Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 3, 1988

УДК 62-50

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИМПУЛЬСЫ УПРАВЛЕНИЙ

Ухоботов В. И.

Рассматривается линейная дифференциальная игра с заданным моментом окончания, терминальное множество в которой определяется условием равенства нулю фазовых координат. На выбор управлений накладываются импульсные ограничения [1—9]. Найдены достаточные условия окончания игры, которые определяют стабильный мост [8, 9]. Указана процедура построения управления первого игрока без использования информации о количестве оставшегося запаса ресурсов второго игрока. Указаны классы игр, для которых необходимые и достаточные условия совпадают.

1. Рассмотрим игру, уравнения движения которой имеют вид [10]

$$dz = N(t)du + M(t)dv,\quad z \in R^n,\quad u \in E_1,\quad v \in E_2,\quad t \in [a, p] \tag{1.1}$$

Здесь E_i — линейные конечномерные нормированные пространства с нормами $\| x \|_i$, $x \in E_i$; $N(t)$, $M(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размеров. Управление u выбирает первый игрок, а управление v — второй.

На каждом отрезке $[t, \tau]$ допустимыми программными управлениями являются функции $w : [t, \tau] \to E_i$ с ограниченными изменениями. Расходы ресурсов, затраченные на формирование управления, определяются вариацией $\int \| dw(r) \|_i$ [10]. Здесь и далее в п. 1 интегрирование ведется в пределах от t до τ.

Позиция игры — точка z, μ, ν, где числа $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ характеризуют запасы ресурсов игроков. При выбранных на отрезке $[t, \tau]$ управлениях правило перехода позиции задается формулами [10]:

$$\mu(\tau) = \mu - \int \| du(r) \|_1,\quad \nu(\tau) = \nu - \int \| dv(r) \|_2 \tag{1.2}$$

$$z(\tau) = z + \int N(r)du(r) + \int M(r)dv(r) \tag{1.3}$$

Интегралы в (1.3) понимаются в смысле Римана — Стилтьеса. Условия неперерасхода запасов имеющихся ресурсов записываются в виде неравенств

$$\mu(\tau) \geqslant 0,\quad \nu(\tau) \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Цель первого игрока заключается в осуществлении равенства $z(p) = 0$. Наличие импульсов управлений приводит к мгновенному изменению позиции, что требует специального определения условия окончания [3—7]. С этой целью рассмотрим вектограммы игроков

$$U(t) = \{x = N(t)u : \| u \|_1 \leqslant 1\},\quad V(t) = \{x = M(t)v : \| v \|_2 \leqslant 1\} \tag{1.5}$$

Условие окончания игры запишем в виде

$$z(p) + \nu(p)V(p) \subset \mu(p)U(p) \tag{1.6}$$

Обозначим множества достижимости [10] игроков

$$U_t^\tau = \{x = \int N(r)du(r) : \int \| du(r) \|_1 = 1\},\quad U_t^t = U(t) \tag{1.7}$$

$$V_t^\tau = \{x = \int M(r)dv(r) : \int \| dv(r) \|_2 = 1\},\quad V_t^t = V(t) \tag{1.8}$$

Множества (1.5), (1.7) и (1.8) — выпуклые компакты в R^n, симметричные относительно начала координат.

Обозначим $\beta_1(t, \psi)$ и $\beta_2(t, \psi)$ опорные функции [11] множеств $U(t)$ и $V(t)$. Можно показать, что опорные функции множеств U_t^p и V_t^p таковы:

(1.9) $$m_i(t, \psi) = \max_{t \leqslant r \leqslant p} \beta_i(r, \psi), \ i = 1, \ 2$$

Из симметричности множеств (1.5) следует, что функции β_i и m_i четные по ψ.

