

УДК 539.375

## О ТЕПЛОВОМ УДАРЕ В ОБЛАСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З.

Исследуется тепловой удар, т. е. действие напряжений, вызванных резким изменением температуры, в плоскости с полубесконечным разрезом. Предполагается, что в начальный момент плоскость имеет нулевую температуру и на разрезе мгновенно возникает некоторая ненулевая температура. Основным результатом — представление (5.8) для коэффициента интенсивности растягивающих напряжений (КИН). Преобразование Лапласа КИН находится при помощи предложенного в [1] метода вычисления коэффициентов в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи особенностей границы. Такой подход позволяет найти КИН, минуя решение исходной динамической задачи термоупругости.

Из формулы для КИН выводятся асимптотические выражения для КИН, а также для момента разрушения при мгновенном охлаждении берегов трещины.

Рассматривается также тепловой удар в ограниченной плоской области с прямолинейным разрезом. Показано, что главный член асимптотики КИН при малых значениях времени совпадает с КИН для той же задачи на плоскости с разрезом.

Математическое описание теплового удара может быть получено при совместном решении уравнения теплопроводности и системы термоупругости с учетом инерционных членов. Первое аналитическое решение подобной динамической задачи было найдено в [2], где рассматривался тепловой удар в упругом полупространстве при внезапном нагревании его границы. Ссылки на другую литературу в том же направлении можно найти в [3].

**1. Постановка краевых задач.** Ограничимся рассмотрением плоской деформации, случай плоского напряженного состояния при нулевом теплообмене с внешней средой получается в результате замены постоянной Ламе  $\lambda$  на  $\lambda_* = 2\lambda\mu / (\lambda + 2\mu)$ ,  $\gamma$  на  $\gamma_* = (1 - 2\nu)\gamma / (1 - \nu)$ , где  $\gamma = 2\mu\alpha_T(1 + \nu) / (1 - 2\nu)$ ,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\alpha_T$  — коэффициент линейного расширения,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Пусть  $G$  — плоскость с исключенной полусью  $\Gamma = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$ . Допустим, что в начальный момент  $G$  имеет нулевую температуру и затем разрез  $\Gamma$  мгновенно приобретает постоянную температуру  $T_0$ . Перепад температуры приводит к возникновению напряженного состояния в  $G$  и требуется определить коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I(t)$ ,  $K_{II}(t)$ .

Математически задача ставится следующим образом. Температура  $T$  определяется из решения краевой задачи

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial T / \partial t - a^2 \Delta T &= 0 \quad \text{на } G \times (0, \infty) \\ T &= T_0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty); \quad T = 0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned}$$

Вектор смещений  $u$ , порожденный этим температурным полем, находится из решения следующей краевой задачи:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} -\rho \partial^2 u / \partial t^2 + \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u &= \gamma \text{grad } T \quad \text{на} \\ G \times (0, \infty) \\ \sigma_{22} = \gamma T, \quad \sigma_{21} = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ u = \partial u / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0 \\ (\sigma_{nm} = \lambda \text{div } u \delta_{nm} + 2\mu (\partial u_n / \partial x_m + \partial u_m / \partial x_n)) \end{aligned}$$

Временно для упрощения выкладок предположим, что  $a = 1$ ,  $T_0 = 1$ .

2. **Определение температуры.** После преобразования Лапласа из (1.1) получим краевую задачу

$$pT - \Delta T = 0 \text{ на } G; \quad T = p^{-1} \text{ на } \Gamma$$

Будем искать  $T$  в виде

$$T(p, x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} T^F(p, \xi, x_2) \exp(i x_1 \xi) d\xi$$

Тогда

$$T^F(p, \xi, x_2) = \tau(p, \xi) \exp(-\sqrt{p + \xi^2} x_2)$$

В силу четности функции  $T$  получаем, что

$$\partial T / \partial x_2 = 0 \text{ при } x_2 = 0, \quad x_1 > 0$$

Следовательно,  $\tau(p, \xi) \sqrt{p + \xi^2}$  — аналитическая функция при  $\text{Im } \xi > 0$ , а  $\tau(p, \xi) - p^{-1} \delta(\xi)$  — аналитическая функция при  $\text{Im } \xi < 0$ . Используя формулу

$$(2.1) \quad \delta(\xi) = \frac{1}{2\pi i (\xi - i0)} - \frac{1}{2\pi i (\xi + i0)}$$

находим

$$(2.2) \quad \tau(p, \xi) = -\frac{p^{-3/4}}{2\pi i (\xi + i0)} (p^{1/2} + i\xi)^{-1/2}$$

