Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 531.36 + 521.13

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Маркеев А. П.

Исследуется задача о существовании движений, асимптотических к периодическим траекториям гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предполагается, что функция Гамильтона не зависит от времени и аналитична в окрестности периодической траектории. Отмечается, что при некоторых ограничениях условия существования асимптотических траекторий эквивалентны условиям орбитальной неустойчивости предельного периодического движения. В качестве приложения рассматриваются асимптотические траектории в задаче о движении динамически симметричного твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите и в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

1. Изоэнергетическая редукция. Пусть обобщенно-консервативная система с двумя степенями свободы имеет T-периодическое движение, отличное от положения равновесия и в окрестности замкнутой траектории фазового пространства, отвечающей этому периодическому движению (ПД), функция Гамильтона H аналитична.

Два характеристических показателя линеаризованной в окрестности периодического движения системы уравнений возмущенного движения всегда (в случае автономной гамильтоновой системы) равны нулю. Если два других характеристических показателя будут иметь отличную от нуля вещественную часть, то ПД орбитально неустойчиво. Если же они будут чисто мнимыми (равными $\pm i\alpha$), то в зависимости от вида нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения возможна как орбитальная неустойчивость, так и устойчивость. Именно, если $k\alpha \neq n\omega$ ($\omega = 2\pi/T$; $k = 1, 2, 3, 4$; n — целое число), то, как правило, имеет место орбитальная устойчивость, случаи $k = 1, 2$ отвечают границе областей орбитальной устойчивости в первом приближении, а при $k = 3, 4$ внутри этих областей возможна орбитальная неустойчивость. Подробное описание условий устойчивости и неустойчивости можно найти в [1, 2], здесь только отметим, что они совпадают с соответствующими условиями устойчивости и неустойчивости на изоэнергетическом уровне $H = h = \text{const}$, на котором лежит траектория изучаемого ПД.

Для решения задачи о существовании траекторий, асимптотических к траектории ПД, заметим, что асимптотические траектории должны отвечать тому же значению постоянной h, что и траектория ПД. Уравнения движения на этом фиксированном уровне энергии (уравнения Уиттекера) имеют форму уравнений Гамильтона [3]. Получим эти уравнения.

Всегда можно [4] (хотя, это, вообще говоря, весьма непросто) выбрать такие канонически сопряженные переменные q_i, p_i $(i = 1, 2)$, что ПД будет отвечать их значениям:

$$q_1 = \omega t + q_{10}, \quad p_1 = q_2 = p_2 = 0 \tag{1.1}$$

где t — время, q_{10} — начальное значение координаты q_1. При этом функция Гамильтона будет 2π-периодична по q_1.

Без ограничения общности можно считать, что траектория ПД (1.1) лежит на нулевом уровне энергии $H = 0$. Функцию Гамильтона можно разложить в сходящийся ряд по степеням величин p_1, q_2, p_2, коэффициенты которого 2π-периодичны по q_1. Получим

(1.2) $$H = \omega p_1 + H_2 + H_3 + H_4 + \ldots$$

где H_k — форма степени k относительно p_1, q_2, p_2. Нужные в дальнейшем первые три из них запишем в виде

(1.3) $$\begin{aligned} H_2 &= h_2 + (a_1 q_2 + a_2 p_2)\, p_1 + a_3 p_1^2 \\ H_3 &= h_3 + (b_1 q_2^2 + b_2 q_2 p_2 + b_3 p_2^2)\, p_1 + (b_4 q_2 + b_5 p_2)\, p_1^2 + \\ &+ b_6 p_1^3 \\ H_4 &= h_4 + f_3 p_1 + f_2 p_1^2 + f_1 p_1^3 + b_7 p_1^4 \end{aligned}$$

Здесь h_k и f_l — формы соответственно степеней k и l относительно q_2, p_2 с 2π-периодическими по q_1 коэффициентами, коэффициенты a_i и b_i также 2π-периодичны по q_1.

