

## ЛИТЕРАТУРА

1. Браун Дж. Методы Монте-Карло // Современная математика для инженеров. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. С. 275—301.
2. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984. 205 с.
3. Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука. 1980. 174 с.
4. Ворошко П. П., Квитка А. Л., Цыбенко А. С. Применение метода случайных блужданий для решения задач теории упругости // Пробл. прочности. 1973. № 4. С. 53—57.
5. Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К., Ченцов Н. Н. Векторно-стохастические модели некоторых задач математической физики // Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука. 1982. С. 69—82.
6. Сабельфельд К. К. Векторные алгоритмы метода Монте-Карло для решения систем эллиптических уравнений 2-го порядка и уравнений Ламе // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1982. Т. 262. № 5. С. 1076—1080.
7. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1981. 343 с.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука. 1976. 352 с.
9. Чистяков П. В. О решении пространственной задачи теории упругости методом Монте-Карло // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1984. № 6. С. 88—90.
10. Чистяков П. В. О смещенной оценке решения пространственной задачи теории упругости методом Монте-Карло // Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 29. № 1. С. 174—175.
11. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1955. 492 с.
12. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Теория упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1957. 437 с.
13. Чистяков П. В. О решении динамических задач теории упругости методом Монте-Карло // Механика деформируемых сред. М.: Изд-во МГУ. 1985. С. 87—90.

Москва

Поступила в редакцию  
6.III.1986

УДК 532.5

### ОБ ОДНОЙ ОШИБКЕ В ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ БЛИЗКИХ ОБЛАСТЕЙ И В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБТЕКАНИЮ ПРОФИЛЯ

Гонор А. Л.