3. **Асимптотика напряжений в вершине разреза.** Из результатов работы [4] вытекает, что для преобразования Лапласа смещений  $u(p, x_1, x_2)$  справедлива та же асимптотическая формула при  $r \rightarrow 0$ , что и в случае плоской статической задачи теории упругости. Для коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I(p)$ ,  $K_{II}(p)$  имеет место представление [5]

$$(3.1) \quad K_j(p) = \gamma \int_G \text{grad } T \zeta^j dx - \gamma \int_{\Gamma} T \zeta_2^j dx_1, \quad j = I, II$$

где  $\zeta^j(p, x)$  — решение однородной задачи

$$(3.2) \quad -\rho p^2 U + \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \text{grad div } U = 0 \text{ на } G$$

$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0$  на  $\Gamma$  со следующей асимптотикой при  $x \rightarrow 0$ :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \zeta^j(p, x) &= Z^j(x) + O(1) \\ (Z_r^j, Z_\theta^j)(r, \theta) &= [2(1 + \kappa)(2\pi r)^{1/2}]^{-1} \psi^j(\theta) \\ \psi^I(\theta) &= ((2\kappa + 1) \cos^{3/2}\theta - 3 \cos^{1/2}\theta, (1 - 2\kappa) \sin^{3/2}\theta + \\ &+ 3 \sin^{1/2}\theta) \\ \psi^{II}(\theta) &= (\sin^{1/2}\theta - (2\kappa + 1) \sin^{3/2}\theta, \cos^{1/2}\theta + (1 - \\ &- 2\kappa) \cos^{3/2}\theta) \end{aligned}$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$  при плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  при плоском напряженном состоянии.

Можно проверить, что условие (3.3) равносильно асимптотике

$$(3.4) \quad \zeta^j(p, x) \rightarrow Z^j(x), \quad p \rightarrow 0$$

Функции  $\zeta^j$  построены ниже в явном виде.

Интегрируя по частям в (3.1), находим

$$K_j(p) = -\gamma \int_G T \text{div } \zeta^j dx$$

4. **Построение функций  $\zeta^j$ .** Пусть  $(u_1, u_2)$  — решение задачи (3.2). Введем волновые потенциалы  $\varphi_1, \varphi_2$  [6]

$$(4.1) \quad u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$$

Тогда, как известно

$$(4.2) \quad c_n^2 \Delta \varphi_n - p^2 \varphi_n = 0 \text{ на } G, \quad n = 1, 2$$

$$(c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho})$$

Краевые условия на разрезе имеют вид

$$(4.3) \quad \sigma_{22} = \lambda \Delta \varphi_1 + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \text{ на } \Gamma$$

$$\sigma_{21} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} \right) = 0 \text{ на } \Gamma$$

Из асимптотики (3.4) следует, что вектор  $U = \zeta^I$  должен быть подчинен условиям

$$u_n(p, x_1, -x_2) = (-1)^{n+1} u_n(p, x_1, x_2), \quad n = 1, 2$$

Отсюда вытекают равенства

$$\sigma_{12}(p, x_1, -x_2) = -\sigma_{12}(p, x_1, x_2), \quad \sigma_{nn}(p, x_1, -x_2) = \sigma_{nn}(p, x_1, x_2)$$

$$\varphi_n(p, x_1, -x_2) = (-1)^{n+1} \varphi_n(p, x_1, x_2), \quad n = 1, 2$$

Рассмотрим задачу (4.2) в полупространстве  $x_2 > 0$  и к (4.3) добавим условие

$$(4.4) \quad \sigma_{12} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \text{ при } x_2 = 0, \quad x_1 > 0$$

Будем искать функции  $\varphi_n$  в виде

$$(4.5) \quad \varphi_n(p, x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^F(p, \xi, x_2) \exp(ix_1 \xi) d\xi$$

Из уравнений (4.2) получаем

$$(4.6) \quad \varphi_n^F(p, \xi, x_2) = \Phi_n(p, \xi) \exp(-\eta_n x_2) \quad (\eta_n = \sqrt{\xi^2 + c_n^{-2} p^2})$$

Здесь выбрана та ветвь корня, для которой вещественная часть положительна при  $\operatorname{Re} p > 0$ .

В дальнейшем, как обычно,  $g_+$  и  $g_-$  — функции, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскости, такие, что  $g = g_+ - g_-$ . Из второго соотношения в (4.4) получаем, что  $\Phi_2$  аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, т. е.  $\Phi_2 = \Phi_{2+}$ .