Из уравнения $H = 0$ имеем

(1.4) $$p_1 = -K(q_2,\ p_2;\ q_1)$$

Функция K разлагается в сходящийся ряд

(1.5) $$K = K_2 + K_3 + K_4 + \ldots$$

где K_m — форма степени m относительно q_2, p_2, с 2π-периодическими по q_1 коэффициентами. Для первых трех форм имеем

(1.6) $$\begin{aligned} K_2 &= \omega^{-1} h_2, \quad K_3 = \omega^{-1} h_3 - \omega^{-2}(a_1 q_2 + a_2 p_2) h_2 \\ K_4 &= \omega^{-1} h_4 - \omega^{-2}(a_1 q_2 + a_2 p_2)\, h_3 - \omega^{-2}(b_1 q_2^2 + b_2 q_2 p_2 + \\ &+ b_3 p_2^2)\, h_2 + \omega^{-3}(a_1 q_2 + a_2 p_2)^2\, h_2 + \omega^{-3} a_3 h_2^2 \end{aligned}$$

Для практических приложений полезно заметить, что члены выше первой степени относительно p_1 в H_3 и члены всех степеней p_1 в H_4 не влияют на члены до четвертой степени включительно в разложении (1.5).

Уравнения Уиттекера имеют вид

(1.7) $$dq_2/dq_1 = \partial K/\partial p_2, \quad dp_2/dq_1 = -\partial K/\partial q_2$$

Таким образом, в автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы задача о траекториях, асимптотических к замкнутой траектории ПД, сводится к задаче о движениях, асимптотических к положению равновесия $q_2 = p_2 = 0$ гамильтоновой системы с одной степенью свободы с 2π-периодической зависимостью функции Гамильтона $K(q_2, p_2;\ q_1)$ от независимой переменной q_1.

Если из (1.7) найдено какое-либо решение $q_2 = q_2(q_1)$, $p_2 = p_2(q_1)$, то величина p_1 как функция q_1 определится подстановкой этого решения в правую часть равенства (1.4). Зависимость q_1 от t может быть затем найдена при помощи одной квадратуры из уравнения

(1.8) $$dq_1/dt = \omega + \partial(H - \omega p_1)/\partial p_1$$

правая часть которого записана как функция от q_1.

При достаточно малых значениях величин $|q_2|$, $|p_2|$ функция $\partial(H - \omega p_1)/\partial p_1$ может быть сколь угодно малой. Поэтому в задаче о траекториях, асимптотических к траектории ПД, координата q_1 может играть ту же роль, что и время t. Для описания асимптотических решений системы (1.7) используем известные результаты [5, 6].

2. Асимптотические движения в случае вещественных характеристических показателей. Рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной системы (1.7) с гамильтонианом K_2

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \tag{2.1}$$

Величина A в этом уравнении постоянна, она известным образом [7] вычисляется по значениям элементов матрицы фундаментальных решений линеаризованной системы в точке $q_1 = 2\pi$.

Если $|A| > 1$, то характеристические показатели $\pm\varkappa$ линеаризованной системы (1.7) вещественны и

$$\varkappa = (2\pi)^{-1} \ln (|A| + \sqrt{A^2 - 1})$$

(При этом два характеристических показателя исходной (нередуцированной) линейной системы уравнений возмущенного движения также вещественны и равны $\pm\varkappa\omega$, а изучаемое ПД орбитально неустойчиво.) В этом случае [5] существует каноническая замена переменных

$$q_2 = \varphi(\xi, \eta; q_1), \quad p_2 = \psi(\xi, \eta; q_1) \tag{2.2}$$

задаваемая сходящимися в достаточно малой окрестности начала координат $\xi = \eta = 0$ рядами φ и ψ с 2π-периодическими по q_1 коэффициентами, и такая, что в новых переменных дифференциальные уравнения (1.7) запишутся в виде

$$d\xi/dq_1 = \partial\Gamma/\partial\eta, \quad d\eta/dq_1 = -\partial\Gamma/\partial\xi \tag{2.3}$$

