

2. Купрадзе В. Д. Методы теории потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз. 1963. 472 с.
3. Перлин П. И. Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости // ПММ. 1976. Т. 40. № 2. С. 366—371.
4. Odqvist F. K. G. Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten // Math. Z. 1930. В. 32. Н. 3. S. 329—357.
5. Мухелишвили Н. И. О решении основных граничных задач теории ньютонова потенциала // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 4. С. 3—26.
6. Купрадзе В. Д. К решению задачи Дирихле для многосвязной области // Сообщ. АН ГрузССР. 1940. Т. 1. № 8. С. 569—571.
7. Шерман Д. И. Некоторое замечание к задаче Дирихле // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1940. Т. 29. № 4. С. 286—287.
8. Шерман Д. И. Пространственная статическая задача теории упругости с заданными смещениями на границе // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 341—360.
9. Бурчуладзе Т. В. Граничная задача теории упругости для многосвязных областей // Тр. Тбил. ун-та. 1968. Т. 129. С. 57—78.
10. Перлин П. И., Новиков А. В., Ступак С. Ф. Применение метода потенциалов к решению пространственных задач теории упругости для несжимаемой среды // Статика сооружений. Киев: Киев. инж.-строит. ин-т. 1978. С. 156—159.

Москва

Поступила в редакцию  
11.1.1987

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Победря Б. Е., Чистяков П. В.

Рассматриваются два варианта применения метода Монте-Карло к задачам теории упругости: с использованием процесса блуждания по сферам для решения уравнений Ламе и с использованием представления искомой величины в виде многократных интегралов (например, при решении задачи Коши для волнового уравнения теории упругости в неограниченном пространстве).

Процесс блуждания по сферам был предложен [1] для решения уравнения Лапласа и в дальнейшем был применен к более сложным задачам (анализ работ на эту тему можно найти в [2, 3]). Рассматривалось решение краевой задачи для уравнений Ламе в плоском случае [4], говорилось о возможности применения метода Монте-Карло к задачам об изгибе пластин [3, 5]<sup>1</sup>. Приведены [6] теоремы, позволяющие заменить исходную систему эллиптических уравнений системой интегральных уравнений, для решения которой удобно использовать метод Монте-Карло. Применительно к уравнениям Ламе интегральное представление было известно ранее [7].

В отдельных работах, посвященных решению дифференциальных уравнений в частных производных, возможность решения уравнений Ламе лишь упоминается. Однако даже в плоском случае приводились только отдельные примеры, вопросам обоснования метода (несмещенность используемой оценки решения, точности полученной оценки и т. д.) уделялось мало внимания. Решение конкретных пространственных задач теории упругости на ЭВМ авторам неизвестно.

1. Несмещенная оценка решения краевых задач для уравнений Ламе. Рассмотрим решение первой краевой задачи для уравнений Ламе в области  $G \subset R^3$  ( $\Gamma$  — граница области)

$$(1.1) \quad (1 - 2\nu) \nabla^2 u(P) + \text{grad div } u(P) = 0, \quad u|_{\Gamma} = \varphi$$

Для вектор-функции  $u$ , удовлетворяющей уравнению Ламе, верна теорема о среднем [7].

<sup>1</sup> Дальнейшее развитие методов решения задач об изгибе пластин можно найти в работе: Иванов В. М., Кульчицкий О. Ю. Разработка и исследование эффективных методов блуждания по окружностям для решения задач изгиба пластин и плоской задачи теории упругости. Ленинград, 1983. — 24 с. Деп. в ВИНТИ 4.04.83, № 3270-83.

