

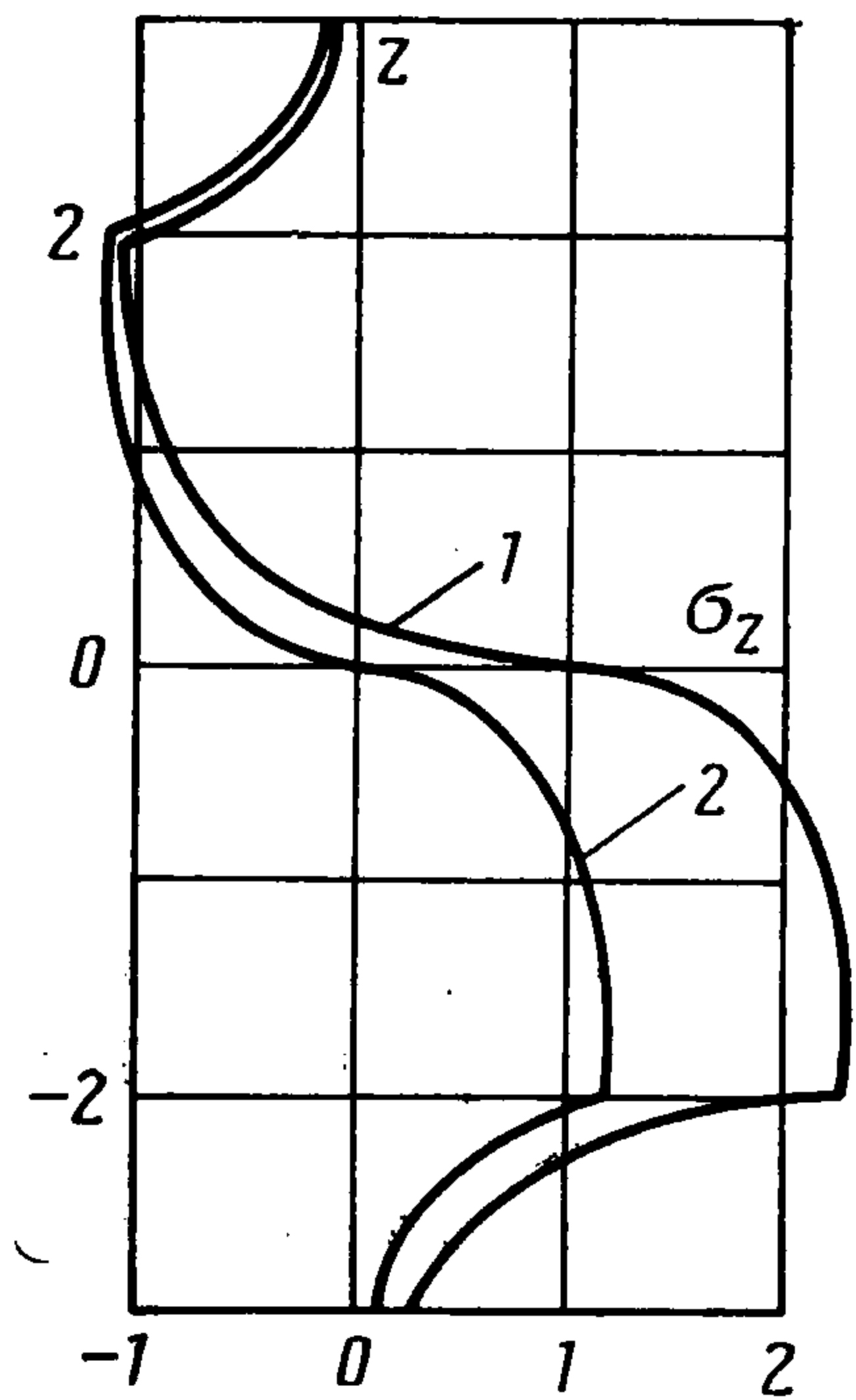
и деформированное состояние среды, как установлено ранее, индифферентно к поведению коэффициента Пуассона вне данного нагретого объема, поэтому по аналогии с известными выражениями для однородной среды [1] можно записать

$$\chi_j = \begin{cases} 1/2 A_j \Theta_j (a_j^2 - 1/3 R_j^2), & x \in V_j \\ 1/3 A_j \Theta_j a_j^3 / R_j, & x \in \bar{V}_j \end{cases}$$

$$A_j = \frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \alpha, \quad R_j = \{x_1^2 + x_2^2 + [x_3 - (-1)^{j-1} a_j]^2\}^{1/2}$$