Аналитическая функция Γ не зависит от q_1, а величины ξ и η содержатся в ее разложении в ряд в виде произведения $\zeta = \xi\eta$:

$$\Gamma = \varkappa\zeta + \ldots \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.3) с функцией Гамильтона (2.4) легко интегрируется. Обозначив нулевым индексом начальные значения переменных, получим

$$\xi = \xi_0 \exp(\Gamma' q_1), \quad \eta = \eta_0 \exp(-\Gamma' q_1) \tag{2.5}$$

где Γ' — производная функции Γ по ζ, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$.

Подставив (2.5) в (2.2), получим общее решение системы уравнений (1.7) в достаточно малой окрестности начала координат $q_2 = p_2 = 0$:

$$\begin{aligned} q_2 &= \varphi(\xi_0 \exp(\Gamma' q_1), \ \eta_0 \exp(-\Gamma' q_1); \ q_1) \\ p_2 &= \psi(\xi_0 \exp(\Gamma' q_1), \ \eta_0 \exp(-\Gamma' q_1); \ q_1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решения, асимптотические к началу координат при $q_1 \to +\infty$, получаются из (2.6) при $\xi = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} q_2 &= \varphi(0, \ \eta_0 \exp(-\varkappa q_1); \ q_1) \\ p_2 &= \psi(0, \ \eta_0 \exp(-\varkappa q_1); \ q_1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

а решения, асимптотические к началу координат при $q_1 \to -\infty$, получаются из (2.6) при $\eta_0 = 0$:

$$\begin{aligned} q_2 &= \varphi(\xi_0 \exp(\varkappa q_1), \ 0; \ q_1) \\ p_2 &= \psi(\xi_0 \exp(\varkappa q_1), \ 0; \ q_1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Левые части равенств (2.7) и (2.8) — ряды по степеням величин $\eta_0 \exp(-\varkappa q_1)$ и $\xi_0 \exp(\varkappa q_1)$ соответственно, коэффициенты этих рядов — 2π-периодические функции q_1.

Таким образом, при $|A| > 1$ существует ровно два семейства траекторий, асимптотических при $t \to \pm\infty$ к замкнутой траектории ПД исходной автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Само ПД при этом орбитально неустойчиво.

3. Асимптотические движения в случае чисто мнимых характеристических показателей. Пусть теперь $|A| < 1$. В этом случае характеристические показатели $\pm i\lambda$ линеаризованной системы (1.7) чисто мнимые, причем

$$\cos 2\pi\lambda = A \tag{3.1}$$

(В рассматриваемом случае два характеристических показателя $\pm i\alpha$ нередуцированной линейной системы уравнений возмущенного движения также чисто мнимые ($\alpha = \lambda\omega$) и ПД орбитально устойчиво в первом приближении.) Если величины 3λ и 4λ не будут целыми числами, то при помощи аналитической по ξ, η, 2π-периодической по q_1 замены переменных $q_2, p_2 \to \xi, \eta$ функция Гамильтона (1.5) может быть приведена к виду

$$K = \lambda r + c_2 r^2 + K'(\xi, \eta; q_1) \tag{3.2}$$

$$(\xi = \sqrt{2r}\sin\varphi, \quad \eta = \sqrt{2r}\cos\varphi, \quad K' = O(r^{5/2}), \quad c_2 = \mathrm{const})$$

Если $c_2 \neq 0$, то [6] у системы (1.7) нет решений, асимптотических к положению равновесия $q_2 = p_2 = 0$.