Для любой сферы  $S(P, R) \subset G$  с центром в точке  $P$  и радиусом  $R$  имеет место равенство

$$(1.2) \quad u(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(P, R)} A(P, Q) u(Q) dS(Q)$$

где  $A(P, Q)$  — матрица с элементами

$$(1.3) \quad A_{ij} = A_{ij}(\varphi, \theta) = \frac{3}{8 - 12\nu} (5x_i x_j + (1 - 4\nu) \delta_{ij})$$

$$x_1 = \sin \varphi \sin \theta, \quad x_2 = \cos \varphi \sin \theta, \quad x_3 = \cos \theta$$

$\varphi$  и  $\theta$  — сферические координаты точки  $Q$  на сфере  $S(P, R)$ .

Для решения задачи (1.1) методом Монте-Карло используется интегральное соотношение (1.2) и процесс блуждания по сферам.

*Теорема.* Пусть  $P$  — произвольная точка области  $G$  и случайная величина  $u_\mu(P)$  определяется на траектории  $P, Q_1, \dots, Q_\mu$  процесса блуждания по сферам до выхода в  $\varepsilon$ -окрестность границы  $\Gamma_\varepsilon$  формулой

$$(1.4) \quad u_\mu(P) = \begin{cases} A(P, Q_1) \dots A(Q_{\mu-1}, Q_\mu) u(Q_\mu), & P \in G \setminus \Gamma_\varepsilon \\ u(P), & P \in \Gamma_\varepsilon \end{cases}$$

где  $A(Q_{k-1}, Q_k)$  — матрица с элементами  $A_{ij}(\varphi_k, \theta_k)$  вида (1.3),  $\varphi_k$  и  $\theta_k$  — сферические координаты точки  $Q_k$ , равномерно распределенной на сфере с центром  $Q_{k-1}$ ;  $\varphi_k, \theta_k$  ( $k = 1, \dots, \mu$ ) — независимые случайные величины,  $Q_\mu \in \Gamma_\varepsilon$  и  $Q_k \notin \Gamma_\varepsilon$  для любого  $k < \mu$ .

Тогда в случае конечности математического ожидания

$$(1.5) \quad M(u_\mu(P)) = u(P)$$

*Доказательство.* Обозначим  $f(P) = M(u_\mu(P))$ .

При  $P \in \Gamma_\varepsilon$  очевидно, что  $f(P) = u(P)$ .

Пусть теперь  $P \in G \setminus \Gamma_\varepsilon$ . По формуле полного математического ожидания

$$f(P) = M[A(P, Q_1) M(u_\mu(Q_1) | Q_1)] = M[A(P, Q_1) f(Q_1)]$$

Отсюда, используя равенство

$$M[A(P, Q_1) f(Q_1)] = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(P, R)} A(P, Q_1) f(Q_1) dS(Q_1)$$

получим, что функция  $f(P)$  при любом  $P \in G \setminus \Gamma_\varepsilon$  удовлетворяет интегральному соотношению (1.2).

Решение (1.5) можно записать в более удобном виде

$$(1.6) \quad u(P) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu = k\} M(u_\mu(P) | \mu = k)$$

где  $P\{\mu = k\}$  — вероятность появления траектории длины  $k$ , а  $M(u_\mu(P) | \mu = k)$  — условное математическое ожидание при условии, что длина траектории равна  $k$ .

Предположим, что закон распределения случайной величины  $\xi$  зависит от параметра  $a$ . Любая функция от выборочных значений  $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N)$ , используемая в качестве приближения к  $a$ , называется оценкой  $a$ . Если  $M\varphi = a$ , то оценка  $\varphi$  называется несмещенной. Обычно в качестве оценки  $a = M\xi$  используется среднее арифметическое. Состоятельность следует из закона больших чисел [8].