Обозначим (z, ψ) скалярное произведение векторов $z, \psi \in R^n$. Тогда включение (1.6) можно [11] записать в виде

(1.10) $$(z\ (p), \ \psi) + \nu(p)m_2(p, \ \psi) \leqslant \mu(p)m_1(p, \ \psi), \quad \forall\psi \in R^n$$

2. В методе поглощения областей достижимости [1—3] для игр вида (1.1) управление первого игрока строится таким образом, чтобы реализовавшаяся в момент t позиция удовлетворяла условию

(2.1) $$z + \nu V_t^p \subset \mu U_t^p \Leftrightarrow (z, \psi) + \nu m_2(t, \ \psi) \leqslant \mu m_1(t, \ \psi), \quad \forall\psi \in R^n$$

Если для некоторого вектора $\psi \in R^n$ неравенство (2.1) не выполнено, то второй игрок берет управление v, такое, что

(2.2) $$\int_t^p (M\,(r)\,dv\,(r), \psi) = \nu m_2\,(t, \psi), \quad \int_t^p \|\, dv\,(r)\,\|_2 = \nu$$

Тогда $\nu(p) = 0$ и при любом управлении первого игрока

$$(z(p), \psi) \geqslant (z, \psi) + \nu m_2(t, \psi) - (\mu - \mu(p))m_1(t, \psi) > \mu(p)m_1(p, \psi)$$

Следовательно, неравенство (1.10) не выполнено.

Будем предполагать, что

(2.3) $$m_1(t, \ \psi) > 0, \quad \forall t < p, \quad \forall\psi \in R^n$$

Приведем другие необходимые условия окончания игры. Зафиксируем вектор $\psi \in R^n$ и рассмотрим одномерную игру

(2.4) $$dx = (\psi, \ N(t)du) + (\psi, \ M(t)dv), \ x = (\psi, \ z) \in R$$

Вектограммы (1.5) для игры (2.4) — отрезки. Из [7] получим необходимые условия окончания

(2.5) $$(z, \ \psi) + \nu m_1(t, \ \psi)F_1(t, \ \psi) \leqslant \mu m_1(t, \ \psi), \quad \forall\psi \in R^n$$

(2.6) $$F_1\,(t, \psi) = \sup_{t \leqslant r \leqslant p} F_0\,(r, \psi); \quad F_0\,(t, \psi) = \frac{m_2\,(t, \psi)}{m_1\,(t, \psi)}$$

Обозначим

(2.7) $$F(t) = \sup_{\psi} F_1(t, \ \psi)$$

Лемма. 1. Если $\mu < \nu F(t)$, то для любого $z \in R^n$ найдется вектор ψ, для которого неравенство (2.5) не выполнено.

Доказательство. Из (2.7) следует, что $\mu < \nu F_1(t, \ \psi)$ при некотором векторе $\psi \in R^n$. Отсюда, используя четность по ψ функций (1.9) и (2.6), получим, что для одного из векторов $\pm\psi$ неравенство (2.5) не выполнено.

Будем предполагать, что $F(t) < +\infty$ при $t < p$. Из (2.6) и (2.7) следует, что

(2.8) $$F\,(t) = \sup_{t \leqslant \tau \leqslant p} f\,(\tau); \quad f\,(\tau) = \max_{\psi} \frac{m_2\,(\tau, \psi)}{m_1\,(\tau, \varphi)} = \inf\,\{f \geqslant 0 : V_\tau{}^p \subset fU_\tau{}^p\}$$

Доопределим по непрерывности функции (2.6) и (2.7) при $t = p$. Тогда $F_1(t, \ \psi) \leqslant F(t)$ при $t \leqslant p$.

При помощи функции F_1 определим последовательность функций

$$(2.9)\qquad F_{i+1}(t,\psi)=\max_{t\leq\tau\leq p}\left(F(\tau)-(F(\tau)-F_i(\tau,\psi))\frac{m_1(\tau,\psi)}{m_1(t,\psi)}\right),\quad i\geqslant 1$$

Из этой формулы, используя (2.7), получим

$$(2.10)\qquad F(t)\geqslant F_{i+1}(t,\ \psi)\geqslant F_i(t,\ \psi),\ i\geqslant 1,\quad \forall\psi\in R^n$$

Теорема 1. Пусть для некоторого вектора $\psi\in R^n$ и некоторого $i\geqslant 1$

$$(2.11)\qquad (z,\ \psi)>m_1(t,\ \psi)(\mu-\nu F_i(t,\ \psi))$$

Тогда второй игрок сможет сформировать свое управление так, что неравенство (1.10) не выполнено.