В силу того что  $\sigma_{12} = 0$  при  $x_2 = 0$ ,  $-\infty < x_1 < \infty$ , находим

$$(4.7) \quad \Phi_1(p, \xi) = \frac{\xi^2 + \eta_2^2}{2i\xi\eta_1} \Phi_2(p, \xi)$$

Из первого соотношения в (4.3) получаем

$$(\xi^2 + \eta_2^2) \Phi_1(p, \xi) + 2i\xi\eta_2 \Phi_2(p, \xi) = f_-(p, \xi)$$

где  $f_-$  — функция, аналитическая при  $\operatorname{Im} \xi < 0$ .

Используя (4.7), приходим к равенству ( $R$  — функция Релея)

$$(4.8) \quad \frac{R(p, \xi)}{2i\xi\eta_1} \Phi_2(p, \xi) = f_-(p, \xi)$$

$$R(p, \xi) = (\xi^2 + \eta_2^2)^2 - 4\xi^2\eta_1\eta_2$$

Приведем известные сведения о функции  $R$  (см., например, [6,7]). Функция  $1/R$  имеет четыре точки ветвления  $\xi = \pm ic_1^{-1} p$ ,  $\xi = \pm ic_2^{-1} p$  и два полюса  $\xi = \pm ic_R^{-1} p$ , где  $c_R$  — скорость поверхности волн — волн Релея, т. е.  $c_R$  — положительный корень уравнения

$$(2 - c_2^{-2} c^2)^2 - 4\sqrt{1 - c_1^{-2} c^2} \sqrt{1 - c_2^{-2} c^2} = 0$$

Положим

$$(4.9) \quad D(p, \xi) = 2(c_2^{-2} - c_1^{-2}) \frac{p^2(c_R^{-2}p^2 + \xi^2)}{R(p, \xi)}$$

Функция  $D$  представляется в виде произведения

$$D(p, \xi) = D_+(p, \xi) D_-(p, \xi)$$

$$D_{\pm}(p, \xi) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \frac{\varphi(\alpha)}{|\alpha \pm i\xi/p|} d\alpha \right]$$

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{4\alpha^2 \sqrt{c_2^{-2} - \alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - c_1^{-2}}}{(2\alpha^2 - c_2^{-2})^2}$$

Факторизация функции  $\eta_1$  имеет вид

$$(4.10) \quad \eta_1 = \sqrt{c_1^{-1}p + i\xi} \sqrt{c_1^{-1}p - i\xi}$$

Справа берутся те ветви корней, для которых вещественная часть положительна при положительной вещественной части подкоренного выражения.

Используя (4.9), (4.10) и факторизацию функции  $D$ , находим решение уравнения (4.8)

$$(4.11) \quad \Phi_2(p, \xi) = A \frac{i\xi}{p^2} \frac{\sqrt{c_1^{-1}p - i\xi}}{p - ic_R\xi} D_+(p, \xi)$$

Отсюда и из (4.7) вытекает формула

$$(4.12) \quad \Phi_1(p, \xi) = A \frac{(\xi^2 + \eta_2^2) D_+(p, \xi)}{2p^2 \sqrt{c_1^{-1}p + i\xi} (p - ic_R\xi)}$$

Подставляя (4.5), (4.6) в (4.1), получаем

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \zeta_1^{IF}(p, \xi, x_2) &= \Phi_2(p, \xi) \left( \frac{\xi^2 + \eta_2^2}{2\eta_1} \exp(-\eta_1 x_2) - \eta_2 \exp(-\eta_2 x_2) \right) \\ \zeta_2^{IF}(p, \xi, x_2) &= -\Phi_2(p, \xi) \left( \frac{\xi^2 + \eta_2^2}{2i\xi} \exp(-\eta_1 x_2) + i\xi \exp(-\eta_2 x_2) \right) \end{aligned}$$

Найдем значение постоянной  $A$ , при котором справедливо равенство  $\zeta^I(0, x_1, x_2) = Z^I(x_1, x_2)$ .

