

УДК 539.375

## ДИНАМИКА РОСТА ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА ПРИ РАСКЛИНИВАНИИ ЕЕ ПОТОКОМ ГАЗА

Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А.

Рассматривается распространение с постоянной скоростью плоской трещины нормального отрыва в упругой среде под действием расклинивающего потока сжимаемого газа. Построено автомодельное решение. Показана возможность образования ударных волн торможения в потоке газа.

Разрушение прозрачных материалов под действием мощного сфокусированного лазерного излучения, как правило, происходит с образованием трещин [1, 2]. Поглощение света прозрачными материалами сопровождается образованием областей высокой температуры и давления, что приводит к деструкции материала и формированию газового пузырька. Под действием избыточного давления газа происходит расклинивание материала и образование трещин. Газообразные продукты деструкции проникают из полости в трещины. С течением времени суммарное давление на берега трещин увеличивается, что приводит к дальнейшему росту трещин под действием расклинивающего потока газа. Подобная картина реализуется и в методе интенсификации добычи нефти и газа при разрыве пласта порохами газами [3], когда газы действуют на поверхность трещины подобно клину; образующиеся при этом трещины могут иметь достаточно большие размеры.

Экспериментально установлено, что при высоком давлении газов в камуфлетной полости в течение длительного промежутка времени распространение трещины от полости происходит с постоянной скоростью, а затем медленно убывает [2, 4].

Автомодельные задачи о развитии трещин с постоянной скоростью рассматривались в ряде работ [5—8]. Изучено [6] напряженное состояние растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза, нагружаемого изнутри сосредоточенными силами. Получены решения плоской [7] и осесимметричной задачи [8] о распространении трещины в упругой среде под действием однородного растягивающего напряжения.

**1. Постановка задачи.** Движение изотермического газа, проникающего в трещину, описывается уравнениями сохранения массы и количества движения

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w u) = 0, \quad P = c^2 \rho$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial x} P = -F$$

( $P, \rho$  — давление и плотность газа,  $u$  — скорость движения газа по трещине,  $c$  — изотермическая скорость звука,  $w$  — раскрытие трещины,  $F$  — сила сопротивления при движении газа по трещине).

Для больших чисел Рейнольдса ( $uw/v > 750$ ) сила сопротивления описывается квадратичным законом

$$(1.2) \quad F = \frac{1}{4} \lambda_s w^{-1} \rho u |u|$$

где  $\lambda_s$  — коэффициент, зависящий, в общем случае, от числа Рейнольдса и шероховатости трещины.

Упругие смещения среды удовлетворяют уравнениям [5—6]

$$(1.3) \quad w_i = u_i + v_i, \quad \Delta u_i = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i, \quad \Delta v_i = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_i; \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1 = \frac{\partial}{\partial x} u_2, \quad \frac{\partial}{\partial x} v_1 = -\frac{\partial}{\partial y} v_2 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Здесь  $u_i(x, y, t)$ ,  $v_i(x, y, t)$  — потенциальные и соленоидальные компоненты вектора смещения  $w(x, y, t)$ ;  $c_1, c_2$  — скорости продольных и поперечных волн ( $c_1 > c_2$ ).

Компоненты тензора напряжений связаны со смещениями следующими выражениями ( $\mu$  — постоянная Ламе):

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu[(c_1/c_2)^2 \operatorname{div} w - 2\partial w_2/\partial x] \\ \sigma_{yy} &= \mu[(c_1/c_2)^2 \operatorname{div} w - 2\partial w_1/\partial x], \quad \sigma_{xy} = \mu \operatorname{div} w \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия для уравнений (1.3), (1.4), описывающих распространение разреза в упругой среде, имеют вид ( $v$  — скорость трещины)

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} &= -P(x, t), \quad \sigma_{xy} = 0; \quad y = 0, \quad |x| \leq vt \\ w_2 &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \quad y = 0, \quad vt < |x| < c_1 t \end{aligned}$$

Предполагаем, что на кончиках трещины компонента тензора напряжений  $\sigma_{yy}$  имеет корневую особенность

$$(1.6) \quad \sigma_{yy}(x, y=0, t) \xrightarrow{x \rightarrow vt} \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi(x-vt)}}$$

где  $K_I(t)$  — коэффициент интенсивности напряжений.

Для системы уравнений (1.1), описывающей движение газа в распространяющейся трещине, используем следующие граничные условия:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} P(x=0, t) &= P_0, \quad u(x=0 \pm 0, t) = \pm u_*, \quad u(x = \pm l(t), t) = \\ &= \pm v \end{aligned}$$

( $P_0, u_*$  — постоянные,  $2l(t)$  — длина трещины в момент времени  $t$ ).