При резонансе третьего порядка (3λ — целое число) гамильтониан (1.5) можно [2] преобразовать к виду

$$K = ar^{3/2}\sin 3\varphi + O(r^2) \quad (a = \mathrm{const}) \tag{3.3}$$

Если $a \neq 0$, то [6] у системы (1.7) существует ровно шесть семейств решений, асимптотических к началу координат $q_2 = p_2 = 0$: три из них будут асимптотическими при $q_1 \to +\infty$, а другие три — при $q_1 \to -\infty$; для достаточно больших $|q_1|$ величины q_2 и p_2 имеют порядок $|q_1|^{-1}$.

При резонансе четвертого порядка (4λ — целое число) функция Гамильтона (1.5) может быть приведена к виду

$$K = r^2(c + b\sin 4\varphi) + O(r^{5/2}) \quad (c, \ b = \mathrm{const}) \tag{3.4}$$

Если $|b| < |c|$, то [6] у системы (1.7) нет решений, асимптотических к началу координат. Если $|b| > |c|$, то существует ровно восемь семейств асимптотических решений: четыре стремятся к началу координат при $q_1 \to +\infty$ и четыре — при $q_1 \to -\infty$; при достаточно больших $|q_1|$ величины q_2 и p_2 имеют порядок $|q_1|^{-1/2}$.

Таким образом, если $|A| < 1$, нет резонансов третьего и четвертого порядков и величина c_2 в гамильтониане (3.2) отлична от нуля, то траекторий, асимптотических к траектории ПД, не существует, при этом ПД орбитально устойчиво. При резонансе третьего порядка существует (если в (3.3) $a \neq 0$) шесть семейств асимптотических траекторий, а ПД орбитально неустойчиво. При резонансе четвертого порядка либо существует восемь семейств асимптотических траекторий (если $|b| > |c|$), либо асимптотических траекторий нет (если $|b| < |c|$); в первом случае ПД орбитально неустойчиво, а во втором — орбитально устойчиво.

4. Об асимптотических траекториях уравнений основной проблемы динамики. Основная проблема динамики систем с двумя степенями свободы состоит (по Пуанкаре) в исследовании траекторий для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона вида

$$H = H_0(I_1, I_2) + \mu H_1(I_1, I_2, w_1, w_2) + \ldots \tag{4.1}$$

где H аналитична по всем своим аргументам и 2π-периодична по w_1, w_2; $0 < \mu \ll 1$.

При $\mu = 0$ движение в системе с функцией Гамильтона (4.1) описывается формулами

(4.2) $$I_i = I_{i0} \; (i = 1, 2), \quad w_1 = \omega_1 (I_{10}, I_{20}) \, t, \quad w_2 = \omega_2(I_{10}, I_{20}) \, t + \sigma$$

где I_{i0}, σ — произвольные постоянные, $\omega_i = \partial H_0/\partial I_i$; начальное значение переменной w_1 принято равным нулю, что не ограничивает общность, так как уравнения движения явно время не содержат, а функция $\omega_1 (I_{10}, I_{20})$ считается отличной от нуля.

Если отношение частот ω_1/ω_2 — рациональное число, то движение (4.2) будет периодическим по времени с некоторым периодом T.

При μ, отличном от нуля, но достаточно малом, существование T-периодических движений в системе с гамильтонианом (4.1) можно установить методом Пуанкаре [8]. Для этого надо вычислить среднее значение $\langle H_1\rangle$ функции H_1 на невозмущенном движении (4.2):

$$\langle H_1\rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T H_1 (I_{10}, I_{20}, \omega_1 t, \omega_2 t + \sigma) \, dt$$

Величина $\langle H_1\rangle$ будет функцией от I_{10}, I_{20}, σ.

Если при $I_i = I_{i0}$ гессиан функции H_0 отличен от нуля и при некотором $\sigma = \sigma_*$ выполняются условия

(4.3) $$\partial \langle H_1\rangle/\partial\sigma = 0, \quad \partial^2\langle H_1\rangle/\partial\sigma^2 \neq 0$$

то при достаточно малых μ существует T-периодическое движение, аналитическое по μ и переходящее при $\mu = 0$ в движение (4.2), в котором $\sigma = \sigma_*$.