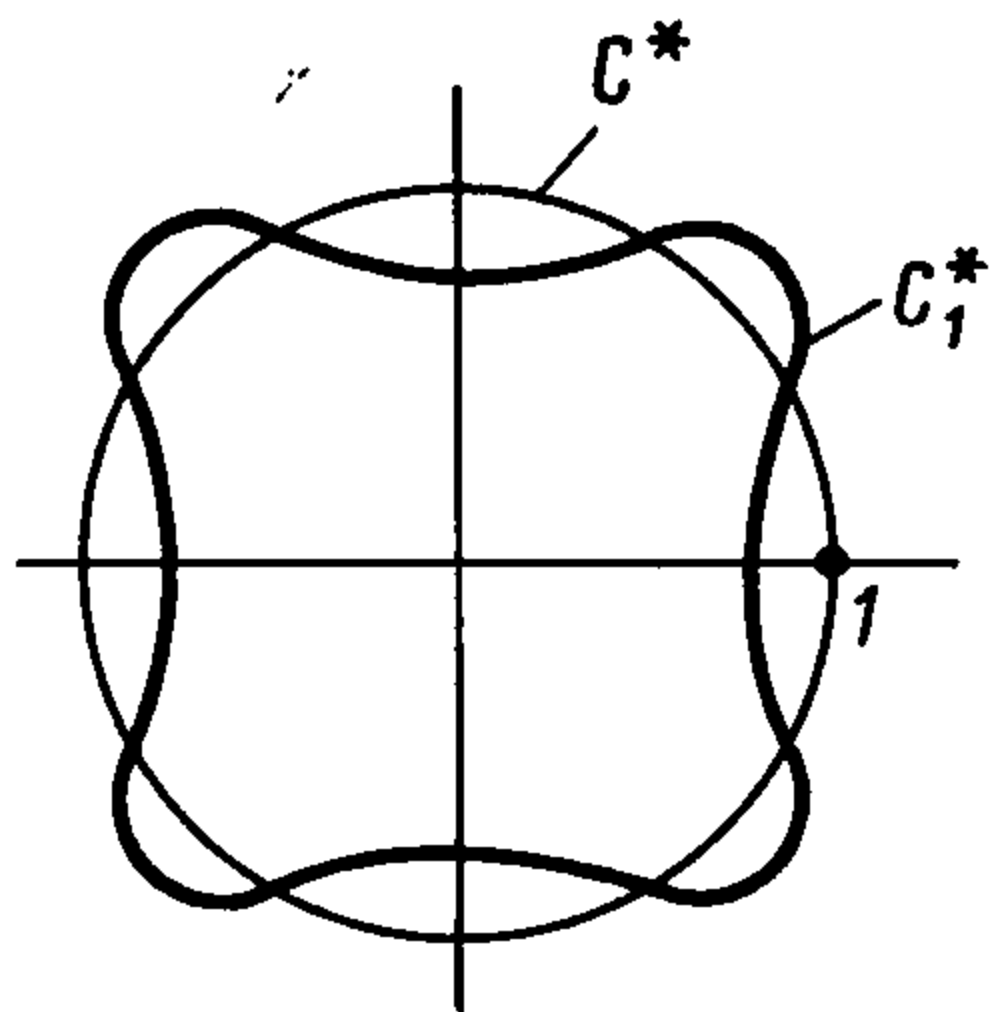
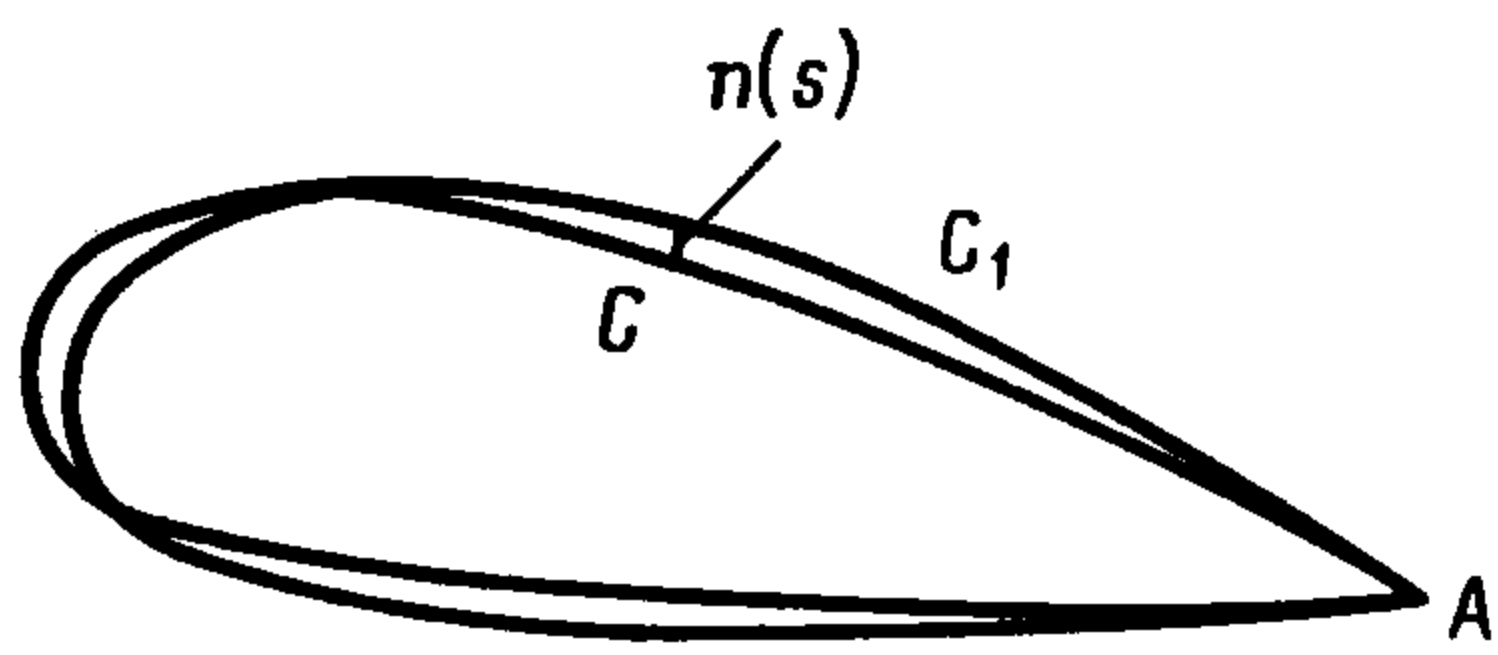
Определяется правильное значение граничной производной при конформном отображении внешности близких областей, которое используется в формуле распределения скорости на контуре, близком к заданному профилю. В указанную формулу внесена поправка и рассмотрены примеры расчета распределения скорости на эллиптическом профиле.

