Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 539.375

КОНТИНУАЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

Кондауров В. И.

Рассматривается модель среды, для которой существенны процессы развития микродефектов — микротрещин, пор, межзеренных пустот. Диффузией микродефектов и полярными явлениями пренебрегается. Основы феноменологического описания поведения таких материалов заложены теориями повреждаемости [1,2]. Связь истории деформирования с критерием прочности материальной частицы вскрыта [3]. Энергетические аспекты явления повреждаемости рассматривались [4—7] при моделировании волн разрушения сильными разрывами, разделяющими материалы с различными реологическими свойствами. Обзор дальнейшего развития теории повреждаемости и ее приложений к задачам вязкоупругости и ползучести содержится в [8].

Использованный в работе подход отличается от традиционного двумя основными моментами. Во-первых, аксиомой локального баланса энергии и неравенством диссипации. Следуя механике изолированной трещины [9], в уравнение локального баланса энергии вводится член, описывающий распределенный по объему сток энергии, который связан с превращением части накопленной энергии и работы напряжений в поверхностную энергию микротрещин. Неравенство диссипации отличается от неравенства Клаузиуса—Дюгема [10] слагаемым, представляющим собой диссипацию разрушения. Второе существенное отличие заключается в модификации принципа макроскопической определимости. Считается, что текущая реакция материального элемента — функционал, определенный на независимых предысториях деформации, энтропии и поврежденности.

Для термоупругого повреждающегося тела эти основополагающие предположения позволяют прояснить два важных вопроса, остающиеся нерешенными в традиционной теории повреждаемости: какова макроскопическая интерпретация меры поврежденности материала, и к какой группе уравнений относится уравнение, задающее эволюцию поврежденности — к группе реологических соотношений или законов сохранения? Показано, что для рассматриваемой среды второго ранга тензор поврежденности может быть отождествлен с макроскопической деформацией элемента, разгруженного из текущего состояния в пассивном процессе. Найдено, что рост поврежденности в термоупругих средах управляется не кинетическим уравнением, а конечным соотношением, связывающим текущее значение поврежденности с текущим значением деформации, энтропии и распределенного источника повреждений. Это соотношение является следствием двух принципов термодинамики, т. е. относится к преобразованным законам сохранения.

Показано, что в рамках принятых предположений для начально-изотропных тел возможны два и только два типа материалов, повреждаемость которых характеризуется либо скаляром, либо симметричным тензором второго ранга. Сформулированы условия, которым должны удовлетворять определяющие соотношения для того, чтобы во всех допустимых процессах выполнялось неравенство диссипации и требования инвариантности. Приведенные условия значительно сужают класс допустимых уравнений состояния, особенно для материала со скалярной характеристикой повреждаемости.

В предположении малых деформаций и независимости реологии от температуры построен простейший пример среды, моделирующей ряд качественных эффектов, типичных для горных пород [11].

1. Кинематика и законы сохранения. Пусть $\mathbf{X}$ — радиус-вектор материальной частицы тела в начальной конфигурации $\varkappa$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ — радиус-вектор той же частицы в момент времени $t > 0$, соответствующий текущей конфигурации χ. Обозначим $\mathbf{F}$ градиент невырожденного отображения $\varkappa \to \chi$, так что $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$, $\det \mathbf{F} \neq 0$. Будем считать, что помимо вектора перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ и абсолютной температуры $\theta(\mathbf{X}, t) > 0$ на $\varkappa$ определен некоторый тензор второго ранга π, который служит мерой поврежденности материала. В отличие от [1—3] предполагается, что тензор $\pi(t)$ в общем случае не определяется ни текущим значением $\{\mathbf{F}(t), \theta(t)\}$, ни даже всей предысторией $\{\mathbf{F}(\tau), \theta(\tau)\}$, $-\infty < \tau \leqslant t$.

Ситуация здесь аналогична теории моментных (полярных) сред [12], в которой наряду с вектором перемещений и его градиентом рассматривается вектор поворота и его градиент для описания дополнительных степеней свободы макрочастицы. В общем случае поворот не определяется перемещением.

Предположение о возможности изменения тензора поврежденности π независимо от истории деформаций и температуры указывает на качественное отличие π от тензора пластических или вязких деформаций, представляющего собой параметр, отражающий влияние предыстории на текущее состояние [13].

В качестве примера приведем тензор

$$\pi = \frac{1}{V} \int\limits_S \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u})\, dS$$

используемый [14, 15] в качестве меры поврежденности материала. Здесь V — объем материала, содержащий слабо раскрытые трещины, элемент срединной поверхности dS которых характеризуется нормалью $\mathbf{n}$ и вектором смещений $\mathbf{u}$ берегов микротрещины, $\otimes$ — знак диадного умножения. Очевидно, что и нормаль, и вектор смещения являются характеристиками микроструктуры и могут изменяться под воздействием факторов нетермомеханической природы при фиксированной макроскопической деформации и температуре.