$j = 1, 2$

На фигуре показаны распределения относительного нормального напряжения $\sigma_z = 3\sigma_{33\theta}/(4\mu\alpha\theta)$ вдоль оси $z = x_3/a$, проходящей через центры сферических объемов, при $\Theta_1 = -\Theta_2 = \Theta = \text{const}$, $a_1 = a_2 = a$ для неоднородной среды ($\nu_1 = 0, 1$, $\nu_2 = 0, 4$, кривая 1) и однородной ($\nu_1 = \nu_2 = 0, 1$, кривая 2). Видно существенное влияние неоднородности коэффициента Пуассона на распределение температурных напряжений.



ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
2. Маковенко С. Я. Об одном методе решения задач неоднородной теории упругости в деформациях // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 1. С. 40—45.
3. Youngdahl С. К. On the completeness of a set of stress functions appropriate to the solution of elasticity problems in general cylindrical coordinates // Intern. J. End. Sci. 1969. V. 7. No. 1. P. 61—79.
4. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир. 1978. 518 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1976. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1987

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА РОБЕНА К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Перлин П. И.

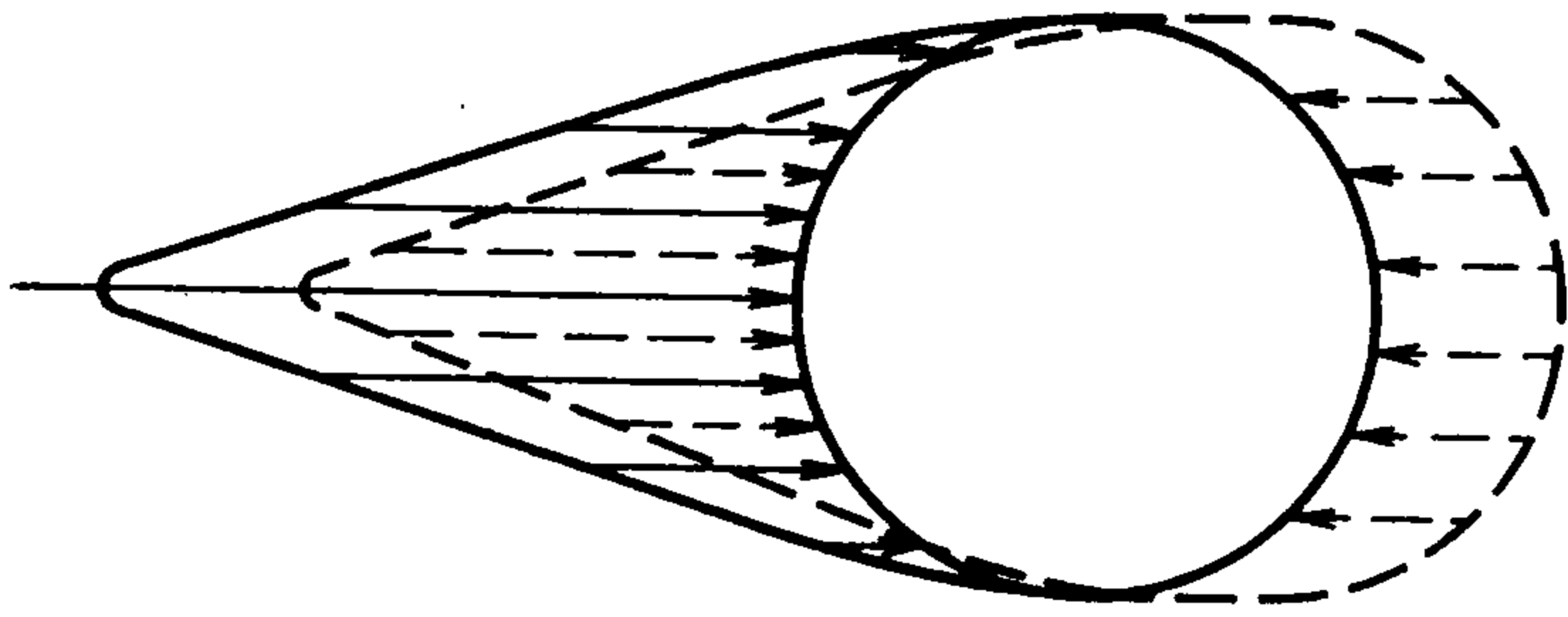
Принцип Робена применяется к решению последовательными приближениями интегральных уравнений (ИУ), соответствующих основным пространственным задачам теории упругости. Устанавливается, что возможная расходимость процесса последовательных приближений, обусловленная погрешностью расчетных схем, не приводит к расходимости решения в напряжениях. Показано, что применение метода последовательных приближений к ИУ второй внутренней задачи при несоответствии краевым условиям дает сходящееся в напряжениях решение, соответствующее определенным самоуравновешенным краевым условиям. Предлагается метод решения краевых задач, когда соответствующие ИУ расположены на спектре, а условия их разрешимости не соблюдаются.