Если  $u_{\mu(1)}^{(1)}, \dots, u_{\mu(N)}^{(N)}$  — независимые реализации случайной величины  $u_\mu(P)$ , то в условиях теоремы оценка

$$(1.7) \quad \bar{u}(P) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{\mu(i)}^{(i)}(P)$$

является несмещенной и состоятельной оценкой  $u(P)$ . Однако при использовании оценки (1.7) сходимость  $\bar{u}(P)$  к решению  $u(P)$  при  $N \rightarrow \infty$  оказывается плохой вследствие существенного влияния роста дисперсии элементов произведения случайных матриц, входящих в (1.4) [9, 10]. Эта дисперсия для элементов произведения  $t$  независимых случайных матриц  $A(\varphi_i, \theta_i)$  ( $i = 1, \dots, t$ ) вида (1.3) с увеличением  $t$  растет как экспонента с основанием, существенно большим единицы.

Оказалось, что дисперсия элементов произведения зависимых матриц  $A$ , входящих в (1.4), при условии  $\mu = t$  мало отличается от (1.8) при  $t > 4$ . Вероятности  $P\{\mu = k\}$ , входящие в (1.6), быстро убывают с увеличением  $k$ .

2. Две смещенные оценки решения уравнений Ламе. Ниже приведены две оценки решения задачи (1.1). Одна из них связана с отбрасыванием «длинных» траекторий ( $DT$ ), а другая — с заменой матриц  $A$  в  $DT$  на единичную. Первая оценка определяется формулой [9]

$$(2.1) \quad \bar{u}_n(P) = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N} \left( \frac{1}{N_k} \sum_{i:\mu(i)=k} u_k^{(i)}(P) \right)$$

где  $N_k$  — число реализаций длины  $k$ ,  $\mu(i)$  — длина траектории в  $i$ -й реализации и позволяет вычислять первые  $n$  слагаемых в (1.6). Слагаемые с номером  $k \geq n$  полагаются равными нулю. Это вносит систематическую ошибку, равную остатку ряда (1.6), величина которой уменьшается с ростом  $n$ , в то время как статистическая ошибка увеличивается за счет появления слагаемых, соответствующих  $DT$ .

На основе решения многих задач получены два дополняющих одно другое правила выбора  $n$  в формуле (2.1): 1) число слагаемых ряда (1.6), включенных в сумму (2.1), увеличивается до тех пор, пока средняя квадратичная ошибка сравнивается по порядку с величиной слагаемого; 2) выбор  $n$  по близким задачам с известным решением.

Использование оценки (2.1) дает существенное увеличение точности полученного решения по сравнению с обычной оценкой (1.7) без отбрасывания  $DT$ .

Вторая оценка решения  $u(P)$  определяется формулой

$$(2.2) \quad \bar{v}_t(P) = \sum_{k=1}^t \frac{N_k}{N} \left( \frac{1}{N_k} \sum_{i:\mu(i)=k} u_k^{(i)}(P) \right) + \sum_{k=t+1}^{\infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i:\mu(i)=k} u(Q_{\mu(i)}) \right)$$