Из (4.13), (4.11) выведем следующие асимптотики при  $p \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \zeta_1^{IF}(p, \xi, x_2) &\sim \Phi_2(p, \xi) \left( \frac{(c_2^{-2} - c_1^{-2})(\xi^2 + \eta_2^2) p^2 x_2}{4\eta_1 |\xi|} - \frac{c_1^{-2} p^2}{2|\xi|^2} \right) \times \\ &\times \exp(-|\xi| x_2) \sim \frac{A}{2c_R} \left( c_1^{-2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (\xi - i0)^{-1/2} - \right. \\ &\left. - (c_2^{-2} - c_1^{-2}) x_2 \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (\xi + i0)^{1/2} \right) \exp(-|\xi| x_2) \end{aligned}$$

Отсюда в координатах  $r, \theta$  получаем

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \zeta_1^I(0, x_1, x_2) &= A c_R^{-1} \pi^{1/2} r^{-1/2} \times \\ &\times [1/4 (5c_1^{-2} - c_2^{-2}) \cos^{1/2}\theta + 1/4 (c_2^{-2} - c_1^{-2}) \cos^{5/2}\theta] \end{aligned}$$

Аналогично

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \zeta_2^I(0, x_1, x_2) &= A c_R^{-1} \pi^{1/2} r^{-1/2} / 4 \times \\ &\times [(c_1^{-2} - 5c_2^{-2}) \sin^{1/2}\theta + (c_2^{-2} - c_1^{-2}) \sin^{5/2}\theta] \end{aligned}$$

Сравнивая (4.14), (4.15) с асимптотикой (3.3), находим

$$(4.16) \quad A = \frac{c_1^2 c_R}{\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa - 1}{1 + \kappa}$$

Функция  $\zeta^{\text{II}}$  строится аналогично. Приведем окончательные формулы

$$\zeta_1^{\text{IIF}}(p, \xi, x_2) = -\Psi(p, \xi) \left( i\xi \exp(-\eta_1 x_2) + \frac{\xi^2 + \eta_2^2}{2i\xi} \exp(-\eta_2 x_2) \right)$$

$$\zeta_2^{\text{IIF}}(p, \xi, x_2) = \Psi(p, \xi) \left( \eta_1 \exp(-\eta_1 x_2) - \frac{\xi^2 + \eta_2^2}{2\eta_2} \exp(-\eta_2 x_2) \right)$$

$$\Psi(p, \xi) = A \frac{i\xi}{p^2} \frac{\sqrt{c_2^{-1}p - i\xi}}{p - ic_R \xi} D_+(p, \xi)$$

**5. Выражение для коэффициента интенсивности растягивающих напряжений.** В силу четности функции  $T$  коэффициент интенсивности напряжений  $K_{\text{II}}$  равен нулю. Применяя формулу Парсеваля к (3.4), находим

$$(5.1) \quad K_{\text{I}}(p) = -4\pi\gamma c_1^{-2} p^2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T^F(p, \xi, x_2) \Phi_1^F(p, -\xi, x_2) d\xi dx_2 = \\ = -4\pi\gamma c_1^{-2} p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau(p, \xi) (\sqrt{p + \xi^2} + \eta_1)^{-1} \Phi_1(p, -\xi) d\xi$$

Используя формулы (2.2), (4.12), (2.1), получаем

$$(5.2) \quad K_{\text{I}}(p) = -\frac{2\pi A \gamma c_1^{-3/2} c_2^{-2} D_+(1, 0)}{p^{1/2} (p^{1/2} + c_1^{-1} p)} + A \gamma c_1^{-2} p^{-3/4} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p^{1/2} + i\xi)^{-1/2}}{i(\xi - i0)} (\sqrt{p + \xi^2} + \eta_1)^{-1} \frac{(\xi^2 + \eta_2^2) D_+(p, -\xi)}{\sqrt{c_1^{-1} p - i\xi} (p + ic_R \xi)} d\xi$$

Интегрирование по оси  $\text{Im } \xi = 0$  можно заменить интегрированием против часовой стрелки) по замкнутому контуру, расположенному в полуплоскости  $\text{Im } \xi < 0$  и охватывающему точки  $-ic_1^{-1}p$ ,  $-ip^{1/2}$ , или, после замены переменной  $i\xi = s$ , интегрированием по отрезку  $(c_1^{-1}p, p^{1/2}$  от скачка на нем подынтегрального выражения. Следовательно

$$(5.3) \quad K_{\text{I}}(p) = -\frac{2\pi A \gamma c_1^{-3/2} c_2^{-2} D_+(1, 0)}{p^{1/2} (p^{1/2} + c_1^{-1} p)} + J(p)$$

где

$$(5.4) \quad J(p) = -2 \frac{A \gamma p^{-3/4} c_1^{-2}}{c_1^{-2} p^2 - p} \int_{c_1^{-1} p}^{p^{1/2}} \frac{D_+(p, is)}{s} \frac{\sqrt{p^{1/2} - s}}{\sqrt{s - c_1^{-1} p}} \frac{c_2^{-2} p^2 - 2s^2}{p - c_R s} ds$$