В исследованиях плоских течений жидкости широко распространены формулы пересчета распределения скорости при переходе от данного профиля  $C$  к близкому профилю  $C_1$  (фиг. 1), позволяющие целенаправленно изменять гидродинамические характеристики крыла. Основные результаты по этому вопросу изложены в [1] и во всех изданиях книги [2].

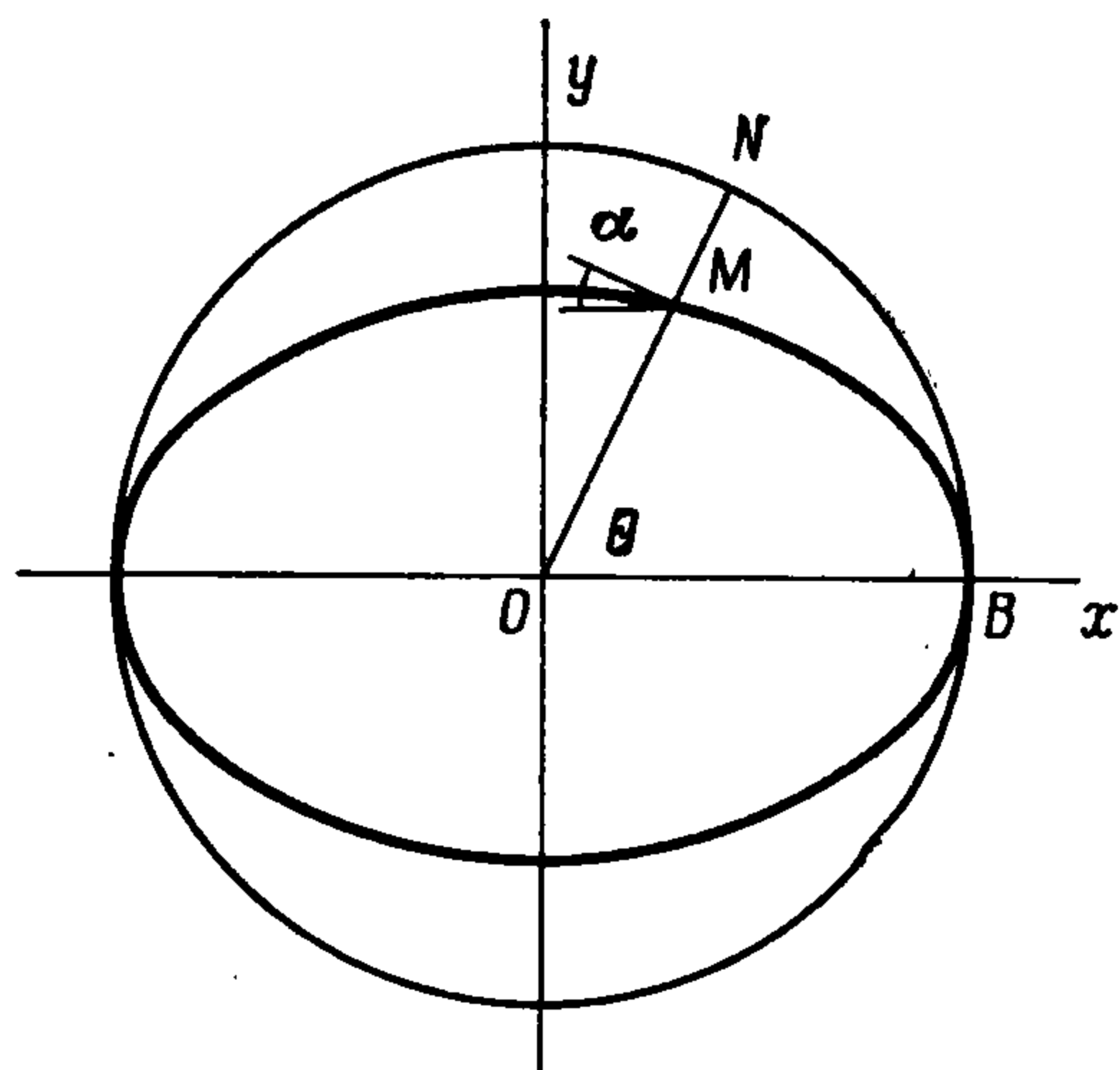
Проведем критический анализ выведенных формул, следуя изложению [2]. Пусть поле течения около профиля  $C$  известно и задано конформное отображение

$$(1) \quad \zeta = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty$$

внешности  $C$  на внешность единичного круга  $|\zeta| > 1$ , из которого, в частности, определяется соответствие точек  $C$  и точек окружности  $\zeta = e^{i\theta}$  ( $s = s(\theta)$ ),  $s$  — длина дуги