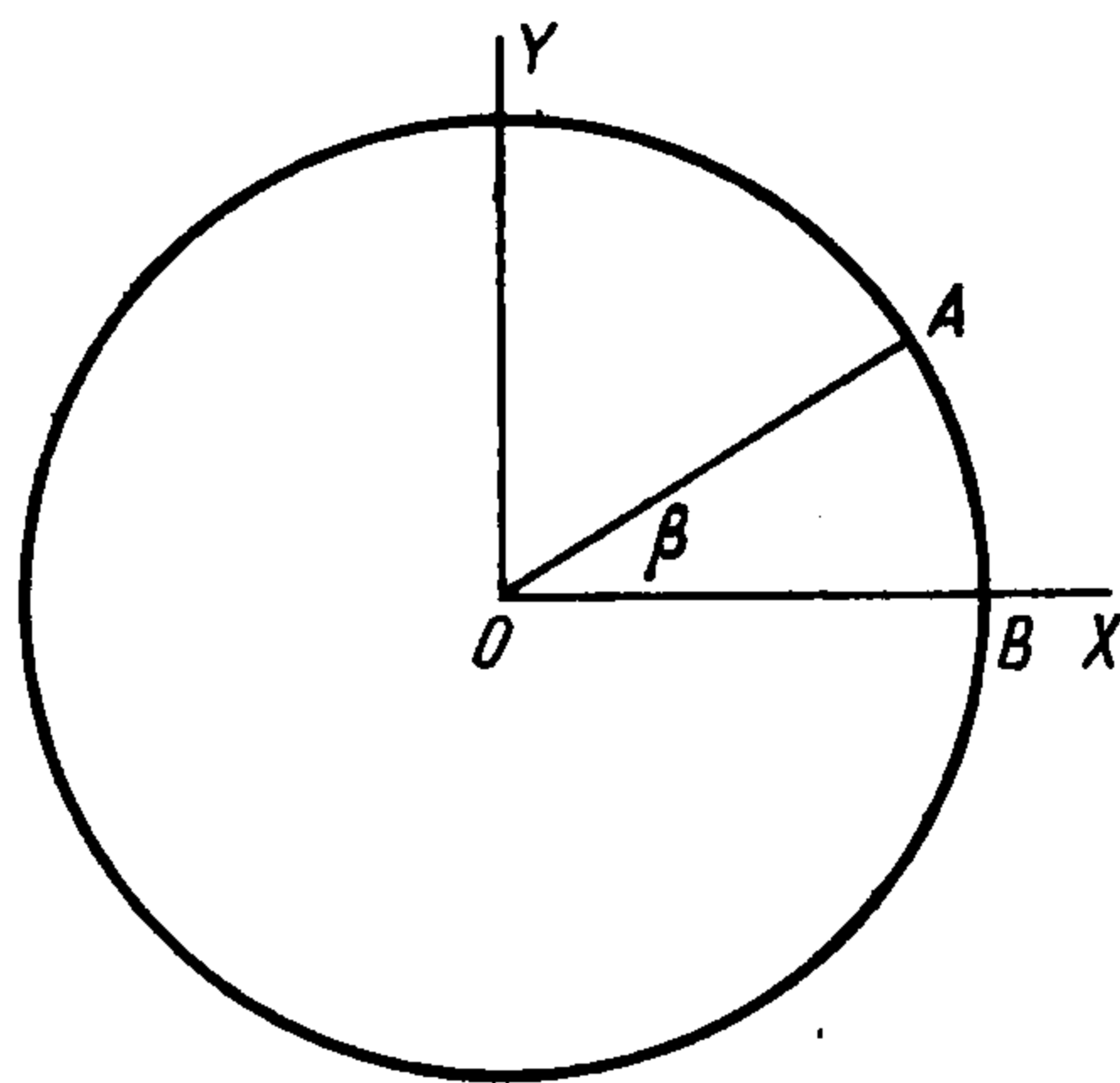
Все реализации случайной величины  $u_{\mu}(P)$ , соответствующие траекториям длиной  $k \leq t$ , определяются по формуле (1.4), а при  $k > t$  в (1.4) произведение матриц  $A$  заменяется на единичную матрицу. На основании численных результатов для различных областей, начальных точек, различных  $\varepsilon$  и  $\nu$  выяснилось, что уже при  $\mu = 5$  произведение матриц  $A$  в (1.4) достаточно близко к единичной матрице.

Для примера рассмотрим решение краевой задачи (1.1) для ряда областей  $G$ . В произвольной точке  $P \in G \setminus \Gamma_g$  определялось значение вектора  $u(P)$ . В качестве граничных условий рассматривалась функция  $\varphi(P)$ , обеспечивающая в  $G$  поле перемещений