Переходя к оригиналам в формуле (5.3), заключаем, что

$$(5.5) \quad K_{\text{I}}(t) = 2\pi A \gamma c_1^{-3/2} c_2^{-2} D_+(1, 0) \times \\ \times (\exp(c_1^2 t) \text{erfc}(c_1 t^{1/2}) - 1) + j(t)$$

$$j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \exp(tp) J(p) dp, \quad \alpha > 0$$

Так как функция  $J(p)$  — аналитическая в плоскости с разрезом по отрицательной оси, то последний интеграл преобразуем к виду

$$j(t) = \frac{c_1^2}{2\pi i} \int_S (\exp(c_1^2 tq) - 1) J(c_1^2 q) dq$$

где путь интегрирования  $S$  проходит по нижнему берегу отрицательной части вещественной оси, а затем — по верхнему. В результате замены

переменной  $s = [(q^{1/2} - q)x + q] c_1$  в интервале (5.4) получим

$$J(c_1^2 q) = - \frac{2A\gamma c_1^{-1/2} q^{-3/4} (q^{1/2} - q)}{q^2 - q} H(-q^{-1/2})$$

Здесь

$$(5.6) \quad H(s) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x} \frac{(\beta_2^2 - 2(1 - (1+s)x)^2) Q(1 - (1+s)x)}{(1 + \beta_R^{-1}(1 - (1+s)x))(1 - (1+s)x)}} dx$$

$$(5.7) \quad Q(\xi) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_1^{\beta_2} \frac{\psi(\alpha)}{\alpha + \xi} d\alpha \right]$$

$$\psi(\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{4\alpha^2 \sqrt{\beta_2^2 - \alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - 1}}{(2\alpha^2 - \beta_2^2)^2}$$

$$(\beta_2 = c_1 c_2^{-1}, \beta_R = c_1 c_R^{-1})$$

Используя соотношение  $H(-s) = \overline{H(s)}$ , преобразуем выражение для функции  $j$  к виду

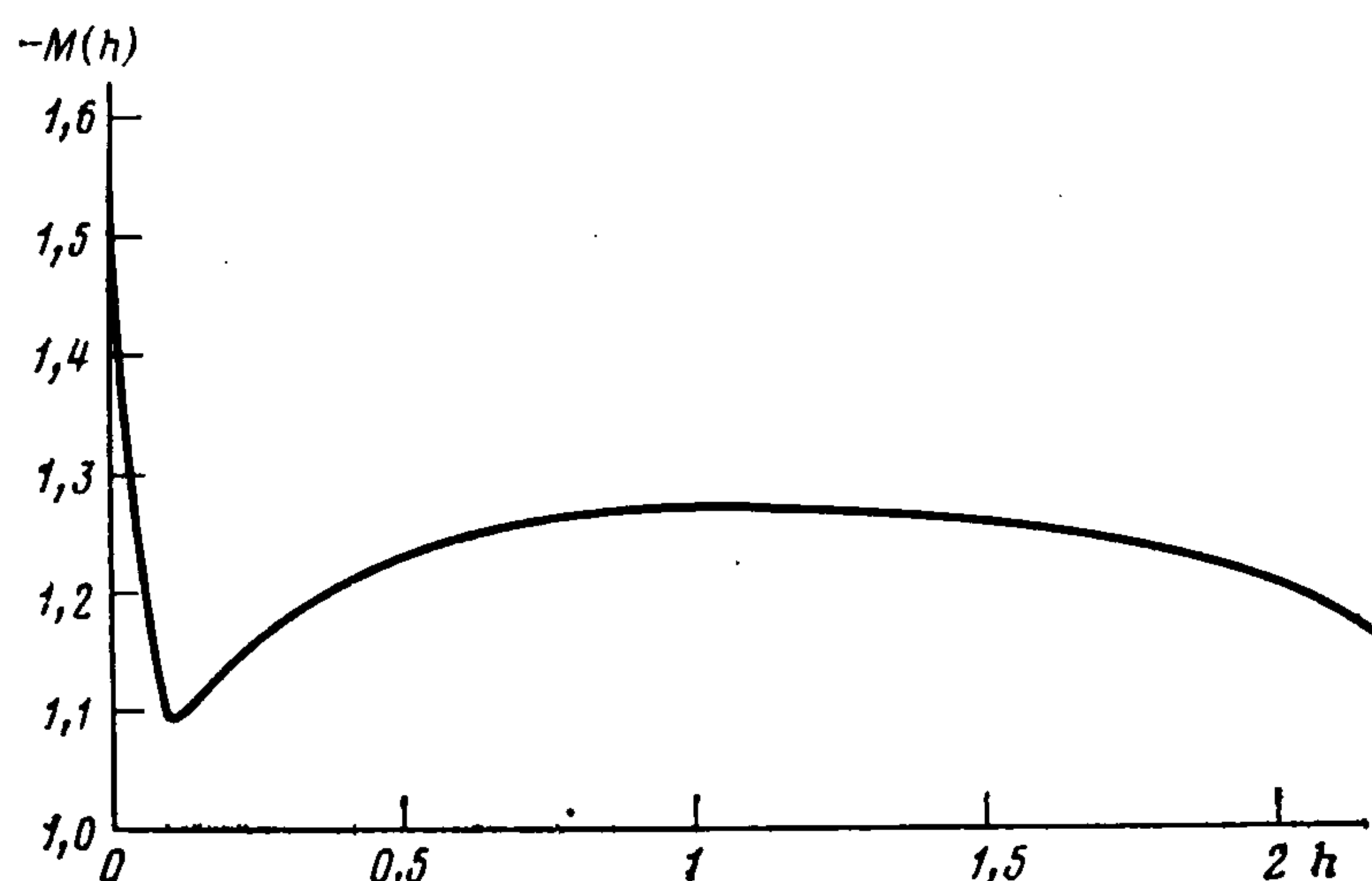
$$j(t) = \frac{2\gamma}{\pi^2 \beta_R c_1^{1/2}} \frac{\kappa - 1}{1 + \kappa} \int_0^\infty (1 - \exp(-c_1^2 t z^2)) z^{-3/2} \times \\ \times \operatorname{Im} \left( \frac{1+i}{z-i} H\left(\frac{i}{z}\right) \right) dz$$

