Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 539.375

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО УПРУГОГО СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Филиппова Л. М.

Рассматривается слой из нелинейно-упругого несжимаемого материала с круговой трещиной, расположенной посредине слоя параллельно его границам. Слой сжат силами, действующими вдоль границ. Разыскиваются такие значения деформации сжатия, при которых происходит выпучивание материала слоя вблизи трещины, т. е. происходит раскрытие трещины вследствие упругой неустойчивости. Задача устойчивости сводится к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, зависящим от параметра начальной деформации. Численно определяются критические значения сжатия в зависимости от отношения толщины слоя к радиусу трещины.

1. Предположим, что упругий слой из несжимаемого изотропного материала имеет в недеформированном состоянии симметрично расположенную круговую трещину (щель) радиуса a_0 и испытывает конечную деформацию, обусловленную равномерной осесимметричной нагрузкой, приложенной на бесконечности и действующей в плоскости трещины. Так как трещина считается бесконечно тонкой, ее наличие при таком нагружении не сказывается и в слое реализуется однородная деформация и однородное поле напряжений со следующими компонентами в цилиндрических координатах:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\partial\Pi/\partial\lambda_1 - \lambda^{-2}\partial\Pi/\partial\lambda_3$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{rz} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь λ_k $(k = 1, 2, 3)$ — главные растяжения (кратности удлинений), $\Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — функция удельной потенциальной энергии деформации несжимаемого материала [1], λ — кратность удлинения в радиальном направлении (при сжатии $0 < \lambda < 1$). Обозначив $2a_0h_0$ толщину слоя в недеформированной конфигурации, $a = \lambda a_0$ — радиус трещины в начальном деформированном состоянии, из условия несжимаемости найдем, что толщина деформированного слоя будет равна $2ah$, где $h = \lambda^{-3}h_0$.

На описанную конечную деформацию накладывается малая деформация, вызванная нагружением поверхности трещины осесимметрично распределенным давлением $p(r)$.

Воспользуемся линеаризованными уравнениями равновесия предварительно напряженного несжимаемого тела при осесимметричной добавочной деформации [2]

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}\right) + \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \tag{1.2}$$
$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z} + \varkappa\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\mu = 2\lambda^{-2}\Pi_3 + \lambda^2\Pi_{11} + \lambda^{-4}\Pi_{33} - 2\lambda^{-1}\Pi_{13}$$
$$\nu = \frac{\Pi_3 - \lambda^3\Pi_1}{\lambda^2 - \lambda^8}, \quad \varkappa = \frac{\lambda^4\Pi_3 - \lambda^7\Pi_1}{1 - \lambda^6}$$
$$\Pi_k = \frac{\partial\Pi}{\partial\lambda_k}, \quad \Pi_{ks} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\lambda_k\partial\lambda_s}$$

Здесь r, z — безразмерные (отнесенные к радиусу трещины a в начальном деформированном состоянии) цилиндрические координаты, u, w — радиальная и вертикальная компоненты поля добавочных перемещений, q — добавочное нормальное напряжение, действующее в горизонтальных сечениях слоя.

Условия на границах слоя $z = \pm h$, выражающие отсутствие нагрузки, имеют вид

$$\partial u/\partial z + \partial w/\partial r = 0,\ q = 0 \tag{1.3}$$

В силу симметрии задачи относительно срединной плоскости слоя достаточно рассмотреть половину слоя $0 \leqslant z \leqslant h$, поставив при $z = 0$ следующие смешанные условия:

$$\partial u/\partial z + \partial w/\partial r = 0,\ 0 \leqslant r \leqslant \infty \tag{1.4}$$

$$q = -p(r),\ 0 \leqslant r < 1;\ w = 0,\ 1 < r < \infty \tag{1.5}$$

Применив интегральное преобразование Ганкеля, построим решение уравнений (1.2)

$$u(r,z) = \int_0^\infty (A_1\omega_1 s_1 + A_2\omega_1 c_1 + B_1\omega_2 s_2 + B_2\omega_2 c_2)\, J_1(\alpha r)\, d\alpha \tag{1.6}$$

$$w(r,z) = \int_0^\infty (A_1 c_1 + A_2 s_1 + B_1 c_2 + B_2 s_2)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha$$

$$q(r,z) = \int_0^\infty [\omega_1\Delta_1(A_1 s_1 + A_2 c_1) + \omega_2\Delta_2(B_1 s_2 + B_2 c_2)]\, \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha$$

$$A_k = A_k(\alpha),\quad B_k = B_k(\alpha),\quad c_k = \operatorname{ch} \alpha\omega_k (h - z),$$
$$s_k = \operatorname{sh} \alpha\omega_k (h - z),\quad k = 1, 2;\quad \Delta_1 = \nu - \mu + \nu\omega_1^2,$$
$$\Delta_2 = \nu - \mu - \nu\omega_2^2$$

Здесь J_0, J_1 — бесселевы функции, ω_1, ω_2 — корни уравнения $\nu\omega^4 - (\mu - 2\nu)\omega^2 + \varkappa = 0$, имеющие положительную действительную часть. Такие корни существуют, если упругий материал удовлетворяет строгому неравенству Адамара [2].

