УДК 539.3

ТЕНЗОР ВЛИЯНИЯ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ПЕРЕМЕННЫМ В ОДНОМ ИЗ НАПРАВЛЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

Маковенко С. Я.

Строится аналог известного тензора влияния Кельвина — Сомильяна [1] для неограниченной упругой среды с переменным в одном из направлений коэффициентом Пуассона и постоянным модулем сдвига. Выводится соответствующий силовой тензор. Рассматривается также действие температуры. Эффекты неоднородности демонстрируются на примерах.

1. Исходные соотношения. Разрешающим уравнениям линейной теории упругости рассматриваемой неоднородной среды в декартовой системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$ можно придать форму [2]

$$\Delta m = -\Phi_{1,1} - \Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}, \quad \Delta n = -\Phi_{1,2} + \Phi_{2,1} \tag{1.1}$$

$$\Delta k = (1-\nu)^{-1}[m_{,33} + \nu(\Phi_{1,1} + \Phi_{2,2}) + (1+\nu)\alpha\Theta] - \Phi_{3,3} \tag{1.2}$$

$$(X_i = 2\mu\gamma^2\Phi_i \ (i = 1,\ 2), \ X_3 = 2\mu\Phi_{3,33})$$

Здесь m, k, n — разрешающиее потенциальные функции, X_i — компоненты вектора массовых сил, Φ_i — произвольные потенциальные функции массовых сил, Θ — температура, α — коэффициент линейного теплового расширения, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, Δ — оператор Лапласа, γ^2 — двумерный оператор Лапласа (по переменным x_1 и x_2). Частные производные обозначаются запятой и стоящим следом за ней индексом соответствующей переменной.

Компоненты вектора перемещений u_i и тензора напряжений σ_{ij} выражаются через потенциальные функции по формулам

$$u_i = (k+m)_{,i} + 2(\varepsilon_{ip3}n_{,p} - \delta_{3i}m_{,3}) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\{(k+m)_{,ij} + \varepsilon_{jp3}n_{,ip} + \varepsilon_{ip3}n_{,pj} - \delta_{3i}m_{,3j} - \delta_{3j}m_{,3i} + (1-2\nu)^{-1}[\nu\Delta(k+m) - 2\nu m_{,33} - (1+\nu)\alpha\Theta]\}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера, ε_{ijp} — компоненты тензора Леви-Чивиты).

Всюду в записанных соотношениях коэффициент Пуассона считается произвольной дифференцируемой или, в общем случае, кусочно-дифференцируемой функцией одной переменной x_3, а модуль сдвига — постоянной величиной. При постоянном коэффициенте Пуассона и отсутствии массовых сил и температуры в соотношениях (1.1) — (1.3) нетрудно узнать частный случай представлений Папковича — Нейбера [1] и известное представление [3] в теории упругости однородных сред.

В дальнейшем целесообразно следующее представление:

$$[1 - \nu(x_3)]^{-1} = D + \beta(x_3) \tag{1.4}$$

где постоянная D подбирается таким образом, чтобы имел смысл интеграл

$$C = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{h} \beta(\xi)\, d\xi \tag{1.5}$$

Если, например

$$\nu(x_3) = \nu_1 e(-x_3) + \nu_2 e(x_3) \tag{1.6}$$

($e(t)$ — функция Хевисайда [4], ν_i — фиксированные постоянные), то

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\nu_1} + \frac{1}{1-\nu_2}\right), \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\nu_2} - \frac{1}{1-\nu_1}\right), \quad \beta = H\operatorname{sign} x_3, \quad C = 0$$

2. Вспомогательные сингулярные решения. Пусть $\mathbf{x}(x_i)$, $\mathbf{y}(y_i)$ — соответственно точка наблюдения и точка истока (точка сингулярного воздействия), $\delta(x_i - y_i)$ — плотность сингулярного воздействия (функция Дирака [4]) и

$$r^2 = \sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2, \quad R^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2, \quad \omega = (x_3 - y_3)\ln\frac{x_3 - y_3 + R}{r} - R$$

Справедливы следующие трансцендентно-операторные разложения и равенства:

(2.1) $$\omega = -\cos\gamma\,(x_3 - y_3)\,r, \quad R^{-1} = \cos\gamma\,(x_3 - y_3)\,r^{-1}$$

(2.2) $$\omega_{,33} = -\gamma^2\omega = R^{-1}, \quad \Delta\omega = 0, \quad \Delta\omega_{,33} = -4\pi\delta$$

(последнее — в пространстве обобщенных функций [4]).