Рассмотрим ИУ Фредгольма второго рода

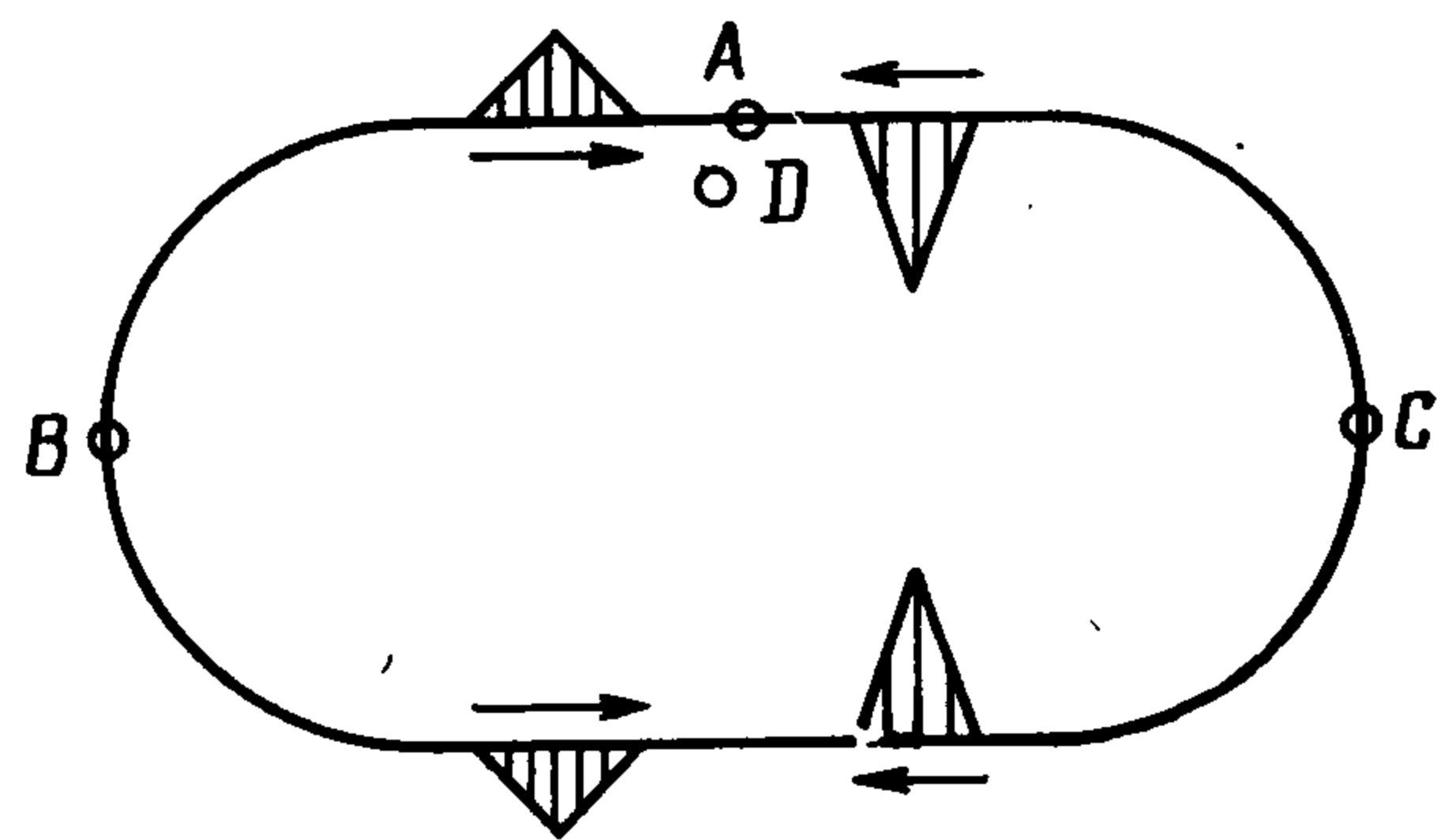
$$(1) \quad \varphi(x) - \lambda \int k(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