Перейдем к формулировке законов сохранения для повреждающейся среды. Пусть $\rho_\varkappa$, ρ — плотность массы в $\varkappa$ и χ соответственно, $\mathbf{b}$ — вектор массовых сил, $\mathbf{T}_\varkappa$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа первого рода. Законы сохранения массы, импульса, момента импульса и совместности скоростей и деформаций записываются так же, как в случае сплошной среды, в которой нет процессов эволюции поврежденности

$$\begin{aligned} &\rho_\varkappa \partial \mathbf{v}/\partial t\,|_X - \operatorname{Div} \mathbf{T}_\varkappa = \rho_\varkappa \mathbf{b}, \quad \mathbf{T}_\varkappa \mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{T}_\varkappa{}^T \\ &\partial \mathbf{F}/\partial t\,|_X - \operatorname{Div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{I}) = 0, \quad \rho \det \mathbf{F} = \rho_\varkappa \end{aligned} \tag{1.1}$$

(Div — дивергенция в переменных $\mathbf{X}$, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга).

Уравнение локального баланса энергии принимается в виде [16, 17]

$$\begin{aligned} &\rho_\varkappa \varepsilon^{\cdot} = \mathbf{T}_\varkappa : \mathbf{F}^{\cdot} + Q_T + Q_f \\ &Q_T = \operatorname{Div} \mathbf{q}_\varkappa + \rho_\varkappa r_T, \quad Q_f = \rho_\varkappa (r_f - \varepsilon_f^{\cdot}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{T}_\varkappa : \mathbf{F}^{\cdot}$ — мощность работы напряжений в безмоментной среде, (двоеточие означает свертку по двум индексам), Q_T — приток энергии, обусловленный теплопроводностью ($\mathbf{q}_\varkappa$ — вектор потока тепла в переменных $\mathbf{X}$) и действием распределенных источников тепла r_T. Приток энергии Q_f обусловлен распределенными источниками и стоками нетермомеханической природы. Скалярная величина r_f — плотность распределенных источников энергии, связанных с изменением поврежденности материала за счет внешнего воздействия на геометрию и количество микродефектов. Она является произвольным заданным внешним полем и, в частности, может быть тождественно равна нулю. В отличие от r_f величина $\varepsilon_f^{\cdot}$ отлична от нуля в любом процессе изменения поврежденности и представляет собой плотность распределенной поверхностной энергии. Введением $\varepsilon_f^{\cdot}$ подчеркивается связь явлений повреждаемости с изменением свободной поверхности берегов микротрещин.

Следует отметить, что энергетическое соотношение Гриффитса в механике изолированной трещины [9, 18] немедленно следует из (1.2), если r_f и $\varepsilon_f^{\cdot}$ (с точностью до коэффициента) — δ-функции, носители которых совпадают с движущейся вершиной изолированной трещины.

С учетом (1.1) уравнение (1.2) может быть преобразовано в локальный закон сохранения энергии

$$\rho_\varkappa \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \varepsilon_f\right) - \operatorname{Div}(\mathbf{T}_\varkappa{}^T\mathbf{v} + \mathbf{q}_\varkappa) = \rho_\varkappa(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} + r_T + r_f)$$

Пусть η — плотность энтропии, которая является сопряженной реакцией материала на введение температуры θ в число параметров состояния материальной частицы. Обозначим $\mathbf{\Pi}$ реакцию материала на тензор поврежденности $\boldsymbol{\pi}$. Тогда второй принцип термодинамики может быть сформулирован в виде локального неравенства ($\nabla_\varkappa$ — градиент в переменных $\mathbf{X}$)

(1.3) $$\delta_M + \delta_T + \delta_f \geqslant 0$$

$$\delta_M \equiv \theta\eta^{\cdot} - Q_T = \theta\eta^{\cdot} - (\rho_\varkappa^{-1}\operatorname{Div}\mathbf{q}_\varkappa + r_T)$$
$$\delta_T \equiv (\rho_\varkappa\theta)^{-1}\mathbf{q}_\varkappa\nabla_\varkappa\theta$$
$$\delta_f \equiv \boldsymbol{\pi} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} - Q_f = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} + \varepsilon_f^{\cdot} - r_f$$

Здесь δ_M — внутренняя (механическая) диссипация, фигурирующая в неравенстве Планка классической термомеханики [10], δ_T — термическая диссипация, связанная с теплопроводностью среды и фигурирующая в неравенстве Фурье [10], а δ_f — диссипация континуального разрушения [16, 17].

Из сравнения выражений для δ_M и δ_f видно, что $\mathbf{\Pi}$ — тензорный аналог плотности энтропии. Различие притоков энергии Q_T и Q_f объясняется пренебрежением в рассматриваемой модели диффузией микродефектов.