Пусть требуется найти решение неоднородного уравнения Лапласа

(2.3) $$\Delta f = (D + \beta)\,\nabla R^{-1}\cdot\mathbf{l}$$

($\mathbf{l}$ (l_i) — произвольно ориентированный единичный вектор), удовлетворяющее условию симметрии и предельному условию

(2.4) $$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \nabla f = 0$$

Учитывая представления (2.1), уравнение (2.3) преобразуем в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_{,33} + \gamma^2 f = (D + \beta)\,\nabla\cos\gamma\,(x_3 - y_3)\,r^{-1}\cdot\mathbf{l}$$

(γ принимается условно за постоянный параметр), решение которого известно [5] Последующий переход от трансцендентного решения к явно выраженному через элементарные функции осуществляется также на основании представлений (2.1). К полученному таким образом решению добавляются некоторые решения однородного уравнения Лапласа, чтобы удовлетворить условиям (2.4). В результате искомое решение приобретает вид

(2.5) $$f = {}^1\!/_2\mathbf{L}\cdot\mathbf{l}; \quad \mathbf{L} = \nabla\Omega - \mathbf{n}_3\Omega'$$

$$\Omega = DR + C\ln r + \int_{y_3}^{x_3}\beta\,d\xi\,\omega_{,3} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\int_{h_i}^{t_i}\beta\omega_{\xi,3}d\xi$$

$$\Omega' = \sum_{i=1}^{4}\int_{h_i}^{t_i}\beta(\xi)\,R_\xi^{-1}d\xi$$

$$h_1 = h_3 = -\infty, \quad h_2 = h_4 = \infty, \quad t_1 = t_2 = x_3, \quad t_3 = t_4 = y_3$$

Приписывание индекса ξ к функции здесь и далее будет означать замену аргумента $x_3 - y_3$ этой функции на новый аргумент $x_3 + y_3 - 2\xi$.

3. **Действие единичной силы.** Предполагается, что на упругое пространство действует единичная сила с плотностью $\mathbf{X} = \delta\mathbf{l}$. Учитывая равенства (2.2), можно записать

$$4\pi\mathbf{X} = -\Delta\gamma^2\omega\mathbf{l} = \Delta\omega_{,33}\mathbf{l}$$

откуда следует

(3.1) $$\Phi_1/l_1 = \Phi_2/l_2 = -\Phi_3/l_3 = q\Delta\omega, \quad q = (8\pi\mu)^{-1}$$

Из уравнений (1.1) получим

(3.2) $$m = -q\nabla\omega\cdot\mathbf{l}, \quad n = -q\nabla\times\mathbf{n}_3\omega\cdot\mathbf{l}$$

Из уравнения (1.2), учитывая зависимости (3.1), (3.2) и представление (2.5), получаем

(3.3) $$k = -{}^1\!/_2 q\,[\mathbf{L}\cdot\mathbf{l} + 2\,(\nabla\cdot\mathbf{l}\omega - 2\mathbf{n}_3\cdot\nabla\mathbf{l}\omega\cdot\mathbf{n}_3)]$$

Компоненты тензора влияния и силового тензора определяются соотношениями

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{l}, \quad \sigma = \mathbf{F}\cdot\mathbf{l}$$

Из представлений (1.3) и решений (3.2), (3.3) следует

(3.4) $$\mathbf{U} = 2q\,(\mathbf{E}R^{-1} - {}^1\!/_4\nabla\mathbf{L})$$
$$\mathbf{F} = -(4\pi)^{-1}\{{}^1\!/_2\nabla\nabla\mathbf{L} - [\nu(1-\nu)^{-1}\mathbf{E}\nabla + \nabla\mathbf{E} + \mathbf{n}_i\nabla\mathbf{n}_i]\,R^{-1}\}$$

(E — единичный тензор). Непосредственно проверяется справедливость принципа взаимности и условия уравновешенности

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{U}^T(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \nabla\cdot\mathbf{F} = -\mathbf{E}\delta$$

Для однородного пространства ($L_i = DR_{,i}$) представления (3.4) переходят в известные [1, 4].