Пусть $\lambda = 1$ — наименьшее по модулю собственное значение. Будем решать ИУ (1) последовательными приближениями, для чего представим функцию $\varphi(x)$ в виде ряда

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда приходим к рекуррентным соотношениям

$$(3) \quad \varphi_n(x) = \int k(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \varphi_0(x) = f(x)$$

Принцип Робена [1] заключается в утверждении, что существуют постоянные $\tau < 1$, a и целое N , такие, что при $n > N$ и $m > n$

$$(4) \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < a\tau^n$$

Из (4) вытекает, что $\varphi_n(x)$ равномерно стремятся к пределу при $n \rightarrow \infty$, причем предел (обозначим его $\varphi_1^*(x)$) — собственная функция ИУ (1) в точке $\lambda = 1$.

Если правая часть (1) ортогональна собственным функциям союзного уравнения, то рассматриваемый предел равен нулю и ряд (2) приводит к построению решения ИУ.

Аналогичные утверждения имеют место, когда наименьшим по модулю собственным значением будет $\lambda = -1$. Тогда рассматривается предел

$$(5) \quad \lim (-1)^n \varphi_n(x) = \varphi_{-1}^*(x)$$

причем $\varphi_{-1}^*(x)$ — собственная функция в точке $\lambda = -1$.

Выразим приведенные утверждения в иной форме. Пусть N — число удерживаемых в (2) слагаемых. Тогда для суммы получаем

$$(6) \quad \varphi^N(x) = \sum_{n=0}^N \lambda^n \varphi_n(x) = \Phi(x) + \varepsilon^N(x) + N\varphi^*(x)$$

где $\Phi(x)$ — некоторая функция, $\varepsilon^N(x) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, $\varphi^*(x)$ — собственная функция при $\lambda = 1$ или -1 , определяемая в результате предельного перехода.

Таким образом, из (6) следует, что нарушение условия ортогональности правой части ИУ собственным функциям союзного уравнения приводит к расходимости последовательных приближений.

Выше отмечалось, что рассматриваются ИУ Фредгольма второго рода. Представляется естественным рассмотреть и иных ИУ (например, сингулярных), если они имеют аналогичные спектральные свойства. К таковым принадлежат ИУ, соответствующие первой и второй краевым задачам теории упругости [2].

В задачах, имеющих физическое содержание, когда ИУ получено из представления искомой функции в форме того или иного потенциала, целесообразно рассматривать ИУ, расположенные на спектре, и при нарушении условий их разрешимости. Дело в том, что подчас решение интегрального уравнения само не представляет интереса, а требуется определить какой-либо функционал. Например, при решении второй внутренней задачи теории упругости требуется найти компоненты тензора напряжений. Слагаемое же $\varphi^*(x)$ в (6) соответствует смещению тела как жесткого целого и не влияет на напряжения. Таким образом, несмотря на расходимость последовательных приближений, алгоритм может привести к построению решения краевой задачи, соответствующего, естественно, отличным от исходных краевым условиям и получаемым наложением специальным образом распределенной нагрузки, определяемой главным вектором и моментом внешних сил.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для шара, когда нагрузка приложена по левому полушарию и имеет только одну компоненту (вдоль оси симметрии)

$$\sigma = 1 - \cos \theta \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq 0)$$