Фиг. 1



Фиг. 2

вдоль контура  $C$ ). При отображении (1) линия  $C_1$  перейдет в линию  $C_1^*$ , полярное уравнение которой с точностью до членов первого порядка малости будет иметь вид

$$(2) \quad \rho = 1 + n[s(\theta)] \frac{d\theta}{ds} = 1 + \delta(\theta)$$

где  $n(s)$  — взятый с определенным знаком отрезок нормали к контуру  $C$  (фиг. 1). Отображение внешности  $C_1$  на внешность единичного круга  $|w| > 1$  представляется функцией

$$(3) \quad w = F(z, C_1) = F(\zeta, C_1^*), \quad \zeta = F(z, C)$$

где  $w = F(\zeta, C_1^*)$  — отображение внешности  $C_1^*$  на  $|w| > 1$ . Отсюда по формуле дифференцирования сложных функций

$$(4) \quad |F'(z, C_1)| = |F'(\zeta, C_1^*)| |F'(z, C)|$$

В правой части величина  $|F'(z, C)|$  известна, а  $|F'(\zeta, C_1^*)|$  определяется из теории конформных отображений близких областей ([2], п. 60) выражением

$$(5) \quad |F'(\zeta, C_1^*)| \approx 1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\delta(t) - \delta(\theta)) \sin^{-2} \frac{t-\theta}{2} dt$$

Отображение (4) сводит задачу обтекания профиля  $C_1$  к задаче обтекания круглого цилиндра, поэтому величина скорости на контуре  $C_1$  определяется формулой ([2], п. 63, формула (10))

$$(6) \quad |v_1| = |v| \left\{ 1 + \delta(\theta) + \frac{\cos \theta \Delta\theta - \cos \theta_0 \Delta\theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\delta(t) - \delta(\theta)) \sin^{-2} \frac{t-\theta}{2} dt \right\} \\ \Delta\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} \delta(t) dt, \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0-t}{2} \delta(t) dt$$

Здесь  $\delta(\theta)$  задается выражением (2),  $v$  — распределение скорости на контуре,  $C$ ,  $\theta_0$  — аргумент образа точки  $A$  (фиг. 1).

Формула (6) связывает скорости в точках контуров  $C_1$  и  $C$ , находящихся на одной нормали к  $C$ . Ниже показывается, что выражения (5), (6), а также их вывод основаны на ошибочном утверждении.

Предварительно сделаем тестовую проверку формулы (6). Выберем профиль  $C$  в форме окружности единичного радиуса, за близкий профиль  $C_1$  возьмем эллипс с полуосями  $a = 1$ ,  $b = 1 - \varepsilon$  (фиг. 2).

Функция, характеризующая отклонение эллипса от окружности вдоль нормали к последней, есть  $\delta(\theta) = -\varepsilon \sin^2 \theta$ . Подставляя ее в формулу (6), в которой скорость

набегающего потока принимается за единицу, и учитывая, что на окружности  $|v| = 2 \sin \theta$ , получим

$$(7) \quad |v_1| = 2 |\sin \theta| [1 - \frac{1}{2}\epsilon (1 - 4 \cos 2\theta)]$$

С другой стороны, распределение скорости на профиле в форме эллипса можно найти по формуле «косинуса» [3]

$$(8) \quad |v_1| = (2 - \epsilon) \cos \alpha$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной, проведенной к эллипсу  $C_1$ . Учитывая, что  $\cos \alpha = \sin \theta (1 + 2\epsilon \cos^2 \theta) + O(\epsilon^2)$ , находим

$$(9) \quad |v| = 2 |\sin \theta| [1 + \frac{1}{2}\epsilon (1 + 2 \cos 2\theta)]$$

Выражение (7) не совпадает с (9) и заведомо дает неверное значение максимальной скорости на эллипсе  $v_{\max} = 2 - 5\epsilon$ , тогда как из (8) при  $\alpha = 0$  (а также из (9)) имеем  $v_{\max} = 2 - \epsilon$ , т. е. поправка за счет деформации контура отличается в пять раз.