4. Действие температуры. В уравнении (1.2) следует положить $\Theta = \delta$. Тогда в соответствии со свойствами (2.2)

$$k_\Theta = -\frac{A}{4\pi}\frac{1}{R}, \quad A = \frac{1+\nu(y_3)}{1-\nu(y_3)}\alpha \tag{4.1}$$

Компоненты вектора температурных перемещений и тензора напряжений согласно представлениям (1.3) и решению (4.1) принимают вид

$$\mathbf{u}_\Theta = -\frac{A}{4\pi}\nabla R^{-1}, \quad \sigma_\Theta = -\frac{\mu A}{2\pi}(\nabla\nabla - \mathbf{E}\Delta) R^{-1} \tag{4.2}$$

Из полученных зависимостей вытекает, что поле перемещений и напряжений в упругом пространстве с переменным коэффициентом Пуассона зависит лишь от значения последнего в точке сингулярного теплового воздействия.

Пусть в объеме V задано распределение температуры $\Theta(\mathbf{x})$, а вне этого объема температура нулевая. Как и в однородном пространстве, вводится потенциал

$$\chi = (4\pi)^{-1}\iiint\limits_V R^{-1}A\Theta(\mathbf{y})\,dv_y$$

В соответствии с представлениями (4.2)

$$\mathbf{u}_\Theta(\mathbf{x}) = -\nabla\chi, \quad \sigma_\Theta(\mathbf{x}) = -2\mu(\nabla\nabla - \mathbf{E}\Delta)\chi \tag{4.3}$$

К первому выражению (4.3) можно прийти и иным путем, основываясь на вытекающей из теоремы о взаимности работ [1] формуле

$$\mathbf{u}_\Theta(\mathbf{x}) = 2\mu\alpha\iiint\limits_V [1+\nu(y_3)][1-2\nu(y_3)]^{-1}\Theta(\mathbf{y})\nabla_y\cdot\mathbf{U}(\mathbf{y},\mathbf{x})\,dv_y$$

и легко проверяемых соотношениях

$$\Delta\Omega = \frac{2}{1-\nu}\frac{1}{R}, \quad \Delta\Omega' = 2\beta_{,3}\frac{1}{R}, \quad \nabla\cdot\mathbf{U} = q\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla\frac{1}{R}$$

5. Примеры. Пусть пространство характеризуется ступенчато-переменным коэффициентом Пуассона вида (1.6). Функции Ω, Ω' в (2.5) будут в данном случае такими:

$$\begin{aligned}
&\Omega = DR + H[(|x_3| - |y_3|)\,\omega_{,3} + (x_3 + y_3)\ln r] -\\
&\quad - {}^1/_2 H(\omega - \omega_0)(\operatorname{sign} x_3 + \operatorname{sign} y_3)\\
&\Omega' = H[(\omega_0 + \omega)_{,3}\operatorname{sign} x_3 + (\omega_0 - \omega)_{,3}\operatorname{sign} y_3 + 2\ln r]\\
&\omega_0 = \omega_\xi|_{\xi=0}
\end{aligned}$$

В соответствии с представлениями (3.4) выводятся выражения для компонент тензора влияния и силового тензора