Два характеристических показателя, отвечающих этому движению, равны нулю, а два других ($\pm\delta$) разлагаются в сходящиеся ряды по степеням величины $\sqrt{\mu} : \delta = \delta_1 \sqrt{\mu} + \delta_2\mu + \ldots$, причем

(4.4) $$\omega_1^2\delta_1^2 = \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial\sigma^2}\bigg|_{\sigma=\sigma_*} \cdot \left(\omega_1^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1 \partial I_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1^2}\right)$$

Если выражение в скобках в (4.4) отлично от нуля (т. е. невозмущенная система изоэнергетически невырождена), то при выполнении условий (4.3) количество значений σ_*, для которых $\delta_1^2 > 0$, равно количеству σ_*, для которых $\delta_1^2 < 0$. Следовательно, из невозмущенного ПД (4.2) при малых $\mu \neq 0$ рождаются пары ПД; одно из ПД в такой паре орбитально неустойчиво (при $\delta_1^2 > 0$), а другое (при $\delta_1^2 < 0$) орбитально устойчиво в первом приближении.

При $\delta_1^2 > 0$ ненулевые характеристические показатели, отвечающие возмущенному ПД, вещественны и противоположны по знаку; в соответствии с п. 2 в этом случае существует ровно два семейства траекторий, асимптотических при $t \to \pm\infty$ к траектории возмущенного ПД.

При $\delta_1^2 < 0$ ненулевые характеристические показатели чисто мнимые. Если дополнительно потребовать, чтобы при $\sigma = \sigma_*$ выполнялось неравенство

(4.5) $$3 \frac{\partial^4 \langle H_1\rangle}{\partial\sigma^4} \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial\sigma^2} - 5\left(\frac{\partial^3 \langle H_1\rangle}{\partial\sigma^3}\right)^2 \neq 0$$

то ПД Пуанкаре орбитально устойчиво не только в первом приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [1]. Согласно п. 3, в

[1] См.: *Саитбатталов А. А.* Периодические решения Пуанкаре и их устойчивость в задаче о движении твердого тела под действием гравитационных моментов: Дис ... канд. физ.-мат. наук. М.: Авиац. ин-т. 1984. 171 с.

этом случае не существует траекторий, асимптотических к траектории ПД.

5. О движении спутника относительно центра масс, асимптотических к его ПД, рождающимся из плоских вращений. Пусть центр масс O динамически симметричного спутника — твердого тела движется по круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле. Ориентацию спутника относительно орбитальной системы координат (ее оси OX, OY и OZ направлены соответственно по радиусу-вектору центра масс, вектору скорости последнего и бинормали к орбите) будем задавать углами Эйлера ψ, θ, φ, которые вводятся обычным образом. Пусть A и C — экваториальный и полярный моменты инерции спутника, ω_0 — угловая скорость движения центра масс по орбите. За независимую переменную примем истинную аномалию $\nu = \omega_0 t$, а обобщенные импульсы, канонически сопряженные с ψ, θ, φ, приведем к безразмерному виду при помощи множителя $A\omega_0$. Так как φ — циклическая координата, то $p_\varphi = \text{const}$. Если $p_\varphi = 0$, то возможны плоские движения спутника, при которых его ось симметрии все время остается в плоскости орбиты.

Пусть величина $|p_\varphi|$ мала. Будем также предполагать, что величины моментов инерции A и C близки. Положим $\mu = (C - A)/(2A)$, $p_\varphi = \mu\beta$, где $|\mu| \ll 1$, а $\beta = O(1)$. Функция Гамильтона, отвечающая каноническим дифференциальным уравнениям, описывающим движение спутника относительно центра масс, будет иметь вид [9]

$$H = {}^1/_2 \sin^{-2}\theta\, p_\psi^2 - p_\psi + {}^1/_2 p_\theta^2 + \mu\,(3\sin^2\psi\cos^2\theta - \beta\cos\theta\sin^{-2}\theta p_\psi) + \ldots \tag{5.1}$$

Здесь и далее многоточие означает совокупность членов выше первого порядка по μ.