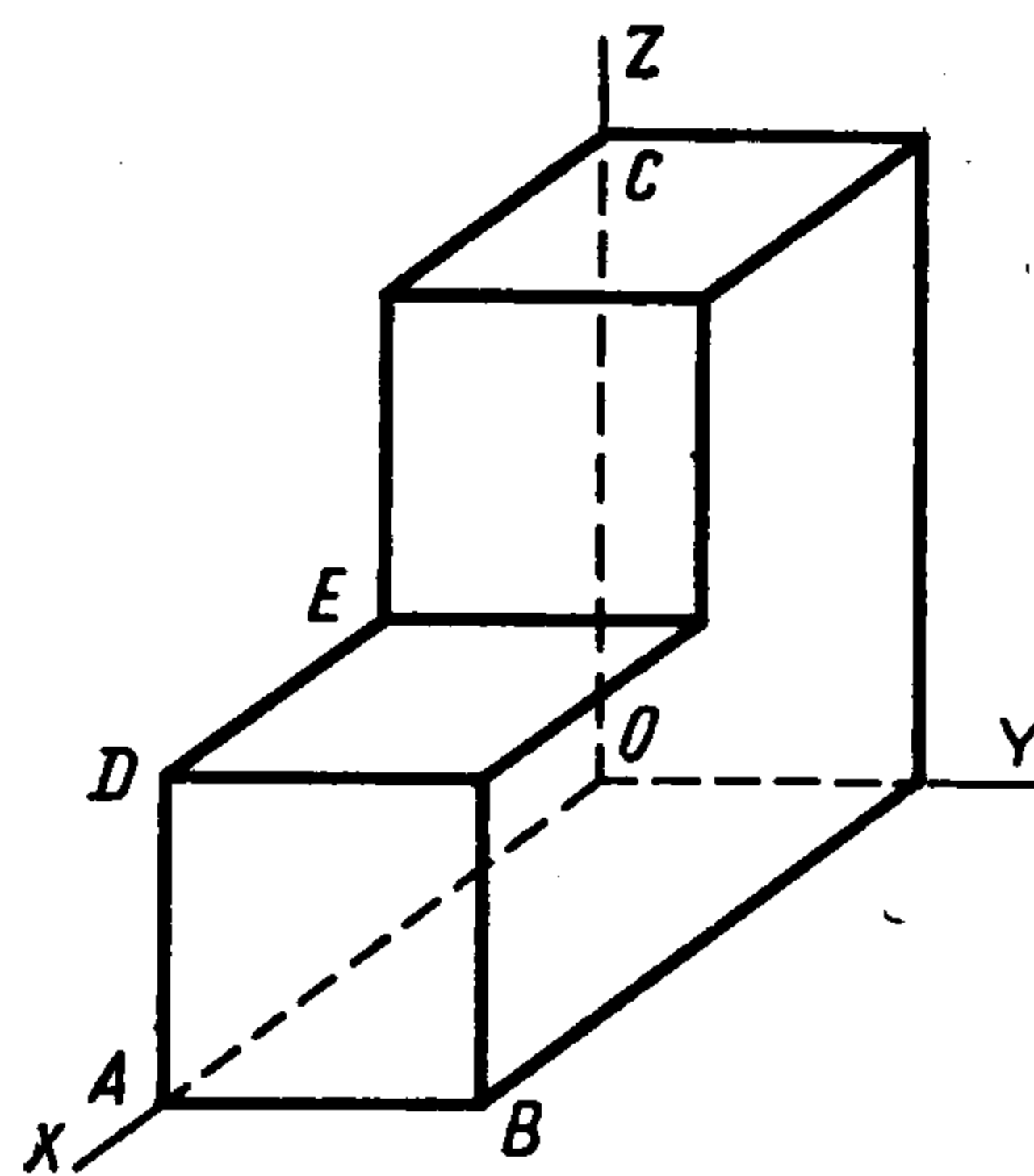
$$(2.3) \quad \begin{aligned} u(P) &= (u_x, u_y, u_z) \\ u_q &= \frac{\bar{q}\bar{z}}{r^3} - (1-2\nu) \frac{\bar{q}}{r(r+\bar{z})}, \quad q = x, y \\ u_z &= \frac{\bar{z}^2}{r^3} + (1-\nu) \frac{2}{r}; \quad r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \\ \bar{x} &= x - a, \quad \bar{y} = y - b, \quad \bar{z} = z + c \end{aligned}$$

Вектор перемещений (2.3) является решением задачи Бусинеска о действии на упругое полупространство  $z \geq -c$  сосредоточенной силы в точке  $(a, b, -c)$  в направлении оси  $OZ$ .