Доказательство. Случай $i=1$ был рассмотрен раньше. Предположим, что теорема верна для числа $i-1$. Тогда из (2.11) и из формулы (2.9) следует, что существует число $t<\tau<p$, для которого

$$(2.12)\qquad (z,\ \psi)>m_1(t,\ \psi)(\mu-\nu F(\tau))+\nu(F(\tau)-F_{i-1}(\tau,\ \psi)m_1(\tau,\psi)$$

Второй игрок берет при $t\leqslant r\leqslant\tau$ управление $dv(r)=0$. Тогда, используя формулы (1.2), (1.3) и неравенство (2.12), можно показать, что при любом управлении первого игрока

$$(2.13)\qquad (z(\tau),\ \psi)>m_1(t,\ \psi)(\mu(\tau)-\nu F(\tau))+\nu(F(\tau)-F_{i-1}(\tau,\ \psi))m_1(\tau,\psi)$$

Пусть $\mu(\tau)\geqslant\nu F(\tau)$. Тогда из неравенства $m_1(t,\psi)\geqslant m_1(\tau,\ \psi)$ следует что правая часть неравенства (2.13) не меньше, чем $m_1(\tau,\ \psi)(\mu(\tau)-$ $-\nu F_{i-1}(\tau,\ \psi))$. Согласно индукционному предположению, второй игрок сможет не допустить окончание (1.10). Если же $\mu(\tau)<\nu F(\tau)$, то окончание (1.10) невозможно, согласно лемме 1.

Согласно (2.10), можно определить

$$(2.14)\qquad F_\infty(t,\ \psi)=\lim F_i(t,\ \psi),\ i\to\infty$$

Полученные необходимые условия можем записать в следующей форме: пусть $S=\{\psi\in R^n:(\psi,\ \psi)=1\}$, тогда

$$(2.15)\qquad \sup_{\psi\in S}\left(\frac{(z,\psi)}{m_1(t,\psi)}+\nu\Phi(t,\psi)\right)\leqslant\mu,\quad \Phi(t,\psi)=F_i(t,\psi),\quad i\geqslant 0$$

Пусть начальные запасы ресурсов игроков удовлетворяют равенству $\mu=\nu F(t)$. Тогда условия (2.15) примут вид

$$(2.16)\qquad z\in\nu K_i(t),\ K_i(t)=\{x\in R^n:(x,\ \psi)\leqslant(F(t)-$$
$$-F_i(t,\psi))m_1(t,\ \psi),\quad \forall\psi\}$$

3. Известно [9], что в ряде случаев условия регулярности позволяют из необходимых условий получить достаточные условия окончания игры.

Рассмотрим условия регулярности для необходимых условий типа (2.15). Пусть заданы непрерывная функция $\Phi:S\to R$ и выпуклая функция $m:R^n\to R$, удовлетворяющие условиям

$$(3.1)\qquad m(-\psi)=m(\psi)>0,\ \Phi(-\psi)=\Phi(\psi)\geqslant 0,\quad \forall\psi\in R^n$$

Обозначим при $x\in R^n$

$$(3.2)\qquad g(x)=\max_{\psi\in S}\left(\frac{(x,\psi)}{m(\psi)}+\Phi(\psi)\right);\quad \varphi=\max_{\psi\in S}\Phi(\psi)$$

Теорема 2. Пусть при любом векторе $x\neq 0$ максимум в первой формуле (3.2) достигается на единственном векторе. Тогда

$$(3.3)\qquad g(x)=g_1(x)+\varphi,\quad g_1(x)=\max_{\psi\in S}\frac{(x,\psi)}{m(\psi)}$$

Доказательство. Пусть максимум во второй формуле (3.2) достигается на векторе ψ_1. Подставим в первую формулу (3.2) один из векторов $\pm\psi_1$ и, используя условие четности (3.1), получим $g(x) \geqslant \varphi$.