Перейдем к рассмотрению вывода формул (5) и (6). Анализ показывает, что формула типа (5), полученная при отображении внутренней области, ограниченной контуром  $\rho = 1 - \delta(\theta)$ , близким к единичному кругу, на внутренность круга, правильная ([2], п. 60, формула (20)). В случае отображения внешности близких к кругу областей на внешность единичного круга предлагается [2] применять эту же формулу при условии, что функция  $\delta(\theta)$  определяется теперь из видоизмененного уравнения контура

$$(10) \quad \rho = 1 + \delta(\theta)$$

Обоснованием такого подхода является утверждение, что формула (3) ([2], п. 60), на которой основаны все дальнейшие соотношения, справедлива также и для отображения внешности единичного круга с выброшенной луночкой на внешность единичного круга.

Действительно, формула (3) и ряд последующих формул при учете (10) остаются справедливыми при отображении внешних областей, однако формула (18) (п. 60) в этом случае становится неправильной (во втором слагаемом нужно знак изменить на противоположный). Устранение ошибки приводит к изменению знака во втором слагаемом формул (5) и (6).

В книге [2] и последующих ее изданиях нужно исправить формулы (6), (7), (10) и (12) в п. 63, а также текст п. 60 на с. 310—311.

В справедливости сказанного можно убедиться и не проводя анализа всех соотношений п. 60. Пусть в плоскости  $z$  задан контур  $C$  (с уравнением  $r = 1 - \delta(\varphi)$ ), близкий к окружности. Конформное отображение на круг близкой к кругу области зададим функцией  $w = f(z, C)$ . Модуль производной в точках границы определяется ([2], п. 60, формула (20)) формулой

$$(11) \quad |f'(z, C)| \simeq 1 + \delta(\varphi) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\delta(t) - \delta(\theta)) \sin^{-2} \frac{t-\theta}{2} dt$$

Для получения вместо (11) соответствующей производной отображения внешних областей применим известные преобразования  $z = 1/\zeta$  и  $w = 1/\omega$ . Функция  $\omega = \omega(\zeta, C) = 1/w(\zeta^{-1}, C)$  задает отображение внешности контура  $C$ , заданного в плоскости  $\zeta$  уравнением  $\rho = 1 + \delta(\varphi)$ , на внешность единичного круга в плоскости  $\omega$ . По формуле дифференцирования сложной функции находим

$$(12) \quad \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right| = \frac{1}{|w|^2} \left| \frac{dw}{dz} \right| \frac{1}{|\zeta|^2} \quad \left( z = \frac{1}{\zeta} \right)$$

В точках границы  $|w| = 1$  величина  $|dw/dz| = |f'(z, C)|$  определяется формулой (11) (или (20), п. 60), в которой  $\delta(\varphi)$  находится из уравнения  $r = 1 - \delta(\varphi)$ ; наконец, третий множитель в (12), будучи разложенным по степеням  $\delta(\varphi)$ , примет значение  $1/|\zeta|^2 = 1 - 2\delta(\varphi)$ .

В результате из выражения (5) и выражения в фигурных скобках в (6) (соответственно в формуле (10), п. 63 [2]) нужно вычесть  $2\delta(\theta)$ , что приводит в указанных формулах к изменению знака второго слагаемого на противоположный.

В заключение внесем исправление в разобранный выше тестовый пример. Если величину  $2\delta(\theta) = -2\varepsilon \sin^2 \theta$  вычесть из выражения в квадратных скобках в (7), то получим выражение, совпадающее с формулой (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаурентьев М. А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М., Л.: Гостехиздат. 1946. 159 с.
2. *Лаурентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.; Л.: Гостехтеориздат. 1951. 607 с.
3. *Гонор А. Л.* Определение поля течения на поверхности некоторых тел в потоке несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 2. С. 187—190.

Москва

Поступила в редакцию  
19.1.1987