Для решения системы уравнений (1.1) при дозвуковом втекании газа в трещину ( $u_* < c$ ) в точке  $x = 0$  достаточно одного граничного условия, например первого из (1.7), при сверхзвуковом втекании ( $u_* > c$ ) необходимы оба условия (1.7) в этой точке [9].

**2. Автомодельная задача.** Задача (1.1) — (1.7) автомодельна с переменной  $\xi = x/(vt)$ . Динамические характеристики — давление, скорость и раскрытие трещины — могут быть представлены в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} P(x, t) &= P_0 P_a(\xi), \quad u(x, t) = v u_a(\xi), \quad \varepsilon = (v/c)^2 \\ w(x, t) &= w_0 t w_a(\xi), \quad w_0 = \frac{1}{4} \lambda_s v \varepsilon \end{aligned}$$

где  $w_0$  — постоянная размерности скорости.

Уравнения (1.1) и условия (1.7), записанные в автомодельных переменных (2.1), имеют вид (далее индекс  $a$  у автомодельных переменных опущен)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} d \ln P / d \xi &= -\varepsilon(u - \xi) du / d \xi - u^2 w^{-1} \\ \frac{du}{d \xi} &= \frac{[(u - \xi) w^{-1} [u^2 - dw/d \xi] - 1]}{1 - \varepsilon(u - \xi)^2} \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad P(\xi = 0) = 1, \quad u(\xi = 0 \pm 0) = \pm u_*/v, \quad u(\xi \rightarrow \pm 1) = 1$$

Условия Гюгонио для системы уравнений (1.1) в автомодельных переменных можно представить в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} [P(u - \xi)] &= 0, \quad [P + \varepsilon(u - \xi)^2 P] = 0 \\ ([f] &= f(\xi + 0) - f(\xi - 0)) \end{aligned}$$

Для определения профиля трещины  $w(\xi)$  при нагружении  $\sigma_{yy} = -P_0 P(\xi)$  используем метод функционально-инвариантных решений

Смирнова — Соболева [5, 6], введя функции

$$(2.5) \quad U_i = \partial u_i / \partial t, \quad V_i = \partial v_i / \partial t$$

При этом функция  $U_i$  удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн,  $V_i$  — для поперечных волн. Эти функции можно представить как вещественные части аналитических функций от комплексных переменных  $z_1$  и  $z_2$

$$U_i \left( \frac{x}{c_1 t}, \frac{y}{c_1 t} \right) = \operatorname{Re} U_i^1(z_1), \quad V_i \left( \frac{x}{c_1 t}, \frac{y}{c_1 t} \right) = \operatorname{Re} V_i^1(z_2)$$

$$\left( z_k = \frac{xt - iy \sqrt{t^2 - c_k^{-2}(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, \quad k = 1, 2 \right)$$

Удовлетворяя двум последним соотношениям системы уравнений (1.3) и условию  $\sigma_{xy} = 0$  при  $y = 0$ , выразим  $V_i^1(z)$ ,  $U_i^1(z)$  через аналитическую функцию  $W(z)$  (штрих означает производную по  $z$ )

$$(2.6) \quad U_1^{1'} = \frac{z(c_2^{-2} - 2z^2)}{c_2^{-2} \sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W', \quad U_2^{1'} = -\frac{2z \sqrt{c_2^{-2} - z^2}}{c_2^{-2}} W'$$

$$V_1^{1'} = \frac{c_2^{-2} - 2z^2}{c_2^{-2}} W', \quad V_2^{1'} = \frac{2z}{c_2^{-2}} W'$$

При  $y = 0$  из (1.4) имеем

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} = \frac{\mu}{t} \operatorname{Re} \left[ -\frac{S(z) z W'}{c_2^{-2} \sqrt{c_1^{-2} - z^2}} \right]$$

$$S(z) = (c_2^{-2} - 2z^2)^2 + 4z^2 \sqrt{c_1^{-2} - z^2} \sqrt{c_2^{-2} - z^2}$$

В плоскости комплексного переменного  $z$  сформулируем граничную задачу для функции  $W'$ . Из (1.5) с учетом (2.7) получим

$$(2.8) \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| > v^{-1}, \quad \operatorname{Im} W' = -\frac{tc_2^{-2} \sqrt{z^2 - c_1^{-2}}}{\mu z S(z)} y \sigma_{yy} / \partial t$$

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad c_2^{-1} < |\operatorname{Re} z| < v^{-1}, \quad \operatorname{Re} W' = 0$$

$$\operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| < c_2^{-1}, \quad \operatorname{Re} W' = 0$$