Покажем, что

$$(3.4) \qquad g(x) = \varphi \Rightarrow x = 0$$

В самом деле, из (3.2) и (3.4) следует, что $(x, \psi_1) = 0$ и максимум достигается на двух векторах $\pm\psi_1$. Следовательно, $x = 0$.

Неравенство $g(x) \leqslant g_1(x) + \varphi$ выполнено всегда. Пусть при некото ром $x \in R^n$ выполнено $g(x) < g_1(x) + \varphi$. Обозначим

$$(3.5) \qquad \delta = g(x) - \varphi < g_1(x); \; Y = \{y \in R^n : g_1(y) \leqslant \delta\}$$

Используя неравенство $m > 0$ (3.1), можно показать, что множество Y — выпуклый компакт. Его опорная функция равна $\delta m(\psi)$.

Точка $x \overline{\in} Y$. Следовательно, для каждого $y \in Y$ существует един ственный вектор $\psi = \psi(y) \in S$, для которого

$$(3.6) \qquad g(x - y) = (x - y, \psi)/m(\psi) + \Phi(\psi)$$

Функция $\psi(y)$ непрерывна. Обозначим

$$(3.7) \qquad Z(y) = \{z \in Y : (z, \psi) = \delta m(\psi), \; \psi = \psi(y)\}$$

Это множество — выпуклый компакт, полунепрерывно сверху зависящий от y. Согласно теореме Какутани [12], существует неподвижная точка $y_0 \in Z(y_0)$. Тогда из (3.6) и (3.7) следует, что при $\psi_0 = \psi(y_0)$

$$g(x - y_0) = (x, \psi_0)/m(\psi_0) + \Phi(\psi_0) - \delta \leqslant g(x) - \delta = \varphi$$

Согласно (3.4), $x - y_0 = 0$, т. е. $x \in Y$. Получим противоречие.

Определение 1. Будем говорить, что в момент времени $t < p$ выполнено условие регулярности с функцией $\Phi(t, \psi)$, если эта функция непрерывна по ψ и максимум в (2.15) для любых $z \neq 0$ $\nu > 0$ достигается на единственном векторе ψ.

Лемма 2. Пусть в момент времени $t < p$ выполнено условие регулярности. Тогда из необходимых условий (2.15) следует, что

$$(3.8) \qquad z \in (\mu - \nu\varphi(t))U_t^p, \;\; \mu \geqslant \nu\varphi(t); \;\; \varphi(t) = \max_{\psi} \Phi(t, \psi)$$

Доказательство следует из неравенства (2.15) и теоремы 2.

Лемма 3. Пусть в момент времени $t < p$ выполнено условие регулярности с функцией $\Phi = F_0$. Тогда из необходимых условий (2.15) следует, что

$$(3.9) \qquad z \in (\mu - \nu F(t))U_t^p + \nu W(t), \;\; \mu \geqslant \nu F(t); \;\; W(t) = (F(t) - f(t))U_t^p$$

Доказательство следует из лемм 1 и 2 и вида функций F_0 (2.6), f (2.8).

Лемма 4. Пусть в момент времени $t < p$ выполнено условие регулярности с функцией $\Phi = F_i$, $i \geqslant 1$. Тогда из необходимых условий (2.15) следует, что

$$(3.10) \qquad z \in (\mu - \nu F(t))U_t^p, \;\; \mu \geqslant \nu F(t)$$

Доказательство следует из формул (2.7), (2.10) и соотношений (3.8).

Для однотипных игр [4, 5] выполняется равенство $V_t^p = f(t)U_t^p$. В этом случае из формул (2.6), (2.8) следует, что $F_1(t, \psi) = F(t)$. Отсюда и из (2.15) получим условия (3.10).