Удовлетворив граничным условиям (1.3) и (1.4), получим

$$B_1 = -\frac{1+\omega_1^2}{1+\omega_2^2} A_1,\qquad B_2 = -\frac{\omega_1\Delta_1}{\omega_2\Delta_2} A_2 \tag{1.7}$$

$$A_2 = \frac{(1+\omega_1^2)\,\omega_2\Delta_2(\operatorname{ch}\alpha\omega_2 h - \operatorname{ch}\alpha\omega_1 h)\, A_1}{(1+\omega_2^2)(\omega_2\Delta_2 \operatorname{sh}\alpha\omega_1 h - \omega_1\Delta_1 \operatorname{sh}\alpha\omega_2 h)}$$

Краевые условия (1.5) приводят к парному интегральному уравнению относительно функции $A_1(\alpha)$, через которую согласно (1.6), (1.7) выражается решение задачи. Для материала общего вида это уравнение имеет весьма громоздкий вид и выписывать его нецелесообразно.

2. В дальнейшем ограничимся случаем неогуковского [1] материала, для которого справедливы выражения (G — модуль сдвига)

$$\Pi = \frac{1}{2} G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3),\qquad \nu = G\lambda^{-4} \tag{2.1}$$

$$\mu = G(\lambda^2 + 3\lambda^{-4}),\ \varkappa = G\lambda^2,\ \omega_1 = 1,\ \omega_2 = \lambda^3$$

Парное интегральное уравнение для этого материала после некоторых преобразований и введения новой неизвестной функции $A(\alpha)$ принимает форму

$$\int_0^\infty A(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0,\quad r > 1 \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty A(\alpha)\left[C(\lambda)-g(\alpha,\lambda)\right]\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha=-\frac{ap(r)}{2G},\quad r<1$$

$$C(\lambda)=\frac{(1+\lambda^6)^2-4\lambda^3}{1-\lambda^6},\quad g(\alpha,\lambda)=C(\lambda)-\frac{\Phi_2}{(1-\lambda^6)\Phi_1}$$

$$\Phi_1=4\lambda^3\operatorname{sh}\alpha\lambda^{-3}h_0\operatorname{ch}\alpha h_0-(1+\lambda^6)^2\operatorname{ch}\alpha\lambda^{-3}h_0\operatorname{sh}\alpha h_0$$

$$\Phi_2=8\lambda^3(1+\lambda^6)^2(\operatorname{ch}\alpha\lambda^{-3}h_0\operatorname{ch}\alpha h_0-1)-$$
$$-[16\lambda^6+(1-\lambda^6)^4]\operatorname{sh}\alpha\lambda^{-3}h_0\operatorname{sh}\alpha h_0$$

Радиальная компонента перемещения в слое выражается через функцию $A(\alpha)$ следующим образом:

$$u=\int_0^\infty\Big[\lambda^3(M_1\operatorname{sh}\alpha\lambda^3(h-z)+M_2\operatorname{ch}\alpha\lambda^3(h-z)+$$
$$+\frac{2\lambda^4}{(1-\lambda^6)\alpha}(N_1\operatorname{ch}\alpha(h-z)+N_2\operatorname{sh}\alpha(h-z))\Big]J_1(\alpha r)\frac{d\alpha}{\operatorname{sh}\alpha h}$$

$$M_1=-\frac{4\lambda^4}{(1-\lambda^{12})\alpha}N_2,\quad M_2=-\frac{(1+\lambda^6)\lambda}{(1-\lambda^6)\alpha}N_1$$

$$N_1=4\lambda^3(\operatorname{ch}\alpha h-\operatorname{ch}\alpha\lambda^3h)A\Phi_1^{-1}\alpha\operatorname{sh}\alpha h$$

$$N_2=A\Phi_1^{-1}[(1+\lambda^6)^2\operatorname{sh}\alpha\lambda^3h-4\lambda^3\operatorname{sh}\alpha h]\alpha\operatorname{sh}\alpha h$$

Следуя методу, изложенному в [3], сведем парное уравнение (2.2) к уравнению Фредгольма. Неизвестную функцию будем искать в виде

$$A(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^1\varphi(t)(\cos\alpha t-\cos\alpha)\,dt \tag{2.3}$$

При этом первое соотношение (при $r>1$) парного уравнения (2.2) удовлетворяется тождественно для всех непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ [3].