Подставляя полученное выражение для  $j$  в (5.5) и отказываясь от предположения  $a = 1$ ,  $T_0 = 1$ , приходим к представлению для коэффициента интенсивности растягивающих напряжений:

$$(5.8) \quad K_I(t) = T_0 \gamma \frac{\kappa - 1}{1 + \kappa} a^{1/2} t^{1/4} M(ac_1^{-1} t^{-1/2})$$

$$(5.9) \quad M(h) = \frac{\sqrt{2} \beta_2^2 Q(0)}{\beta_R} h^{1/2} [\exp(h^{-2}) \operatorname{erfc}(h^{-1}) - 1] + \\ + \frac{2h^{1/2}}{\pi^2 \beta_R} \int_0^\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{z^2}{h^2}\right)\right) z^{-3/2} \operatorname{Im} \left( \frac{1+i}{z-i} H\left(\frac{i}{z}\right) \right) dz$$

(функции  $H$ ,  $Q$  введены в (5.6), (5.7)). Отметим, что вид функции  $M$  вполне определяется коэффициентом Пуассона. На фигуре приведен график функции  $M$  при  $\nu = 0,3$ .



6. Асимптотика  $K_I(t)$ . Из формулы (5.7) вытекает, что  $Q$  — гладкая функция при  $\operatorname{Re} \xi \geq 0$ , причем

$$Q(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi \xi} \int_1^{\beta_2} \psi(\alpha) d\alpha + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

Отсюда следуют асимптотики

$$H(\tau) = -\pi\beta_R + O(|\tau|^{-1}), \quad |\tau| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \tau \geq 0$$

$$H(\tau) = H(0) + O(|\tau|), \quad |\tau| \rightarrow 0$$

Подставляя полученные соотношения в (5.9), находим

$$(6.1) \quad M(h) = -\frac{4}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + O(h^{1/2}), \quad h \rightarrow 0$$

$$(6.2) \quad M(h) = -\frac{2\sqrt{2}\beta_2^2}{\beta_R\sqrt{\pi}} h^{-1/2} + O(h^{-1}), \quad h \rightarrow \infty$$

Это позволяет написать следующие асимптотические формулы:

$$(6.3) \quad K_I(t) \sim -\frac{4}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) T_0 \gamma \frac{\kappa-1}{1+\kappa} a^{1/2} t^{1/4}, \quad c_1^{-1}a \ll t^{1/2}$$

$$(6.4) \quad K_I(t) \sim -\frac{2\sqrt{2}\beta_2^2}{\beta_R\sqrt{\pi}} T_0 \gamma \frac{\kappa-1}{1+\kappa} Q(0) (c_1 t)^{1/2}, \quad c_1^{-1}a \gg t^{1/2}$$

В обоих случаях при внезапном охлаждении ( $T_0 < 0$ ) возникают растягивающие напряжения, а при нагреве ( $T_0 > 0$ ) — сжимающие. Первая из приведенных асимптотик совпадает с полученной в [5] для квазистатической температурной задачи (т. е. при  $c_1 = 0$ ).