Рассмотрим случай, когда область достижимости первого игрока в момент времени t имеет вид

$$(3.11)\qquad {}^{\frown}U_t^p = \{z : \mid (z,\ e_i(t)) \mid \leqslant \alpha_i(t),\ i = 1, \ldots, n\}$$

Здесь векторы $e_i(t)$ образуют базис в R^n, а α_i — невозрастающие функции. Обозначим

$$W(t) = \{z : \mid (z,\ e_i(t)) \mid \leqslant F(t) - \Phi\ (t,\ e_i(t)),\ i = 1, \ldots, n\}$$

Используя линейную независимость векторов $e_i(t)$ и формулу (3.11), можно получить, что из необходимых условий (2.15) следует первое включение (3.9). |

4. Ищем достаточные условия окончания игры в виде

$$(4.1)\qquad z \in (\mu - \nu F(t))\, U_t^p + \nu W(t),\quad \mu \geqslant \nu F(t) \geqslant 0$$

Из необходимых условий (2.16) получим включение $W(t) \subset K_i(t)$, $i \geqslant 0$. Если посредством $\overset{*}{-}$ обозначить геометрическую разность [13], то из (2.16) и вида функции (2.6) будем иметь

$$(4.2)\qquad W(t) \subset F(t)\, U_t^p \overset{*}{-} V_t^p = K_0(t)$$

Потребуем, чтобы семейство множеств (4.1) являлось стабильным мостом [8, 9]. Тогда можно получить, что

$$(4.3)\qquad W(t) \subset W(\tau) + (F(t) - F(\tau))\, U_t^p,\quad t < \tau$$

Определение 2. Семейство множеств $W(t)$ удовлетворяет условию стабильности, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $r < p$ существует число $\delta > 0$, такое, что для любых $t < \tau$ из δ-окрестности точки r выполнено включение

$$(4.4)\qquad W(t) \subset W(\tau) + (F_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(\tau))\, U_\tau^p,\quad F_\varepsilon(t) = F(t) + (p - t)\varepsilon$$

Отметим, что если матрица N в уравнении движения (1.1) удовлетворяет локальному условию Липшица, то из включения (4.3) следует условие стабильности (4.4).

Можно показать, что если семейство множеств $W(t)$ удовлетворяет включение (4.2) и условию стабильности (4.4), то для любого $\varepsilon > 0$ и любого начального момента $t_0 < p$ существует последовательность $t_0 < t_1 < \ldots < t_i \to p$, такая, что при $t = t_i$, $\tau = t_{i+1}$ выполнено включение (4.4) и

$$(4.5)\qquad W(t) + V_t^p \subset F_\varepsilon(t)\, U_\tau^p$$

Замечание 1. Семейство множеств $W(t) = 0$ удовлетворяет включению (4.2) и условию стабильности (4.4).

Определение 3. Стратегией первого игрока назовем последовательность точек $t_0 < t_1 < \ldots < t_i \to p$ и правило, ставящее каждой тройке z, μ, t_i в соответствие функцию $u : [t_{i-1},\ t_i] \to E_1$, вариация которой не превосходит числа μ.

Если заданы стратегия первого игрока и начальная позиция $z(t_0)$, $\mu(t_0)$, $\nu(t_0)$, то при выбранном на отрезке $[t_0,\ t_1]$ управлении второго игрока в момент времени t_1 реализуется позиция, которая определяется формулами (1.2) и (1.3). Таким образом, в каждый момент t_i определяется позиция. Можно показать, что существует предел у этой последовательности позиций. Под реализовавшейся в момент окончания p позицией понимается значение этого предела.

Обозначим при $z \in R^n$, $\mu \geqslant 0$, $t \leqslant p$, $\varepsilon \geqslant 0$

$$(4.6) \quad b(z, t, \mu, \varepsilon) = \max \{b : 0 \leqslant bF_\varepsilon(t) \leqslant \mu, z \in (\mu - bF_\varepsilon(t))U_t^p + bW(t)\}$$

Если включение в (4.6) не выполняется при всех $bF_\varepsilon(t) \leqslant \mu$, то полагаем $b(z, t, \mu, \varepsilon) = +\infty$.

Теорема 3. Пусть начальное состояние z_0, μ_0, ν_0, t_0 таково, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$(4.7) \qquad \nu_0 \leqslant b(z_0, t_0, \mu_0, \varepsilon) = b_0 < +\infty$$

Тогда существует стратегия первого игрока, гарантирующая окончание (1.6).