$P_j$	$P_1$			$P_2$		
	1	2	3	1	2	3
$\varepsilon = 0,1$						
$(\bar{u}_n)_i \cdot 10^3$	-39	88	1391	132	32	1512
$\sqrt{D}(\bar{u}_n)_i \cdot 10^3$	90	110	120	105	123	132
$(\bar{v}_t)_i \cdot 10^3$	-65	-15	1563	217	2	1795
$\sqrt{D}(\bar{v}_t)_i \cdot 10^3$	31	32	36	38	35	42
$\varepsilon = 0,01$						
$(\bar{v}_t)_i \cdot 10^3$	-107	1	1606	110	14	1831
$\sqrt{D}(\bar{v}_t)_i \cdot 10^3$	20	21	26	13	13	28
$u_i^e \cdot 10^3$	-110	0	1632	113	0	1911



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве области  $G_1$  был рассмотрен шар радиуса  $R = 1$ , с центром в начале координат с вырезанным двугранным углом, перпендикулярным сечению  $XOY$  (фиг. 1).  $AOB$  — пересечение двугранного угла с плоскостью  $XOY$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 0,1$ . В качестве области  $G_2$  рассматривалась область, составленная из параллелепипеда и единичного куба (фиг. 2),  $|AB| = |AD| = |DE| = 1$ ;  $|AO| = |OC| = 2$ .

В таблице приведены оценки  $\bar{u}_n$  и  $V_t$  известного решения (2.3) в точках  $P_1 (-0,4; 0; 0) \in G_1$  и  $P_2 (0,8; 0,5; 0,8) \in G_2$ , подсчитанные по формулам (2.1) и (2.2) соответственно. В (2.3) выбрано  $a = b = 0$ ,  $c = 1,5$  для  $P_1$  и  $a = b = c = 0,5$  для  $P_2$ . Число реализаций  $N = 20\,000$ ,  $n = 9$ ,  $t = 5$ ,  $v = 0,2$ . Приведены также оценки дисперсий  $D(\bar{u}_n)_i$ ,  $D(\bar{v}_t)_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), значения  $\varepsilon$  и точное значение  $u_i^e$ .

По результатам можно сделать вывод, что оценка (2.2) дает существенное улучшение сходимости по сравнению с оценкой (2.1).

Предложенный выше алгоритм использовался для нахождения вектора  $u(P)$  в задаче (1.1). Построим алгоритм для определения производных  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$  в задаче (1.1). Для вектора

$$\Phi(P) = (u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, u_{2,1}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3})$$

можно получить интегральное соотношение

$$(2.4) \quad \Phi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(P, R)} B(P, Q) u(Q) dS(Q)$$

где  $B(P, Q)$  — матрица размером  $9 \times 3$ , элементы которой определяются из решения первой краевой задачи теории упругости для шара [11].

Пусть  $P$  — произвольная точка области  $G \setminus \Gamma_\varepsilon$ . Значение  $\Phi(P)$  определяется по реализациям случайной величины

$$\Phi_\mu(P) = B(P, Q_1) A(Q_1, Q_2) \dots A(Q_{\mu-1}, Q_\mu) u(Q_\mu)$$

где  $B(P, Q_1)$  — матрица, входящая в интегральное соотношение (2.4), а  $A(Q_{i-1}, Q_i)$  — матрица вида (1.3).