В случае  $T_0 < 0$  из асимптотики  $K_I$  выводится асимптотика момента  $t^*$  начала распространения трещины. Действительно,  $t^*$  — наименьший момент времени, удовлетворяющий уравнению  $K_I(t^*) = K_{IC}$ , где  $K_{IC}$  — критическое значение коэффициента интенсивности растягивающих напряжений. В силу (5.8) это уравнение равносильно следующему:

$$h^{-1/2}M(h) = \left(T_0 \gamma \frac{\kappa-1}{1+\kappa}\right)^{-1} \frac{K_{IC} c_1^{1/2}}{a}, \quad h = \frac{c_1^{-1}a}{(t^*)^{1/2}}$$

Используя асимптотику (6.1), находим, что

$$(6.5) \quad t^* \sim \left(\frac{\pi(1+\kappa)K_{IC}}{4\Gamma(3/4)\gamma(\kappa-1)a^{1/2}T_0}\right)^4, \quad |T_0|\gamma a c_1^{-1/2} \ll K_{IC}$$

а из (6.2) следует соотношение

$$(6.6) \quad t^* \sim \left(\frac{\sqrt{\pi}\beta_R(1+\kappa)K_{IC}c_1^{-1/2}}{2\sqrt{2}\beta_2^2\gamma(\kappa-1)Q(0)T_0}\right)^4, \quad |T_0|\gamma a c_1^{-1/2} \gg K_{IC}$$

Первая из этих асимптотик совпадает с квазистатической [5], а вторая существенно зависит от инерционного члена в динамических уравнениях теории упругости. Отметим еще, что при больших значениях коэффициента температуропроводности  $a$  время разрушения асимптотически не зависит от  $a$ .

**7. Случай ограниченной области.** Пусть  $\Omega_0$  — плоская область с гладкой границей  $\Gamma_0$ . В  $\Omega_0$  имеется прямолинейный разрез  $l$ , соединяющий начало координат  $O(0, 0) \in \Omega_0$  с точкой  $A \in \Gamma_0$ . Под  $\Gamma$  будем понимать контур  $\Gamma_0$ , дополненный дважды пройденным отрезком  $l$ , а под  $\Omega$  — область, ограниченную  $\Gamma$ .

Температура  $\Lambda$  определяется из решения краевой задачи

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \partial\Lambda/\partial t - a^2\Delta\Lambda &= 0 \text{ на } \Omega \times (0, \infty) \\ \Lambda &= T_0 \text{ на } \Gamma \times (0, \infty), \quad \Lambda = 0 \text{ при } t = 0 \end{aligned}$$

Вектор смещений  $v$ , порожденный этим температурным полем, находится из решения следующей краевой задачи ( $n, \tau$  — нормаль и касатель-

вая к  $\Gamma$ ):

$$(7.2) \quad \begin{aligned} & -\rho \partial^2 v / \partial t^2 + \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} v = \\ & = \gamma \operatorname{grad} \Lambda \quad \text{на } \Omega \times (0, \infty) \\ & \lambda \operatorname{div} v + 2\mu \partial v_n / \partial n = \gamma \Lambda \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ & \mu (\partial v_n / \partial \tau + \partial v_\tau / \partial n) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ & v = \partial v / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned}$$

Обозначим  $K_j^{(l)}$  ( $j = I, II$ ) коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины  $l$ , сохранив обозначение  $K_I$  для коэффициента интенсивности растягивающих напряжений в случае плоскости с полубесконечным разрезом. Пусть  $s$  — расстояние от вершины трещины  $l$  до границы  $\Gamma_0$ . Будем считать  $s$  характерным размером области  $\Omega$ .

Основную информацию о  $K_I^{(l)}(t)$  и  $K_{II}^{(l)}$  можно получить комбинируя формулу (5.8) для  $K_I(t)$  с оценками

$$(7.3) \quad \begin{aligned} & |K_I^{(l)}(t) - K_I(t)| \leq L, \quad |K_{II}^{(l)}(t)| \leq L \\ & L = C_N T_0 s^{1/2} \gamma (a^2 t / s^2)^N, \quad 2t \leq c_1^{-1} s, \quad at^{1/2} \leq 1 \end{aligned}$$

где  $N$  — любое положительное число, величина  $C_N$  зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$ , числа  $N$  и геометрии границы  $\Gamma_0$ , но не зависит от  $T_0, l, a, t$ .