Таким образом задача (1.3)–(1.6) сводится к смешанной задаче Келдыша — Седова для функции  $W'$ , решение которой может быть представлено в виде [6]

$$(2.9) \quad W' = \frac{c_1 z}{v^3 (v^{-2} - z^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-v/c_1}^{v/c_1} ds \frac{(s^2 - v^2/c_1^2)^{3/2} \operatorname{Im} W'}{s^2 (s - 1/(c_1 z))} + i \frac{A}{c_1 z} \right\}$$

Постоянная  $A$  находится из уравнения

$$(2.10) \quad \sigma_{yy}(vt - 0, 0, t) = -P(vt, t)$$

Аппроксимируем давление газа в трещине конечной суммой

$$(2.11) \quad P(x, t) \simeq P_0 \sum_{j=1}^M P_j [\delta_0(\xi_j - \xi) - \delta_0(-\xi_j - \xi)]$$

где  $\delta_0(x)$  — единичная функция Хевисайда.

Уравнения теории упругости линейны, поэтому профиль раскрытия трещины и коэффициент интенсивности напряжений аппроксимируются также конечными суммами

$$(2.12) \quad w(\xi) \simeq \sum_{j=1}^M P_j w^j(\xi), \quad K_I(t) \simeq \sum_{j=1}^M P_j K_I^j(t)$$

Здесь  $w^j(\xi)$ ,  $K_I^j(t)$  — раскрытие трещины и коэффициент интенсивности напряжений, которые соответствуют нагрузке  $P_0 [\delta_0(\xi_j - \xi) - \delta_0(-\xi_j - \xi)]$ . Найдем  $w^l(\xi)$  и  $K_I^l(t)$  для частного случая нагружения

$$(2.13) \quad P(x, t) = P_0 [\delta_0(\xi_l - \xi) - \delta_0(-\xi_l - \xi)]$$

Из (2.8) при  $y = 0$  имеем ( $\delta_1(x)$  — дельта-функция)

$$\begin{aligned} \text{Im } W' &= \frac{P_0 c_1^2 n^2 m^2 \xi_l^5}{\mu R(\xi_l)} \sqrt{1 - n^2 \xi_l^2} \times \\ &\times \left\{ \delta_1\left(\frac{1}{vz} - \xi_l\right) - \delta_1\left(\frac{1}{vz} + \xi_l\right) \right\}, \quad n = v/c_1, \quad m = v/c_2 \\ R(\xi_l) &= (2 - m^2 \xi_l^2)^2 - 4 \sqrt{1 - n^2 \xi_l^2} \sqrt{1 - m^2 \xi_l^2} \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (2.9) и введя безразмерную переменную  $s = vz$ , получим

$$(2.14) \quad \frac{dW}{ds} = \frac{Q(\xi_l) s^2}{(s^2 - 1)^{3/2}} \left\{ \frac{2\xi_l^{-1}}{s^2 - \xi_l^{-2}} - \frac{K}{s^2} \right\}$$

$$Q(\xi_l) = c_1 \frac{P_0}{\mu} \frac{n m^2 \xi_l^2}{\pi R(\xi_l)} \sqrt{1 - n^2 \xi_l^2} (1 - \xi_l^2)^{3/2}$$

Интегрируя соотношение (2.14), получим

$$(2.15) \quad W = a_0 + a_1 \left\{ \frac{Bs}{\sqrt{s^2 - 1}} + \frac{2}{\xi_l \sqrt{1 - \xi_l^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \xi_l^2} + \sqrt{1 - s^{-2}}}{\sqrt{\xi_l^2 - s^{-2}}} \right\}$$

$$a_1 = Q(\xi_l) \xi_l^2 (1 - \xi_l^2)^{-1}, \quad B = [K(1 - \xi_l^2) + 2\xi_l] \xi_l^{-2}$$

Компонента тензора напряжений  $\sigma_{yy}$  определяется из (2.7) и (2.14) на продолжении трещины

$$(2.16) \quad \sigma_{yy} = -P_0 \frac{\xi_l^2 \sqrt{1 - n^2 \xi_l^2} (1 - \xi_l^2)^{3/2}}{\pi R(\xi_l)} \times$$

$$\times \text{Re} \int_n^s d\eta \frac{\eta^6 \text{Re}(\eta^{-1})}{\sqrt{\eta^2 - n^2} (1 - \eta^2)^{3/2}} \left[ \frac{2\xi_l^{-1}}{\eta^2 - \xi_l^{-2}} - \frac{K}{\eta^2} \right]$$