$$\begin{aligned}
&U_{ij} = 2q\{R^{-1}\delta_{ij} - {}^1/_4 DR_{,ij} - {}^1/_4 H[(|x_3| - |y_3|)\,\omega_{,3ij} + (x_3 + y_3)\ln r]_{,ij} -\\
&- 2(\ln r)_{,i}\delta_{3j} + [{}^1/_2(\omega_0 - \omega)_{,j} + (\omega - \omega_0)_{,3}\delta_{3j}]_{,i}(\operatorname{sign} x_3 + \operatorname{sign} y_3) +\\
&+ (\omega_{,j}\delta_{3i} - \omega_{,i}\delta_{3j})_{,3}\operatorname{sign} x_3]\}\\
&F_{ijk} = -(4\pi)^{-1}\{{}^1/_2 DR_{,ijk} + (1 - D)(1/R)_{,k}\delta_{ij} - (1/R)_{,i}\delta_{jk} - \delta_{ig}\delta_{gk}(1/R)_{,j} +\\
&+ {}^1/_2 H[(|x_3| - |y_3|)\,\omega_{,3ijk} + [(x_3 + y_3)\ln r]_{,ijk} - 2\delta_{3k}(\ln r)_{,ij} + [{}^1/_2(\omega_0 - \omega)_{,k} +\\
&+ (\omega - \omega_0)_{,3}\delta_{3k}]_{,ij}(\operatorname{sign} x_3 + \operatorname{sign} y_3) + [-2(1/R)_{,k}\delta_{ij} +\\
&+ (\omega_{,kj}\delta_{3i} - \omega_{,ij}\delta_{3k} + \omega_{,ik}\delta_{3j})_{,3}]\operatorname{sign} x_3]\}
\end{aligned}$$

В частности, в начале координат ($x_i = 0$) в предположении $y_1 = y_2 = 0$ имеем

$$F_{333} = \frac{1}{8\pi|y_3|^2}[H + 2(1 + D)\operatorname{sign} y_3]$$

и в предположении $y_2 = y_3 = 0$

$$F_{331} = -\frac{1}{8\pi|y_1|^2}(2 - D)\operatorname{sign} y_1$$

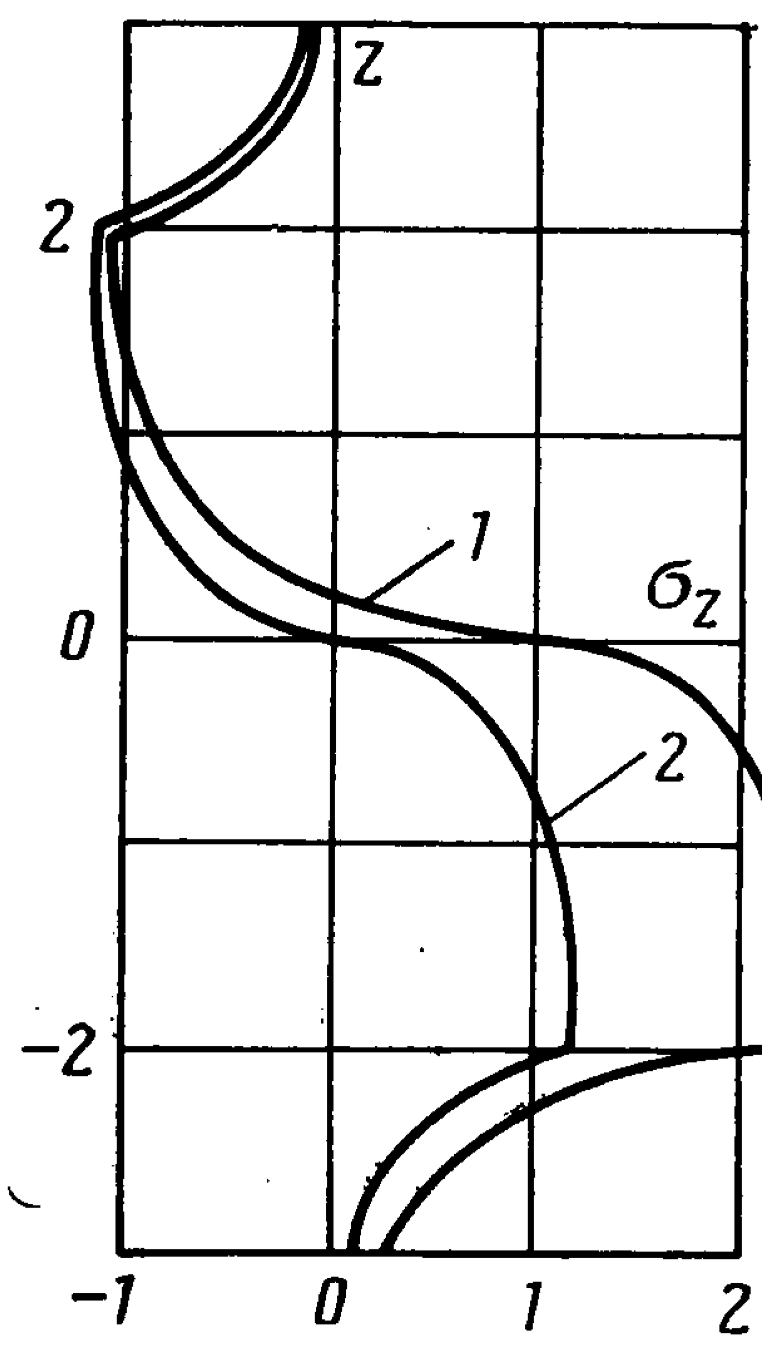
Разница в значениях напряжений, вычисленных согласно приведенным выражениям, при $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0{,}45$ (для неоднородной среды) и при $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}225$ (для однородной среды) достигает 14—17%.