(фиг. 1). Осуществлялось решение интегрального уравнения второй основной задачи [2] с использованием регулярных представлений сингулярных интегралов [3]. Сопоставим суммы (6) при 20 и 40 слагаемых и соответствующие им значения напряжений. В одной из точек граничной поверхности суммы различаются в два раза, а напряжения

(в одной из внутренних точек) — на 4%. Штрихами приведена эюра краевых напряжений, соответствующих получаемому решению. Эти напряжения находятся вычитанием из исходных краевых условий напряжений, равных главному вектору приложенных сил, поделенному на площадь всей поверхности.

Рассмотрение подобного рода задач (при нарушении условий разрешимости исходной задачи и, следовательно, соответствующего интегрального уравнения) может оказаться полезным. Допустим, что решение смешанной задачи осуществляется разложением в ряд нагрузки на той части границы, где заданы смещения. Строятся решения для каждой из гармоник, полученные решения суммируются и подлежащие определению коэффициенты ряда находятся из условий для смещений. Предложенный прием позволяет отказаться от необходимости строить самоуравновешенные гармоники, что может существенно упростить реализацию алгоритма. Условия на главный вектор и вектор-момент приведут к тому, что при суммировании дополнительные слагаемые аннулируются. Поэтому краевые условия в напряжениях будут выполнены.

Как отмечалось [3], из-за погрешности расчетных схем даже при выполнении условий разрешимости ИУ (при точном равенстве нулю соответствующих интегралов) может наблюдаться расходимость последовательных приближений. Причины очевидны. Известно, что каждая из функций $\varphi_n(x)$ [1] должна быть ортогональна собственным функциям союзного уравнения. Погрешность расчетной схемы уже на первом этапе может приводить к нарушению этих условий, а далее с увеличением числа итераций это нарушение будет прогрессировать. Исключение составляют задачи, когда имеется симметрия того или иного вида. Например, для задач теории упругости достаточно наличие трех плоскостей геометрической и силовой симметрии (разумеется, при симметрии в дискретизации поверхности).

Для обеспечения сходимости итерационного процесса предлагалось [3] на каждой итерации осуществлять корректировку следующим образом:

$$(7) \quad \varphi_n^k(x) = \varphi_n(x) - \varphi^*(x) \int \varphi_n(y) \varphi^*(y) dy$$

Здесь $\varphi^*(x)$ — собственная функция союзного уравнения и для простоты приведено выражение, когда имеется только одна собственная функция.

В общем случае требуется суммирование по всем собственным функциям союзного уравнения. В случае второй основной задачи теории упругости следует вводить шесть слагаемых, что представляется достаточно громоздким. Для задач с осевой симметрией удерживается только одно слагаемое.

Будем трактовать погрешность расчетных схем как погрешность, изначально внесенную в краевые условия с последующей точной реализацией алгоритма. Тогда из формулы (6) будет следовать, что процесс расходится (поскольку видоизмененные краевые условия не должны удовлетворять условиям разрешимости ИУ), однако для рассматриваемых задач (когда применим принцип Робена) из расходящихся решений ИУ оказывается возможным извлечь сходящееся решение для представляющих интерес величин.

Были проведены расчеты осесимметричной задачи теории упругости для цилиндра со скругленными торцами (фиг. 2), нагруженного касательными усилиями по цилиндрическим полоскам. Вид нагрузки выбирался так, чтобы, несколько изменяя дискретизацию расчетной схемы в окрестности точек, где касательные напряжения максимальны, приходило к разной степени неуравновешенности внешних усилий. Использовалась грубая дискретизация (1°), промежуточная (2°) и мелкая (3°). В таблице представлены результаты расчетов для касательной компоненты слагаемого $\varphi_n(x)$ на 15-й итерации, суммы при 15 слагаемых и напряжений в некоторой внутренней точке D при 8 и 15 итерациях. В скобках приведены аналогичные результаты при расчетах по формуле (7).