Из граничных условий для аналитической функции

$$(2.17) \quad \begin{aligned} s \rightarrow \infty, \quad \text{Re } W(s) &= O(1), \quad \text{Im } W = 0 \\ \text{Im } s = 0, \quad |\text{Re } s| > 1, \quad \text{Im } W &= 0 \\ s \rightarrow \pm 1, \quad W(s) &= O[(s^2 - 1)^{-1/2}] \end{aligned}$$

и (2.15) получаем  $a_0 = 0$ . Зная потенциал  $W$  (2.15), из (2.5), (2.17) найдем профиль трещины. Так как

$$w^l(x, t) = w_2^l(x, y = 0, t) = t w_0 w^l(\xi) = \frac{x}{v} \int_1^{\xi^{-1}} ds \text{Re } W(s) |_{\text{Im } s = 0}$$

то

$$(2.18) \quad w^l(\xi) = \sigma_1 \sqrt{1 - \xi^2} - \frac{\sigma_2}{\xi_l^2 \sqrt{1 - \xi_l^2}} \kappa(\xi)$$

$$\kappa(\xi) = |\xi| \ln \frac{|1 - \zeta \xi_l / |\xi||}{1 + \zeta \xi_l / |\xi|} - \xi_l \ln \frac{|1 - \zeta|}{1 + \zeta}$$

$$\zeta = \left( \frac{1 - \xi^2}{1 - \xi_l^2} \right)^{1/2}, \quad \sigma_1 = \frac{a_1 B}{w_0}, \quad \sigma_2 = \frac{a_1}{w_0}; \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

Используя условие (2.10), из (2.16) получим

$$(2.19) \quad K = \frac{I_1}{I_2}, \quad I_k = \text{Re} \int_n^{1+0} d\eta \frac{R(\eta^{-1})}{\sqrt{\eta^2 - n^2} (1 - \eta^2)^{3/2}} J_k; \quad k = 1, 2$$

$$J_1 = 2\eta^6 \xi_l^{-1} (\eta^2 - \xi_l^{-2})^{-1}, \quad J_2 = \eta^4$$

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  в точке  $\eta = 1$  понимаются в смысле главного значения и выражаются через эллиптические интегралы ( $I_2$  [6])

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2\xi_l^{-1} \{n^2 [4 - q_1^{-2} (m^2 - 2n^2)^2 (\xi_l^{-2} - n^2)^{-1}] F(q_1) - \\
 &- 4m^2 F(q_2) + [4 - q_1^{-2} (m^2 - 2)^2 (\xi_l^{-2} - 1)^{-1}] E(q_1) - \\
 &- 4(1 - 2\xi_l^2) (1 - \xi_l^2)^{-1} E(q_2) + \xi_l^{-1} b_1 (m^2 \xi_l^2 - 2)^2 (1 - \\
 &- n^2 \xi_l^2)^{-1} [\Pi(k_1 d_1, d_1) - \Pi(k_1^{-1} d_1, d_1)] - \\
 &- 4\xi_l^{-1} b_2 [\Pi(k_2 d, d_2) - \Pi(k_2^{-1} d_2, d_2)] \} \\
 q_k &= \sqrt{1 - i_k^2}, \quad b_k = 4i (1 + i_k)^{-1} (1 - \xi_l^2)^{-1} \\
 k_k &= (1 + i_k \xi_l) / (1 - i_k \xi_l), \quad d_k = (1 - i) / (1 + i_k); \quad i_1 = n, \\
 i_2 &= m
 \end{aligned}$$

где  $F(q)$ ,  $E(q)$ ,  $\Pi(k, q)$  — полные эллиптические интегралы 1, 2 и 3-го рода соответственно.

Коэффициент интенсивности напряжений для нагрузки (2.13) находится из (2.16)

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad K_I^l(t) &= P_0 \sqrt{\frac{vt}{\pi}} \xi_l^2 (1 - \xi_l^2)^{3/2} \left( \frac{1 - n^2 \xi_l^2}{1 - n^2} \right)^{1/2} \frac{R(1)}{R(\xi_l)} \times \\
 &\times \left[ \frac{2\xi_l}{\xi_l^2 - 1} - \frac{I_1}{I_2} \right]
 \end{aligned}$$

Из (2.18), (2.19), (2.15) и (2.20) при  $\xi_l = 1$  следует решение задачи о распространении равномерно нагруженной трещины

$$w(x, t) = -t P_0 c_1 \mu^{-1} n m^2 I_2^{-1} \sqrt{1 - \xi^2}$$

Задача (2.2), (2.3) о распространении трещины, расклиниваемой потоком газа, решалась методом Рунге — Кутта четвертого порядка.