Отсюда, в частности, вытекает, что для  $K_I^{(l)}(t)$  справедлива асимптотическая формула (6.3) в зоне  $2a^2 s^{-2} t < c_1^{-2} a^2 t^{-1} \ll 1$  и асимптотическая формула (6.4) в зоне  $a^2 s^{-2} t \ll 1 \leq c_1^{-2} a^2 t^{-1}$ . Асимптотика (6.5) для момента разрушения имеет место при

$$|T_0| \gamma a c_1^{-1/2} \ll K_{IC} \ll |T_0| \gamma a^{1/2} c_1^{-1/4} s^{1/4}$$

а асимптотика (6.6) при

$$|T_0| \gamma \min \{sa^{-1} c_1^{1/2}, ac_1^{-1/2}\} \gg K_{IC}$$

Поясним, как получаются оценки (7.3). Из соображений размерности и в силу линейности задачи можно ограничиться случаем  $a = 1, l = 1, T_0 = 1, \gamma = 1$ .

Обозначим  $T, u$  решение задачи (7.1), (7.2) в случае, когда  $\Omega$  совпадает с плоскостью с разрезом и положим  $\Lambda_1 = \Lambda - T, u^{(1)} = u - v$ . Коэффициенты интенсивности напряжений, порождаемых смещениями  $u^{(1)}$ , обозначим  $Q_j(t)$  ( $j = I, II$ ).

Для  $\Lambda_1$  получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} & \partial \Lambda_1 / \partial t - \Delta \Lambda_1 = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, \infty) \\ & \Lambda_1 = 0 \quad \text{на } l, \quad \Lambda_1 = 1 - T \quad \text{на } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ & \Lambda_1 = 0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned}$$

Пусть  $B_d$  — круг с центром в точке  $O$  радиуса  $d, 2d \leq s$ . Согласно оценке, полученной ранее ([5], п. 3),  $\|\Lambda_1(t, \cdot)\|_{L_2(B_d)} \leq C_N t^N$ . Отсюда и из известной локальной энергетической оценки следует, что  $\|\operatorname{grad} \Lambda_1(t, \cdot)\|_{L_2(B_d)} \leq C_N t^N$ . Применяя эти оценки к  $\partial^k \Lambda_1 / \partial t^k$ , находим

$$\|\partial^k \Lambda_1(t, \cdot) / \partial t^k\|_{L_2(B_d)} + \|\partial^k \operatorname{grad} \Lambda_1(t, \cdot) / \partial t^k\|_{L_2(B_d)} \leq C_N t^N \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Вектор смещений  $u^{(1)}$  удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} & -\rho \partial^2 u^{(1)} / \partial t^2 + \mu \Delta u^{(1)} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u^{(1)} = \operatorname{grad} \Lambda_1 \\ & \sigma_{22}(u^{(1)}) = \sigma_{21}(u^{(1)}) = 0 \quad \text{на } l \times (0, \infty) \\ & \sigma_{nn}(u^{(1)} - u) = -\Lambda, \quad \sigma_{n\tau}(u^{(1)} - u) = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ & u^{(1)} = \partial u^{(1)} / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned}$$

Используя стандартную энергетическую оценку для решений динамической системы Ламе, заключаем, что

$$\|\partial^k u^{(1)}(t, \cdot) / \partial t^k\|_{L_2(B_{d-c_1 t})} \leq C_N t^{N-1} \quad \text{при } c_1 t < d$$

Следовательно,  $\mu \Delta u^{(1)} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u^{(1)} = O(t^N)$  в  $B_{d-c_1 t}$ . Кроме того,  $\sigma_{22}(u^{(1)}) = \sigma_{21}(u^{(1)}) = 0$  при  $x_2 = 0$ ,  $c_1 t - d < x_1 < 0$ . Применяя локальные оценки решений эллиптической системы Ламе и представления для интенсивности напряжений в стационарном случае [1, 5], получаем оценку  $|Q_j(t)| \leq C_N t^N$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. В. 76. С. 29—60.
2. Даниловская В. Г. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 317—318.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
4. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
5. Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З. Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений в квазистатических температурных задачах для области с разрезом // ПММ. 1985. Т. 43. Вып. 4. С. 627—636.
6. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение. 1985. 263 с.
7. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение. 1980. 344 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.1.1987