Учитывая известные представления [4]

$$J_0(\alpha r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\alpha r\sin\theta)\,d\theta$$

$$\int_0^\infty J_0(\alpha r)\cos\alpha t\,d\alpha=\begin{cases}0, & r<t\\ (r^2-t^2)^{-1/2}, & r>t\end{cases}$$

и подставляя (2.3) во второе соотношение парного уравнения (2.2), а затем полагая

$$F(x)=C(\lambda)\varphi(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\varphi(t)\left[K(t+x,\lambda)+K(t-x,\lambda)-\right. \tag{2.4}$$
$$\left.-K(1+x,\lambda)-K(1-x,\lambda)\right]dt\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$
$$K(x,\lambda)=\int_0^\infty g(\alpha,\lambda)\cos\alpha x\,d\alpha$$

придем к интегральному уравнению Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2}F(r\sin\theta)\,d\theta=-\frac{a}{2G}p(r)$$

решение которого известно [3]

$$F(x)=-\frac{a}{\pi G}\left[p(0)+x\int_0^{\pi/2}p'(x\sin\theta)\,d\theta\right] \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(x)$. Аналогичным путем, основываясь на (1.6), (1.7), можно свести задачу о трещине в предварительно напряженном слое к уравнению Фредгольма и для других материалов из класса изотропных несжимаемых тел.

3. Исследуем свойства функции $K(x, \lambda)$. Можно показать, что функция $\Phi_1(\alpha, \lambda)$ не имеет действительных нулей, кроме точки $\alpha = 0$, для значений $\lambda_* < \lambda < \infty$, где $\lambda_* = \gamma_*^{1/3} \approx 0{,}667$.

Очевидно, что множество действительных корней уравнения $\Phi_1(\alpha, \lambda) = 0$ состоит из корня $\alpha = 0$ и действительных корней уравнения

$$\operatorname{th}\alpha h_0/\operatorname{th}\alpha\lambda^{-3}h_0 = 4\lambda^3(1+\lambda^6)^{-2} \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) перепишем следующим образом:

$$\psi(y, \gamma) = f(\gamma), \quad \psi(y, \gamma) \equiv \frac{\operatorname{th} y\gamma}{\operatorname{th} y}, \quad f(\gamma) = \frac{4\gamma}{(1+\gamma^2)^2} \tag{3.2}$$
$$\gamma = \lambda^3 > 0, \; y = \alpha\lambda^{-3}h_0$$

Можно установить, что для всех $0 < y < \infty$

$$1 \leqslant \psi(y, \gamma) \leqslant \gamma \text{ при } \gamma \geqslant 1 \tag{3.3}$$
$$\gamma \leqslant \psi(y, \gamma) \leqslant 1 \text{ при } \gamma \leqslant 1$$

Функция $f(\gamma) - 1$ имеет два нуля: 1 и $\gamma_* \approx 0{,}296$. Отсюда и из выражения для производной этой функции вытекает, что $f(\gamma) > 1$ при $\gamma_* < \gamma < 1$ и $f(\gamma) < 1$ при $\gamma < \gamma_*$ и $1 < \gamma < \infty$. При учете (3.3) это означает, что уравнение (3.2), а следовательно и (3.1), при $\gamma_* < \gamma < \infty$ не имеет действительных корней.

Поскольку точка $\alpha = 0$ не является полюсом функции $g(\alpha, \lambda)$, эта функция при $\lambda_* < \lambda < \infty$ не имеет полюсов на вещественной оси. Кроме того, можно установить, что функция $g(\alpha, \lambda)$ при $\alpha \to \infty$ экспоненциально убывает. Следовательно, $K(x, \lambda)$ — непрерывная функция от x при $\lambda_* < \lambda < \infty$.

Заметим, что величина λ_* — критическое значение кратности удлинения для неограниченного пространства с трещиной. При $\lambda = \lambda_*$ наступает неустойчивость неограниченного тела (т. е. слоя бесконечной толщины), ослабленного круговой трещиной [2].

Таким образом, рассматриваемая задача о трещине сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. При отсутствии нагрузки на поверхности трещины ($p(r) = 0$) приходим к задаче определения значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения однородного уравнения ((2.4) при $F(x) = 0$). Минимальное из значений параметра $\varepsilon = 1 - \lambda$, для которых это уравнение имеет ненулевое решение, представляет собой критическую деформацию, при которой происходит осесимметричное и симметричное относительно плоскости $z = 0$ выпучивание материала слоя вблизи трещины, т. е. происходит раскрытие трещины вследствие упругой неустойчивости. Ниже приведены значения критической деформации ε, найденные путем численного решения указанного уравнения, для ряда значений относительной полутолщины слоя h_0

h_0	0,1	0,3	0,5	0,7	1
$\varepsilon\cdot10^3$	7,22	50,9	111	168	228

Автор благодарит В. А. Еремеева и М. И. Карякина за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
2. *Филиппова Л. М.* О влиянии начальных напряжений на раскрытие круговой трещины // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 286—290.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1967. 402 с.
4. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
31.III.1987