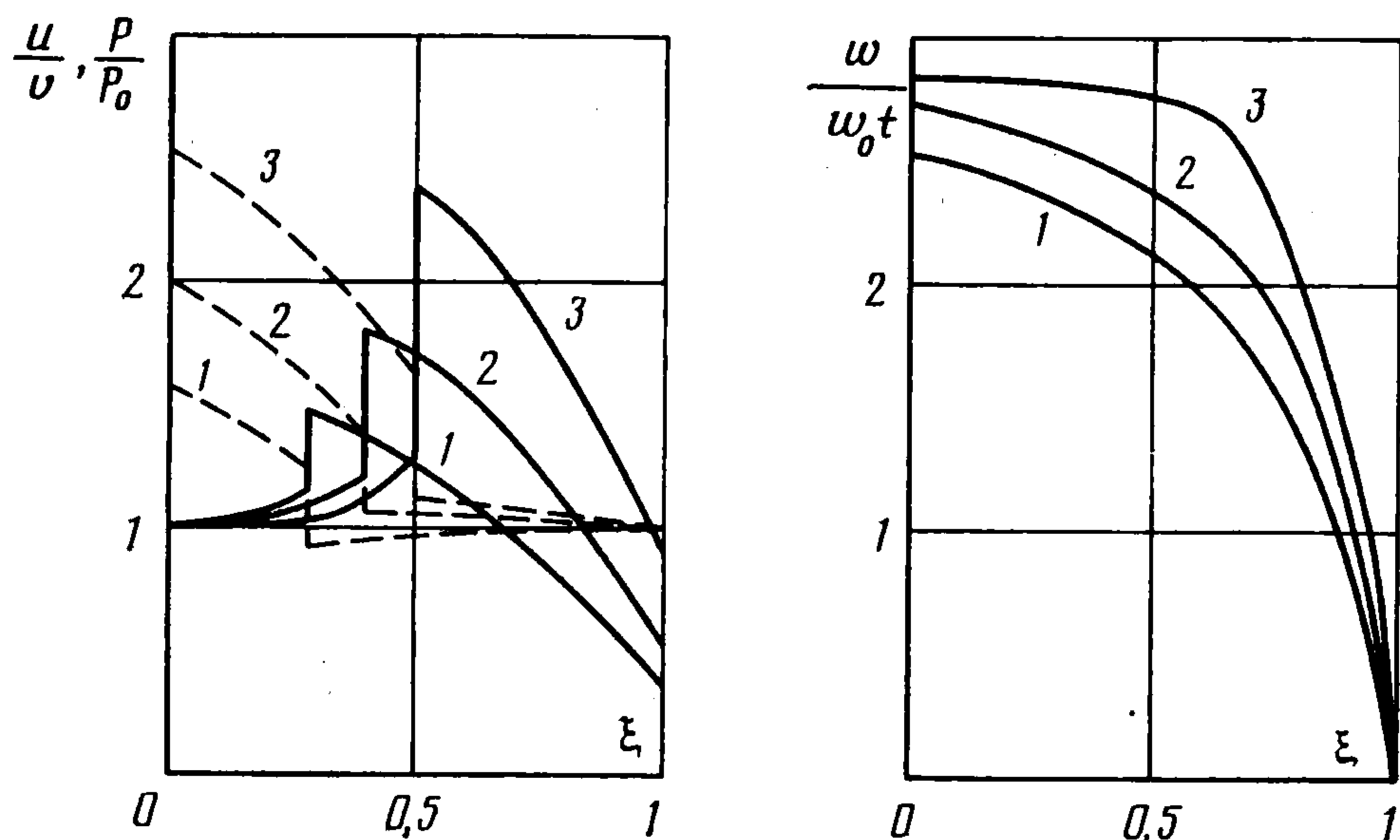
Профиль трещины в начале расчета задавался в виде:  $w^{(0)} = 1 - \xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Давление газа и скорость его движения в трещине определялись путем решения системы уравнений (2.2) с условием (2.3). При дозвуковом режиме движения газа в трещине использовалось одно из граничных условий (2.3). В этом случае решение системы (2.2) проводилось с обратным шагом от  $\xi = 1$  к  $\xi = 0$ . Для решения уравнений (2.2) при сверхзвуковом режиме течения газа в трещине учитывались оба граничных условия (2.3). При этом интегрирование (2.2) проводилось с двух концов интервала  $[0, 1]$ . Сшивка решений осуществлялась в случае выполнения условий Гюгонио (2.4). По рассчитанному давлению газа в трещине находились  $P_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ;  $N$  — число узлов сетки по  $\xi$ ). По формуле (2.12) восстанавливались раскрытие трещины  $w^{(1)}$  и коэффициент интенсивности напряжений  $K_I^{(1)}$ .