Из приведенных данных следует, что при непосредственной реализации итерационного процесса решение ИУ действительно расходится, однако приводит к сходящимся значениям напряжений, практически не отличающихся от значений, получаемых с использованием корректировки на каждой итерации, когда достигается и сходимость решения самого ИУ.

Принцип Робена позволяет предложить один частный прием оценки точности расчетных схем решения ИУ. Допустим, что имеется геометрическая симметрия. Собственные функции должны эту симметрию отражать. Поэтому рекомендуется производить анализ функций $\varphi_n(x)$ (при достаточно большом n). В описанном выше примере значения функций $\varphi_n(x)$ в точках B и C практически совпадали, а их отношение к зна-

Дискретизация	$\Phi_{15} \cdot 10^3$	$\Phi_{15} \cdot 10^7$	$\Phi_{15} \cdot 10$	$\sigma^3 \cdot 10$	$\sigma^{15} \cdot 10$
1°	17	(1,15)	7,48 (8,823)	1,9250 (1,9250)	1,9270 (1,9260)
2°	4,3	(1,25)	8,51 (8,847)	2,0670 (2,0670)	2,0680 (2,0680)
3°	1,1	(1,27)	8,76 (8,845)	2,1027 (2,1030)	2,1039 (2,1040)

чению в центре боковой поверхности (А) оставалось неизменным (в пределах 4%) при всех дискретизациях, хотя сами функции различались на три порядка.

Известно [4], что ИУ теории упругости для несжимаемой среды совпадает с ИУ для линеаризованного течения вязкой несжимаемой жидкости. Они обладают теми же спектральными свойствами, что и ИУ теории упругости (для произвольных значений коэффициента Пуассона), но имеют еще полюс резольвенты в точке $\lambda = 1$, которому соответствует одна собственная функция, совпадающая с вектором, направленным по нормали к граничной поверхности и имеющим постоянный модуль.

Далее для простоты ограничимся задачами, когда имеются три плоскости геометрической и силовой симметрии, что фактически аннулирует полюс резольвенты в точке $\lambda = -1$. Поэтому представляется возможным воспользоваться принципом Робена. Изложенное позволяет предложить прием оценки точности расчетных схем решения ИУ второй основной задачи. Наряду с расчетом при заданном значении коэффициента Пуассона нужно провести расчеты для несжимаемой среды. Отклонение функции $\varphi_n(x)$ от нормали к поверхности и различие в величине может служить мерой оценки погрешности.

В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости, когда поверхность образована вращением квадрата вокруг диагонали. Поверхность не является гладкой (имеются конические точки и ребро), поэтому нет оснований говорить о сходимости метода последовательных приближений и, следовательно, о применимости принципа Робена. Однако расчеты, выполненные при достаточно мелкой дискретизации в окрестности нерегулярных точек, показали, что на основной части поверхности (исключая малую окрестность нерегулярных точек) для функции φ_n отклонения от нормали не превышали одного градуса, а различие в величинах не превышало 3%.

В заключение остановимся на решении внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа и первой внешней задачи теории упругости. Традиционный подход, заключающийся в представлении искомым функций в виде потенциала двойного слоя и обобщенного упругого потенциала двойного слоя, приводит к неразрешимым ИУ. Предлагались [5—9] модификации представлений, которые приводили к разрешимым ИУ.

Ниже излагается прием решения поставленных задач на основе принципа Робена.

Требуется определить гармоническую функцию $u(p)$ ($p \in D^-$), удовлетворяющую краевому условию

$$u(q) = f(q), \quad q \in \partial D$$

Осуществляем решение соответствующего ИУ последовательными приближениями и в результате приходим к собственной функции, которую обозначим $\varphi^*(q)$. Далее вводим в рассмотрение какую-либо гармоническую в области D^- функцию $u_1(p)$ и определяем ее след на ∂D , обозначаем его $f_1(q)$. Снова решаем последовательными приближениями ИУ, но уже при краевом условии $f_1(q)$. Полученную в ходе итерационного процесса собственную функцию обозначим $\varphi^{**}(q)$. Поскольку ИУ имеет только одну линейно независимую собственную функцию, то отношение $\varphi^*(q)/\varphi^{**}(q)$ должно быть постоянной величиной, обозначим ее C .

