.
13. *Rouche N., Peiffer K.* Le theoreme de Lagrange—Dirichler et la deuxieme methode de Liapounoff // Ann. Soc. scient. de Bruxelle. Ser. 1. 1967. V. 81. No. 1. P. 19—33.
14. *Fergola P., Moauro V.* On partial stability // Ricerche Mat. 1970. V. 19. P. 185—207.
15. *Peiffer K., Rouche N.* Liapounov's second method applied to partial stability // J. Mecanique. 1969. V. 8. No. 2. P. 323—334.
16. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. I. (Autonomous system)// Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 219—231.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
20.XII.1985