Значения  $w_j^l = w^l(x_j)$  и  $K_I^l$  вычислялись в начале расчета ( $l, j = 1, \dots, N$ ). Затем алгоритм решения повторялся с новым профилем  $w^{(1)}$  и т. д. до выполнения условия  $\|w^{(s+1)} - w^{(s)}\| \leq \delta$  ( $\delta = 10^{-5}$ ,  $s$  — число итераций). Сходимость достигалась при 6—7 итерациях.

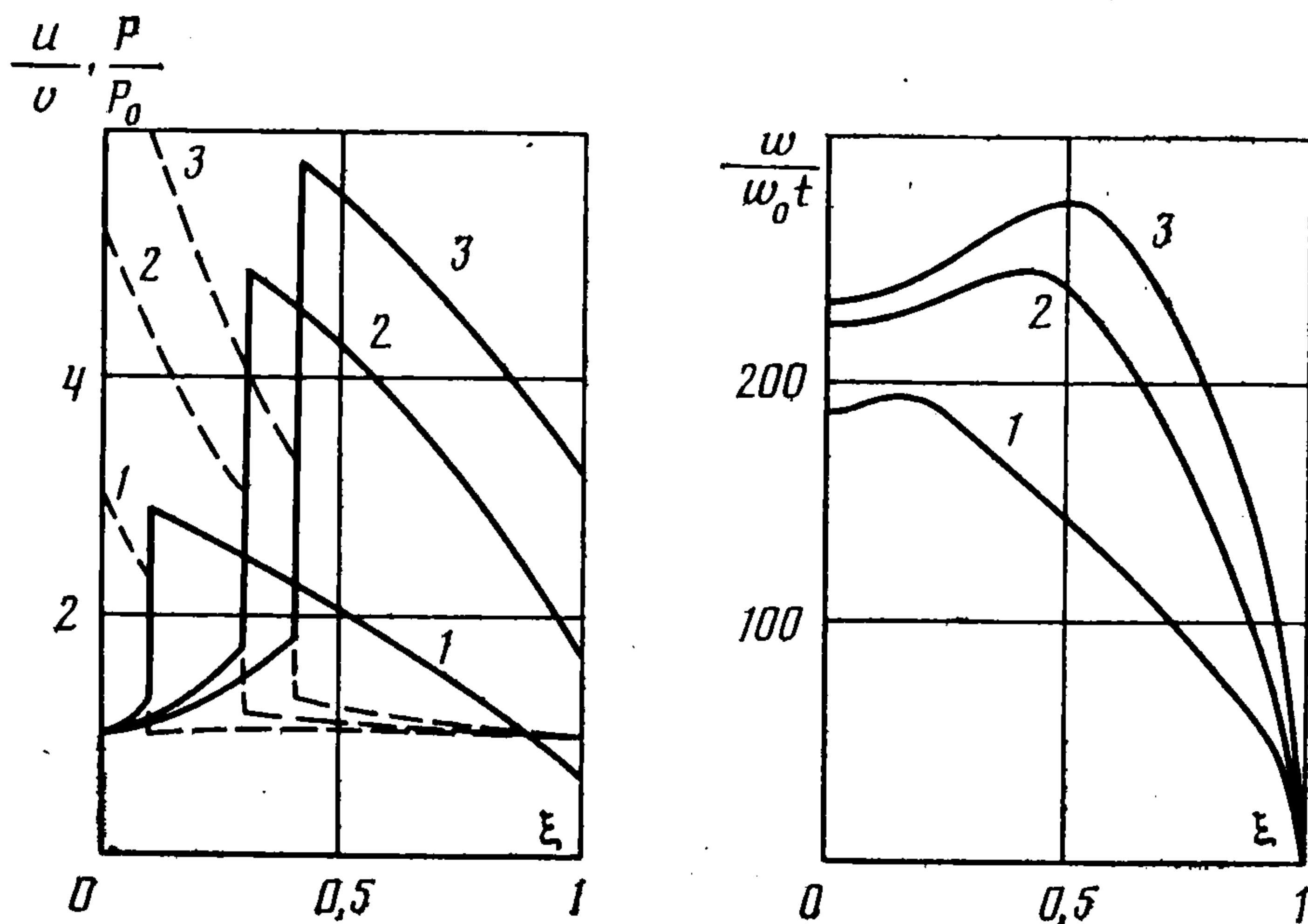
**3. Результаты и их обсуждение.** Рассмотрим результаты численного решения задачи (2.2), (2.3), (2.11), (2.12), (2.18), (2.20).