При $\mu = 0$ уравнения движения с гамильтонианом (5.1) допускают частное решение

$$\theta = {}^1/_2\pi, \quad \psi = \omega\nu + \psi_0, \quad p_\theta = 0, \; p_\psi = \sigma\; (\sigma = \omega + 1 = \text{const}), \tag{5.2}$$

отвечающее (при $\omega \neq 0$) такому движению спутника, при котором его ось симметрии вращается в плоскости OXY с угловой скоростью $\omega\omega_0$. Это движение является периодическим: за время $T = 2\pi/(|\omega|\omega_0)$ ось симметрии спутника возвращается к своему исходному положению в орбитальной системе координат.

Пусть теперь величина $|\mu|$ отлична от нуля, но достаточно мала. Тогда [9], если число $1/\omega$ не будет целым, то существует аналитическое по μ, T-периодическое по t движение спутника, переходящее при $\mu = 0$ в плоское вращение (5.2). Это решение представимо в виде рядов

$$\begin{aligned} &\theta = {}^1/_2\pi - \mu\sigma^{-1}\beta + \ldots \\ &\psi = \omega\nu + \psi_0 + \mu\cdot{}^3/_4\omega^{-2}\sin 2\,(\omega\nu + \psi_0) + \ldots \\ &p_\theta = \ldots, \quad p_\psi = \sigma + \mu\cdot{}^3/_2\omega^{-1}\cos 2\,(\omega\nu + \psi_0) + \ldots \end{aligned} \tag{5.3}$$

При исследовании устойчивости движения (5.3) было показано [9], что в плоскости μ, ω на кривых

$$\omega = -{}^3/_5 + {}^9/_4\mu + \ldots, \quad \omega = -3 - {}^9/_4\mu + \ldots \tag{5.4}$$

ПД орбитально неустойчиво. На кривых (5.4) имеет место резонанс третьего порядка: $3\lambda = -2$. Неустойчивость также возможна на резонансах $3\lambda = 2l$, где l — целое число, $|l| \geqslant 2$; кривые этих резонансов в плоскости μ, ω исходят из точек оси $\mu = 0$, определяемых равенством $\omega =$

$= 3/(2l - 3)$ (l не кратно трем, так как иначе число $1/\omega$ было бы целым). При остальных значениях ω для достаточно малых $|\mu|$ ПД (5.3) орбитально устойчиво. В частности, если $\omega > 3$ или $\omega < -1$, но $\omega \neq -3$, то при малых $|\mu|$ ПД (5.3) существует и орбитально устойчиво.

Таким образом, в соответствии с пп. 2 и 3 можно утверждать, что при достаточно малых $|\mu|$ траектории, асимптотические к траектории ПД (5.3), могут существовать только при резонансе третьего порядка. Опираясь на алгоритм, изложенный в пп. 1 и 3, кратко опишем процедуру построения асимптотических траекторий при резонансе $3\lambda = -2$, реализующемся при значениях μ и ω, лежащих на кривых (5.4).

После канонической замены переменных ψ, θ, p_ψ, $p_\theta \to q_1$, q_2, p_1, p_2, задаваемой равенствами

$$\begin{aligned} (5.5)\qquad & \psi = q_1 + \mu\cdot{}^3/_4\omega^{-2}\sin 2q_1 + \ldots, \quad \theta = {}^1/_2\pi - \mu\beta\sigma^{-1} + \\ & + |\sigma|^{-1/2}q_2 + \ldots \\ & p_\psi = \sigma + \mu\cdot{}^3/_2\omega^{-1}\cos 2q_1 + (1 - \mu\cdot{}^3/_2\omega^{-2}\cos 2q_1)p_1 + \ldots \\ & p_\theta = |\sigma|^{1/2}p_2 + \ldots \end{aligned}$$