На заключительном этапе следует рассмотреть краевую задачу для функции $u_2(p)$: $u_2(p) = u(p) - C u_1(p)$. Для нее процесс последовательных приближений приведет к сходящемуся алгоритму. Решение завершается переходом к функции $u(p)$.

При решении задачи теории упругости необходимо исходить из шести частных решений краевых задач и произвести разложение собственной функции, получаемой из исходного краевого условия, по функциям, определенным из частных решений.

Отметим, что изложенный прием был использован при решении второй внешней задачи для несжимаемой среды [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат. 1953. 416 с.

2. *Купрадзе В. Д.* Методы теории потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз. 1963. 472 с.
3. *Перлин П. И.* Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости // ПММ. 1976. Т. 40. № 2. С. 366—371.
4. *Odqvist F. K. G.* Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten // Math. Z. 1930. В. 32. Н. 3. S. 329—357.
5. *Мусхелишвили Н. И.* О решении основных граничных задач теории ньютонова потенциала // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 4. С. 3—26.
6. *Купрадзе В. Д.* К решению задачи Дирихле для многосвязной области // Сообщ. АН ГрузССР. 1940. Т. 1. № 8. С. 569—571.
7. *Шерман Д. И.* Некоторое замечание к задаче Дирихле // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1940. Т. 29. № 4. С. 286—287.
8. *Шерман Д. И.* Пространственная статическая задача теории упругости с заданными смещениями на границе // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 341—360.
9. *Бурчуладзе Т. В.* Граничная задача теории упругости для многосвязных областей // Тр. Тбил. ун-та. 1968. Т. 129. С. 57—78.
10. *Перлин П. И., Новиков А. В., Ступак С. Ф.* Применение метода потенциалов к решению пространственных задач теории упругости для несжимаемой среды // Статика сооружений. Киев: Киев. инж.-строит. ин-т. 1978. С. 156—159.

Москва

Поступила в редакцию
11.1.1987

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Победря Б. Е., Чистяков П. В.

Рассматриваются два варианта применения метода Монте-Карло к задачам теории упругости: с использованием процесса блуждания по сферам для решения уравнений Ламе и с использованием представления искомой величины в виде многократных интегралов (например, при решении задачи Коши для волнового уравнения теории упругости в неограниченном пространстве).

Процесс блуждания по сферам был предложен [1] для решения уравнения Лапласа и в дальнейшем был применен к более сложным задачам (анализ работ на эту тему можно найти в [2, 3]). Рассматривалось решение краевой задачи для уравнений Ламе в плоском случае [4], говорилось о возможности применения метода Монте-Карло к задачам об изгибе пластин [3, 5]¹. Приведены [6] теоремы, позволяющие заменить исходную систему эллиптических уравнений системой интегральных уравнений, для решения которой удобно использовать метод Монте-Карло. Применительно к уравнениям Ламе интегральное представление было известно ранее [7].

В отдельных работах, посвященных решению дифференциальных уравнений в частных производных, возможность решения уравнений Ламе лишь упоминается. Однако даже в плоском случае приводились только отдельные примеры, вопросам обоснования метода (несмещенность используемой оценки решения, точности полученной оценки и т. д.) уделялось мало внимания. Решение конкретных пространственных задач теории упругости на ЭВМ авторам неизвестно.

1. Несмещенная оценка решения краевых задач для уравнений Ламе. Рассмотрим решение первой краевой задачи для уравнений Ламе в области $G \subset R^3$ (Γ — граница области)

$$(1.1) \quad (1 - 2\nu) \nabla^2 u(P) + \text{grad div } u(P) = 0, \quad u|_{\Gamma} = \varphi$$

Для вектор-функции u , удовлетворяющей уравнению Ламе, верна теорема о среднем [7].

¹ Дальнейшее развитие методов решения задач об изгибе пластин можно найти в работе: *Иванов В. М., Кульчицкий О. Ю.* Разработка и исследование эффективных методов блуждания по окружностям для решения задач изгиба пластин и плоской задачи теории упругости. Ленинград, 1983. — 24 с. Деп. в ВИНТИ 4.04.83, № 3270-83.