В случае, когда скорость распространения трещины в упругой среде  $v$  больше изотермической скорости звука в расклинивающем потоке газа, возможен только сверхзвуковой режим втекания газа в трещину ( $u_* > c$ ).

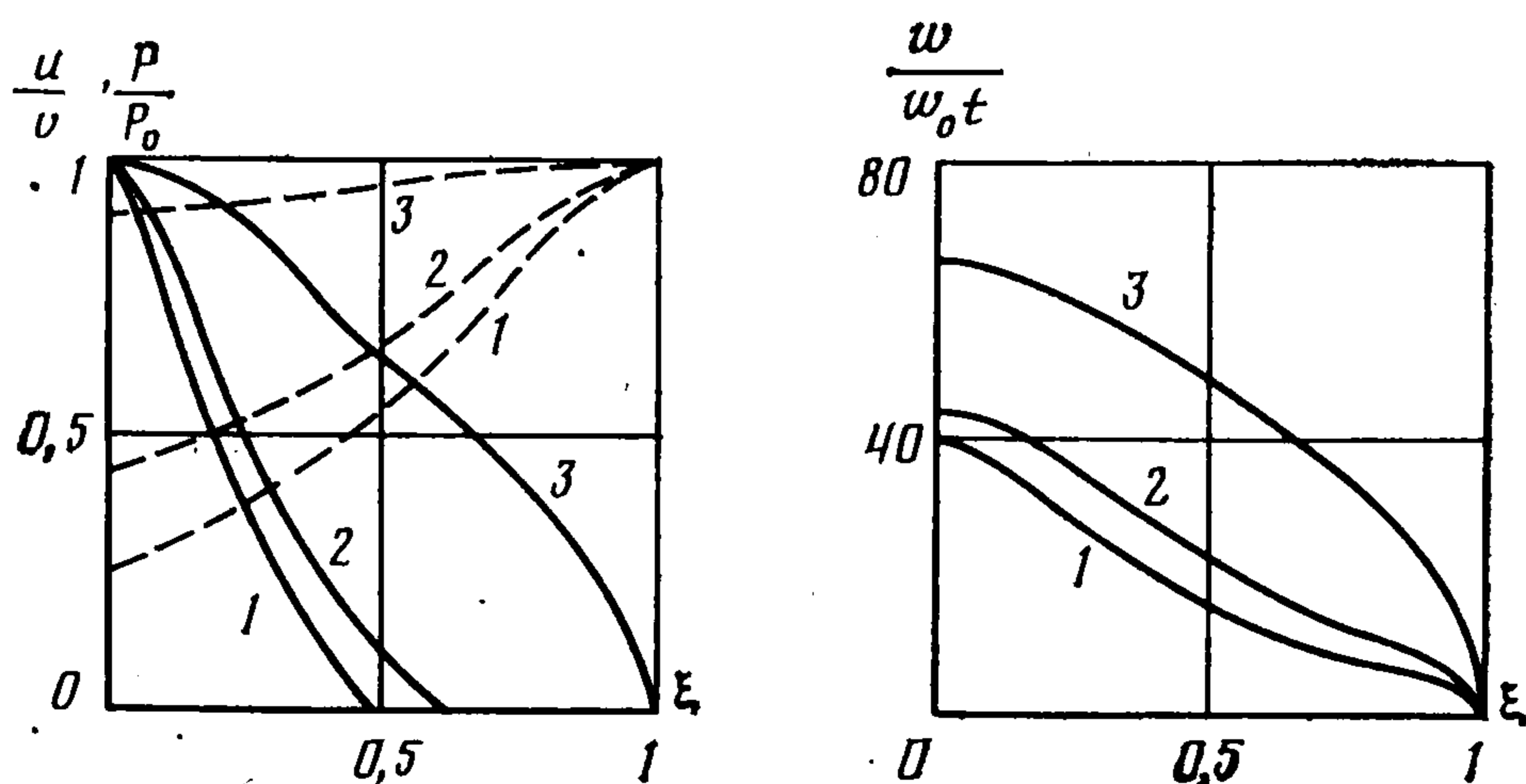
Фиг. 1 иллюстрирует профили раскрытия трещины  $w / (w_0 t)$ , давления  $P/P_0$  (сплошные кривые) и скорости газового потока  $u/v$  (штриховые линии) для  $u_*/c = 1,6; 2,0; 2,5$  (кривые 1—3). Эти расчеты были проведены при следующих значениях параметров:  $n = 0,2; m = 0,3; \varepsilon = 1,5; P_0/\mu = 0,33$ . Видно, что скорость газа в трещине уменьшается с увеличением  $\xi$ , а давление вначале увеличивается, а затем уменьшается. При



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

некотором значении  $\xi = \xi_0$  как давление, так и скорость изменяются скачком, после которого скорость движения газа практически равна скорости движения трещины ( $u \simeq v$ ).