функция Гамильтона (5.1) станет периодической по q_1 (с периодом π, а не 2π, как это должно быть в общем случае, что объясняется структурой функции Гамильтона в рассматриваемой конкретной задаче), а ее разложение в ряд по степеням величин p_1, q_2, p_2 задается равенствами (1.2), (1.3), причем

$$\begin{aligned} & h_2 = {}^1/_2|\sigma|(q_2^2 + p_2^2) - \mu\cdot{}^3/_2|\sigma|^{-1}[1 - (2 + \\ & + \omega^{-1})\cos 2q_1]q_2^2 + \ldots \\ & a_1 = -\mu\beta|\sigma|^{-1/2} + \ldots, \quad a_2 = 0 \\ & h_3 = -\mu\cdot{}^1/_2\beta\sigma^{-1}|\sigma|^{-3/2}(4 + \sigma^2 - 4\cos 2q_1)q_2^3 + \ldots \end{aligned}$$

ПД (5.3) в новых переменных запишется в виде

$$p_1 = q_2 = p_2 = 0, \quad q_1 = \omega\nu + \psi_0$$

После изоэнергетической редукции получим уравнения (1.7), причем функция K задается равенствами (1.5), (1.6), в которых

$$\begin{aligned} (5.6)\qquad & K_2 = \omega^{-1}h_2, \quad K_3 = \omega^{-1}h_3 + \mu\cdot{}^1/_2\beta|\sigma|^{1/2}\omega^{-2}q_2(q_2^2 + \\ & + p_2^2) + \ldots \end{aligned}$$

При помощи линейной, π-периодической по q_1 канонической замены переменных (переходящей при $\mu = 0$ в тождественную замену) можно [9] вместо переменных q_2, p_2 ввести новые переменные так, чтобы квадратичная часть функции K приняла вид (обозначения для переменных оставляем прежними)

$$K_2 = {}^1/_2\lambda(q_2^2 + p_2^2) \quad (\lambda = \omega^{-1}|\sigma| - \mu\cdot{}^3/_2\cdot\omega^{-1}|\sigma|^{-1} + \ldots)$$

При этом функция K_3 в членах первого порядка по μ не изменится.

Пусть $3\lambda = -2$, т. е. параметры μ и ω лежат на одной из кривых (5.4). При помощи преобразования Биркгофа [4] введем новые переменные ξ, η так, чтобы исключить из K_3 все нерезонансные члены. При $\mu = 0$ это преобразование будет тождественным. В новых переменных функция Гамильтона K примет вид

$$\begin{aligned} (5.7)\qquad & K = \lambda R + aR^{3/2}\sin(3\Phi + 2q_1) + K''(\xi, \eta, q_1, \mu) \\ & (\xi = \sqrt{2R}\sin\Phi, \quad \eta = \sqrt{2R}\cos\Phi, \quad a = \mu\cdot{}^1/_3\sqrt{2}\beta\sigma^{-3}|\sigma|^{-1/2}) \end{aligned}$$

Функция K'' в (5.7) есть совокупность членов выше первого порядка малости по μ и выше третьей степени по ξ, η.

Сделаем еще одну каноническую замену переменных Φ, $R \to \varphi$, r, задаваемую равенствами

(5.8) $$\Phi = \lambda q_1 + \varphi, \ R = r$$

Тогда гамильтониан (5.7) станет таким:

(5.9) $$K = ar^{3/2} \sin 3\varphi + K''$$

Если пренебречь функцией K'', то из канонических уравнений, отвечающих гамильтониану (5.9), можно найти следующие частные решения, соответствующие асимптотическим траекториям:

$$\varphi = \varphi_k = {}^1/_3 k\pi \ (k = 1, 2, \ldots, 6), \ r = r_*$$

$$r_* = 4r_0 \left[2 + 3a \sqrt{r_0} \cos 3\varphi_k (q_1 - q_{10})\right]^{-2}$$