Пусть теперь в рассматриваемом неоднородном пространстве напряженное состояние создается нагреванием до постоянных температур Θ_1 и Θ_2 двух непересекающихся сферических объемов V_1 и V_2 соответственно с радиусами a_1 и a_2 и центрами $(0, 0, a_1)$ и $(0, 0, -a_2)$. Внутри каждого объема материал однороден и напряженное и деформированное состояние среды, как установлено ранее, индифферентно к поведению коэффициента Пуассона вне данного нагретого объема, поэтому по аналогии с известными выражениями для однородной среды [1] можно записать

$$\chi_j = \begin{cases} \frac{1}{2} A_j \Theta_j (a_j^2 - \frac{1}{3} R_j^2), & x \in V_j \\ \frac{1}{3} A_j \Theta_j a_j^3 / R_j, & x \overline{\in} V_j \end{cases}$$

$$A_j = \frac{1+\nu_j}{1-\nu_j}\,\alpha, \quad R_j = \{x_1^2 + x_2^2 + [x_3 - (-1)^{j-1} a_j]^2\}^{1/2}$$

$$j = 1,2$$



На фигуре показаны распределения относительного нормального напряжения $\sigma_z = 3\sigma_{33\theta}/(4\mu\alpha\Theta)$ вдоль оси $z = x_3/a$, проходящей через центры сферических объемов, при $\Theta_1 = -\Theta_2 = \Theta = \text{const}$, $a_1 = a_2 = a$ для неоднородной среды ($\nu_1 = 0,1$, $\nu_2 = 0,4$, кривая *1*) и однородной ($\nu_1 = \nu_2 = 0,1$, кривая *2*). Видно существенное влияние неоднородности коэффициента Пуассона на распределение температурных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
2. *Маковенко С. Я.* Об одном методе решения задач неоднородной теории упругости в деформациях // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 1. С. 40—45.
3. *Youngdahl C. K.* On the completeness of a set of stress functions aprropriate to the solution of elasticity problems in general cylindrical coordinates // Intern. J. End. Sci. 1969. V. 7. No. 1. P. 61—79.
4. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир. 1978. 518 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1976. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1987

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА РОБЕНА К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Перлин П. И.

Принцип Робена применяется к решению последовательными приближениями интегральных уравнений (ИУ), соответствующих основным пространственным задачам теории упругости. Устанавливается, что возможная расходимость процесса последовательных приближений, обусловленная погрешностью расчетных схем, не приводит к расходимости решения в напряжениях. Показано, что применение метода последовательных приближений к ИУ второй внутренней задачи при несамоуравновешенных краевых условиях дает сходящееся в напряжениях решение, соответствующее определенным самоуравновешенным краевым условиям. Предлагается метод решения краевых задач, когда соответствующие ИУ расположены на спектре, а условия их разрешимости не соблюдаются.

Рассмотрим ИУ Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

Пусть $\lambda = 1$ — наименьшее по модулю собственное значение. Будем решать ИУ (1) последовательными приближениями, для чего представим функцию $\varphi(x)$ в виде ряда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) \tag{2}$$