### 3. Использование интегральных представлений решения волновых уравнений.

В теории упругости решение волнового уравнения в  $R^3$  при заданных начальных условиях

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 - b^2 \nabla^2 u - (a^2 - b^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} &= K \\ u(x, y, z, 0) &= f(x, y, z), \quad \partial u / \partial t|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \end{aligned}$$

можно представить в виде суммы интегралов до пятикратного включительно [12], а для их вычисления воспользоваться методом Монте-Карло [13].

Предложенным методом решена тестовая задача (3.1) со следующими входными данными:

$$\begin{aligned} K &= A(a^2 - 1, b^2 - 1) \cos t, \quad f = A(1, 1), \quad \varphi = 0 \\ A(\alpha, \beta) &= (\alpha \sin x + \beta \cos y, \quad \alpha \sin y + \beta \cos z, \quad \alpha \sin z + \beta \cos x) \end{aligned}$$

В этом случае решением задачи является  $u(x, y, z, t) = A(1, 1) \cos t$ . Для решения в точке  $x = \pi/2$ ,  $y = \pi/4$ ,  $z = \pi/8$  при  $N = 50\,000$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $t = 1$  получена оценка  $\bar{u} = (0,93; 0,91; 0,22)$  (точное решение  $u = (0,92; 0,88; 0,21)$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Браун Дж. Методы Монте-Карло // Современная математика для инженеров. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. С. 275—301.
2. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984. 205 с.
3. Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука. 1980. 174 с.
4. Ворошко П. П., Квитка А. Л., Цыбенко А. С. Применение метода случайных блужданий для решения задач теории упругости // Пробл. прочности. 1973. № 4. С. 53—57.
5. Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К., Ченцов Н. Н. Векторно-стохастические модели некоторых задач математической физики // Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука. 1982. С. 69—82.
6. Сабельфельд К. К. Векторные алгоритмы метода Монте-Карло для решения систем эллиптических уравнений 2-го порядка и уравнений Ламе // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1982. Т. 262. № 5. С. 1076—1080.
7. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1981. 343 с.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука. 1976. 352 с.
9. Чистяков П. В. О решении пространственной задачи теории упругости методом Монте-Карло // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1984. № 6. С. 88—90.
10. Чистяков П. В. О смещенной оценке решения пространственной задачи теории упругости методом Монте-Карло // Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 29. № 1. С. 174—175.
11. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1955. 492 с.
12. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Теория упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1957. 437 с.
13. Чистяков П. В. О решении динамических задач теории упругости методом Монте-Карло // Механика деформируемых сред. М.: Изд-во МГУ. 1985. С. 87—90.

Москва

Поступила в редакцию  
6.III.1986

УДК 532.5

### ОБ ОДНОЙ ОШИБКЕ В ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ БЛИЗКИХ ОБЛАСТЕЙ И В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБТЕКАНИЮ ПРОФИЛЯ

Гонор А. Л.

Определяется правильное значение граничной производной при конформном отображении внешности близких областей, которое используется в формуле распределения скорости на контуре, близком к заданному профилю. В указанную формулу внесена поправка и рассмотрены примеры расчета распределения скорости на эллиптическом профиле.

В исследованиях плоских течений жидкости широко распространены формулы пересчета распределения скорости при переходе от данного профиля  $C$  к близкому профилю  $C_1$  (фиг. 1), позволяющие целенаправленно изменять гидродинамические характеристики крыла. Основные результаты по этому вопросу изложены в [1] и во всех изданиях книги [2].

Проведем критический анализ выведенных формул, следуя изложению [2]. Пусть поле течения около профиля  $C$  известно и задано конформное отображение

$$(1) \quad \zeta = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty$$

внешности  $C$  на внешность единичного круга  $|\zeta| > 1$ , из которого, в частности, определяется соответствие точек  $C$  и точек окружности  $\zeta = e^{i\theta}$  ( $s = s(\theta)$ ),  $s$  — длина дуги