Возвратясь затем к исходным переменным q_2, p_2 (вводимым заменой переменных (5.5)), с погрешностью порядка $\varepsilon_1 = \max (| \mu | \sqrt{r_0}, r_0)$ найдем

(5.10) $$q_2 = \sqrt{2r_*} \sin (\lambda q_1 + \varphi_k), \ p_2 = \sqrt{2r_*} \cos (\lambda q_1 + \varphi_k)$$

Если $a\omega > 0$, то траекториям, асимптотическим при $t \to +\infty$ к траектории ПД (5.3), соответствуют решения (5.10) при четных k, решения (5.10) при нечетных k соответствуют траекториям, асимптотическим к ПД (5.3) при $t \to -\infty$; если же $a\omega < 0$, то картина будет обратной.

Значение величины p_1 на асимптотических траекториях может быть найдено из (1.4), (1.5), (5.6) и (5.10). С погрешностью порядка $\varepsilon_2 = \max (| \mu | r_0, r_0^2)$ имеем

(5.11) $$p_1 = {}^2/_3 r_*$$

Равенства (5.10), (5.11) и (5.5) задают в исходном фазовом пространстве ψ, θ, p_ψ, p_θ кривые, на которых лежат траектории, асимптотические к замкнутой траектории ПД (5.3). Координата q_1 играет на этих кривых роль параметра. Для нахождения зависимости q_1 от t следует воспользоваться уравнением (1.8).

6. О движениях твердого тела, асимптотических к его ПД, рождающимся из регулярных прецессий с невертикальной осью прецессии. Пусть твердое тело движется вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести. Будем считать, что главные моменты инерции тела для неподвижной точки удовлетворяют условию $A = B \neq C$, а центр тяжести не лежит на оси симметрии и находится на малом расстоянии μd от неподвижной точки ($0 < \mu \ll 1$, $d = O(1)$).

При $\mu = 0$ тело совершает регулярную прецессию (исключаем случай равновесия тела и его перманентных вращений вокруг главных осей инерции). Пусть ω_1 и ω_2 — угловые скорости собственного вращения и прецессии соответственно, а θ_0 — угол между осью динамической симметрии тела и вектором кинетического момента. Кроме того, считаем, что вектор кинетического момента (он лежит на оси прецессии) невертикален.

Было показано [10], что при $A = B \neq 2C$ и $\omega_1 = \pm\omega_2$ (т. е. $\cos \theta_0 = \pm C/(A - C)$) из каждой регулярной прецессии при малых, но отличных от нуля значениях μ рождаются по два ПД, одно из которых орбитально неустойчиво (так как существует пара ненулевых вещественных характеристических показателей), а другое орбитально устойчиво в первом приближении (существует пара ненулевых чисто мнимых характеристических показателей).

Вычисления показывают, что для устойчивых в первом приближении ПД условие (4.5) выполняется (вычисления особенно просты, если, как и в [10], для описания движения тела воспользоваться канонически сопряженными переменными Андуайе). Следовательно, эти ПД действительно орбитально устойчивы.

Согласно п. 4, к первому из упомянутых ПД существует ровно два семейства асимптотических движений, а движений, асимптотических ко второму ПД, не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П.* Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322—336.
2. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука. 1966. 300 с.
4. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат. 1941. 320 с.
5. *Moser J.* Analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Comm. Pure appl. math. 1956. V. 9. No. 4. P. 673—692.
6. *Маркеев А. П., Щербина Г. А.* О движениях спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 3—10.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 530 с.
8. *Пуанкаре А.* Изб. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука. 1971. 771 с.
9. *Маркеев А. П.* О периодических движениях спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1985. Т. 23. № 3. С. 323—330.
10. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ. 1980. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XI.1987