Доказательство. По числу $\varepsilon > 0$ построим последовательность чисел $t_0 < t_1 < \ldots < t_i \to p$, такую, что выполнены включения (4.4) и (4.5) при $t = t_i$, $\tau = t_{i+1}$.

Опишем правило, по которому строится управление u: $[t_i, t_{i+1}] \to E_1$. Если $b = b(z, t_i, \mu, \varepsilon) = +\infty$, то берем любое допустимое управление. Пусть $b < +\infty$. Тогда из (4.6) следует, что

$$(4.8) \qquad z = x + y, \quad x \in (\mu - bF_\varepsilon(t_i))\, U_{t_i}{}^p, \quad y \in bW(t_i)$$

Рассмотрим проблему моментов [10]

$$(4.9) \qquad \varphi = \int_{t_i}^{p} \| du(r) \|_1 \to \min, \quad x + \int_{t_i}^{p} N(r)\, du(r) = 0$$

Пусть φ_0 и u_0 — решение задачи (4.9). Тогда

$$(4.10) \qquad \varphi_0 \leqslant \mu - bF_\varepsilon(t_i)$$

$$x + \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(r)\, du_0(r) \in (\mu - bF_\varepsilon(t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| du_0(r) \|_1)\, U^p_{t_{i+1}}$$

Первое неравенство в (4.10) следует из (4.8). В качестве управления первого игрока берется $u_0 : [t_i, t_{i+1}] \to E_1$.

Допустим, что реализовавшаяся в момент времени t_i позиция z_i, μ_i, ν_i удовлетворяет неравенству

$$(4.11) \qquad \nu_i \leqslant b(z_i, t_i, \mu_i, \varepsilon) = b_i < +\infty$$

Тогда для $z = z_i$, $\mu = \mu_i$, $b = b_i$ выполнено условие (4.8). Пусть второй игрок выбрал управление $v : [t_i, t_{i+1}] \to E_2$, затратив q ресурсов. Тогда, используя включения (4.4), (4.5) и (4.8), получим

$$y + \int_{t_i}^{t_{i+1}} M(r)\, dv(r) \in b_i W(t_i) + qV_{t_i}{}^p \subset q(W(t_i) + V_{t_i}{}^p) +$$
$$+ (b_i - q)\, W(t_i) \subset qF_\varepsilon(t_i) U^p_{t_{i+1}} + (b_i - q)\, W(t_i)$$

Отсюда, используя (4.10) и первое равенство (4.8), получим

$$z_{i+1} \in (\mu_{i+1} - (b_i - q)\, F_\varepsilon(t_{i+1}))\, U^p_{t_{i+1}} + (b_i - q)\, W(t_{i+1})$$

$$\mu_{i+1} \geqslant (b_i - q)\, F_\varepsilon(t_{i+1})$$

Стало быть, для реализовавшейся в момент времени t_{i+1} позиции выполнено неравенство (4.11) $b_{i+1} \geqslant b_i - q \geqslant \nu_i - q = \nu_{i+1}$.

Из неравенства (4.11) и включения (4.5) можно получить, что $z_i + \nu_i V_{t_i}{}^p \subset \mu_i U^p{}_{t_i}$. Отсюда следует, что для предельной позиции выполнено включение (1.6).

Из теоремы 3 путем предельного перехода можно получить, что условия (4.1) определяют стабильный мост [8, 9]. Можно построить экстремальную к мосту стратегию первого игрока [8], однако этот алгоритм использует величину ν. Алгоритм построения управления u по правилу (4.9) не использует этой информации.

5. Для построения множеств $W(t)$ можно использовать следующую процедуру [14]:

$$W_0(t) = K_i(t), \quad W_{k+1}(t) = \bigcap_{t\leqslant\tau\leqslant p} (W_k(\tau) + (F(t) - F(\tau))\, U_t^p) \tag{5.1}$$

$$W(t) = \bigcap_{k\geqslant 1} W_k(t)$$

Здесь число $i \geqslant 0$ фиксировано. Отметим, что $W_{k+1}(t) \subset W_k(t)$. Отсюда можно получить [14], что выполнено включение (4.3).