Скачок в решении при  $\xi = \xi_0$  является ударной волной торможения (УВТ), фронт которой направлен против потока газа. Возникновение УВТ объясняется действием силы сопротивления на сверхзвуковой поток газа [9, 10]. Уменьшение скорости втекания газа в трещину приводит к уменьшению величины скачка на УВТ. Для трещины при  $v > c$  существуют  $u_{\min}$  и  $\xi_{\min}$ , такие, что при  $u_* > u_{\min}$  положение УВТ соответствует  $\xi_0 > \xi_{\min}$ , а при  $u_* = u_{\min}$  УВТ вырождается и профили давления и скорости газа в трещине становятся непрерывными. Решения с  $u_* < u_{\min}$  не существует.

Если скорость распространения трещины  $v$  меньше изотермической скорости звука  $c$ , то возможны два режима втекания газа в трещину: сверхзвуковой ( $u_* > c$ ) и дозвуковой ( $u_* < c$ ).

При  $u_* > c$  в потоке всегда имеется УВТ (фиг. 2 построена при  $m = 0,173$ ;  $n = 0,115$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $P_0/\mu = 2,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $u_*/c = 2,98$  (кривая 1);  $P_0/\mu = 1,95 \cdot 10^{-3}$ ,  $u_*/c = 5,36$  (кривая 2);  $P_0/\mu = 1,87 \cdot 10^{-3}$ ,  $u_*/c = 7,05$  (кривая 3). При уменьшении скорости втекания газа  $u_* \rightarrow u_{\min}$  фронт УВТ  $\xi_0 \rightarrow 0$ .

При дозвуковом режиме движения газа в трещине для решения (2.2), (2.3) при  $\xi = 0$  используется одно из граничных условий (2.3). Скорость втекания газа в трещину определяется в результате решения задачи. Профили давления, скорости движения газа — непрерывные функции автомодельной переменной  $\xi$  (фиг. 3 построена при  $m = 0,173$ ;  $n = 0,115$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $P_0/\mu = 2,12 \cdot 10^{-1}$  (кривая 1);  $P_0/\mu = 9,17 \cdot 10^{-2}$  (кривая 2);  $P_0/\mu = 6,07 \cdot 10^{-3}$  (кривая 3)).

Если скорость развития трещины много меньше скоростей звука в упругой среде ( $m^2, n^2 \ll 1$ ), то, оставляя главный член в разложении (2.18) по малым параметрам  $m^2$  и  $n^2$ , получим

$$(3.1) \quad w^l(\xi) = \frac{P_0}{\pi\mu} \frac{v}{w_0} \frac{(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \{(\arcsin \xi_l) \sqrt{1 - \xi^2} + \kappa(\xi)\}$$

где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе;  $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho_s]^{1/2}$ ;  $c_2 = [\mu/\rho_s]^{1/2}$  — скорости звука в среде,  $\rho_s$  — плотность породы.

Соотношение (3.1) определяет профиль раскрытия трещины  $w^l(\xi)$  для нагрузки (2.13) в квазистационарном приближении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Всеволодов Н. Н., Миркин Л. И. и др. О разрушении прозрачных материалов под действием лазерного излучения. Возникновение газовых пузырьков и расклинивание материала газовым давлением // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 5. № 3. С. 85—87.
2. Кондрашов С. В., Пилипецкий Н. Ф., Саванин С. Ю., Шкунов В. В. Исследование динамики поглощения в лазерной трещине // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. Вып. 5. С. 1765—1769.
3. Беллев Б. М., Васильев С. А., Николаев С. И. Разрыв пласта давлением пороховых газов. М.: Изд-е ВНИИОЭНГ. 1967. 63 с.
4. Адушкин В. В., Сухотин А. П. О разрушении твердой среды взрывом // ПМТФ. 1961. № 4. С. 94—101.
5. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 618—639.
6. Шер Е. Н. О напряженном состоянии растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза, нагружаемого изнутри сосредоточенными силами // ПМТФ. 1980. № 1. С. 154—163.
7. Broberg K. V. The propagation of a brittle crack // Ark. Fys. 1960. V. 18. No. 2. P. 159—192.
8. Костров Б. В. Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 644—652.
9. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Ударные волны в изотермическом газе при наличии сил сопротивления // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 171—175.
10. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Численное исследование движения газа с учетом сил сопротивления // ПМТФ. 1985. № 4. С. 100—105.