Рассмотрим игру с областью достижимости (3.11). Ищем множества $W(t)$ в виде (3.11) с заменой функций $\alpha_i(t)$ на $y_i(t)$. Тогда множество, стоящее в правой части включения (4.4), имеет вид

$$\{z \in R^n : |(z, e_i(\tau))| \leqslant y_i(\tau) + (F(t) - F(\tau) + (\tau - t)\,\varepsilon)\,\alpha_i(\tau), \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{5.2}$$

Из линейной независимости векторов e_i следует, что $e_i(\tau) = a_{i1}(\tau, t)e_1(t) + \ldots + a_{in}(\tau, t)\,e_n(t)$. Отсюда, учитывая (5.2), получим, что включение (4.4) будет выполнено, если

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(\tau, t)|\, y_j(t) \leqslant y_i(\tau) + (F(t) - F(\tau) + (\tau - t)\,\varepsilon)\,\alpha_i(\tau) \tag{5.3}$$

Можно показать, что включение (4.2) выполнено, если

$$y_i(t) \leqslant F(t)\,\alpha_i(t) - m_2(t, e_i(t)), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.4}$$

Для рассматриваемого класса игр функция f (2.8) имеет вид

$$f(\tau) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{m_2(\tau, e_i(\tau))}{\alpha_i(\tau)} \tag{5.5}$$

Пример [3]. Пусть $z \in R^2$, а в формуле (3.11)

$$e_1(t) = (0, 1), \quad e_2(t) = (2, t - p), \quad \alpha_1(t) = 1, \quad \alpha_2(t) = p - t$$

Вектограмма (1.5) второго игрока имеет вид

$$V(t) = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = v\sin(p - t), \ x_2 = v\cos(p - t), \ |v| \leqslant 1\}$$

Используя (5.5), можно показать, что

$$F(t) = \frac{m_2(t, e_2(t))}{\alpha_2(t)} = 2\,\frac{\sin(p - t)}{p - t} - \cos(p - t), \quad p - \alpha \leqslant t \leqslant p$$

$$F(t) = F(p - \alpha), \quad t \leqslant p - \alpha; \quad 2\operatorname{ctg}\alpha = 2\alpha^{-1} - \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi$$

Отсюда следует, что $F(t) > 1 = m_2(t, e_1, (t))$ при $t < p$. Неравенства (5.3) принимают вид

$$y_1(t) \leqslant y_1(\tau) + F(t) - F(\tau) + (\tau - t)\,\varepsilon \tag{5.6}$$

$$(\tau - t)\, y_1(t) + y_2(t) \leqslant y_2(\tau) + (F(t) - F(\tau))(p - \tau) + (\tau - t)\,\varepsilon\,(p - \tau)$$

Можно показать, что функции $y_1(t) = \min(F(t) - 1;\ (t - p)\,F^{\cdot}(t))$, $y_2(t) = 0$ в окрестности каждой точки $r \leqslant p$ удовлетворяют неравенствам (5.6) и при всех $t \leqslant p$ удовлетворяют условиям (5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 244—254.
2. *Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е.* О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1965. № 4. С. 3—23.

3. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 5. С. 587—599.
4. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование в случае линейных однотипных объектов второго порядка // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 897—907.
5. *Красовский Н. Н.* Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 177—184.
6. *Пожарицкий Г. К.* К задаче об импульсной встрече движений // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 797—810.
7. *Ухоботов В. И.* Об одной дифференциальной игре с импульсными управлениями // Сб. Ин-та мех. мех.-мат. фак-та МГУ. 1973. № 1. С. 177—183.
8. *Субботина Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 397—406.
9. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с.
10. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.
11. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука. 1980. 319 с.
12. *Боненбласт Х. Ф., Карлин С.* Об одной теореме Вилля // Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз. 1963. С. 489—496.
13. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1967. Т. 175. № 4. С. 764—766.
14. *Ухоботов В. И.* К построению стабильного моста в игре удержания // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 236—240.

Челябинск

Поступила в редакцию
12.III.1987