Если воспользоваться уравнением локального баланса энергии (1.2), из которого следует $Q_T + Q_f = \rho_\varkappa\varepsilon^{\cdot} - \mathbf{T}_\varkappa : \mathbf{F}^{\cdot}$, то придем к форме неравенства диссипации

(1.4) $$-\varepsilon^{\cdot} + \rho_\varkappa^{-1}\mathbf{T}_\varkappa : \mathbf{F}^{\cdot} + \theta\eta^{\cdot} + \boldsymbol{\pi} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} + \delta_T \geqslant 0$$

удобной для изучения ограничений, накладываемых вторым принципом термодинамики на определяющие соотношения.

2. Определяющие соотношения термоупругого повреждающегося материала. Введение полей, связанных с поверхностными явлениями и имеющих в классическом понимании нетермомеханическую природу, ведет к необходимости модификации основного принципа теории определяющих уравнений — принципа макроскопической определимости [13]. Обозначив

$$\lambda(\mathbf{X}, \tau) \equiv \{\mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau), \eta(\mathbf{X}, \tau), \mathbf{\Pi}(\mathbf{X}, \tau), \nabla_\varkappa\theta(\mathbf{X}, \tau)\}, \quad \tau \leqslant t$$
$$\Sigma(\mathbf{X}, t) \equiv \{\varepsilon(\mathbf{X}, t), \mathbf{T}_\varkappa(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), \boldsymbol{\pi}(\mathbf{X}, t), \varepsilon_f(\mathbf{X}, t), \mathbf{q}_\varkappa(\mathbf{X}, t)\}$$

принцип термодинамически согласованной макроскопической определимости для повреждающихся сред можно записать в виде

(2.1) $$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma\{\lambda(\mathbf{X}, \tau), \mathbf{X}, t\}_{\tau=-\infty}^{\tau=t}$$

где определяющие функционалы $\Sigma_{\tau=-\infty}^{\tau=t}$ должны удовлетворять неравенству диссипации (1.4) для любых предысторий $\lambda(\tau)$, если в момент времени $\tau = t$ существуют производные $\lambda^{\cdot}$ и $\varepsilon^{\cdot}$.

В дальнейшем рассматриваются однородные нестареющие материалы, в связи с чем явная зависимость правых частей (2.1) от $\mathbf{X}$, t отсутствует и эти аргументы везде опускаются.

Определим нелинейный термоупругий повреждающийся материал как среду, для которой отображения (2.1) сводятся к функциям от текущих значений

$$\Sigma(t) = \Sigma^+\{\lambda(t)\} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в неравенство (1.4) и используя стандартные рассуждения [10], связанные с построением локального линейного продолжения процесса $\lambda(\tau)$, возможным в силу независимости скоростей изменения $\lambda^{\cdot}(\tau)$, получим необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (1.4):

$$\mathbf{T}_\varkappa = \rho_\varkappa \partial\varepsilon/\partial\mathbf{F}, \quad \theta = \partial\varepsilon/\partial\eta, \quad \partial\varepsilon/\partial(\nabla_\varkappa\theta) = 0, \quad \pi = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{\Pi} \tag{2.3}$$

$$\delta_T \geqslant 0, \ \delta_M + \delta_f = 0 \tag{2.4}$$

Три первых соотношения (2.3) совпадают с соотношениями классической нелинейной термоупругости [10]. Последняя из формул (2.3), оправдывающая в некоторой степени термин «энтропия разрушения» для тензора $\mathbf{\Pi}$, позволяет дать наглядную интерпретацию диссипации разрушения δ_f при $r_f = 0$. Действительно, в этом случае $\delta_f = (\partial\varepsilon/\partial\mathbf{\Pi}) : \mathbf{\Pi}^{\cdot} + \varepsilon_f^{\cdot}$, т. е. диссипация континуального разрушения равна разности между скоростью поглощения энергии, расходуемой на образование новой свободной поверхности, и скоростью выделения энергии, высвобождаемой в результате роста поврежденности, образования новых свободных берегов микротрещин.

В дальнейшем будем предполагать, что распределенный сток энергии $\varepsilon_f^{\cdot}$ вместе с источниками r_f равны нулю, если $\mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0$. Поскольку в таких процессах

$$\varepsilon_f^{\cdot} = \frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\mathbf{F}} : \mathbf{F}^{\cdot} + \frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\eta}\eta^{\cdot} + \frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\gamma_\varkappa}\gamma_\varkappa^{\cdot} = 0 \quad (\gamma_\varkappa \equiv \nabla_\varkappa\theta)$$

то в силу независимости $\mathbf{F}^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$ и $\gamma_\varkappa^{\cdot}$ производные $\partial\varepsilon_f/\partial\mathbf{F}$, $\partial\varepsilon_f/\partial\eta$, $\partial\varepsilon_f/\partial\gamma_\varkappa$ тождественно равны нулю, так что

$$\varepsilon_f = \varepsilon_f(\mathbf{\Pi}), \quad \varepsilon_f^{\cdot} = \mathbf{G} : \mathbf{\Pi}^{\cdot}, \quad \mathbf{G} \equiv \partial\varepsilon_f(\mathbf{\Pi})/\partial\mathbf{\Pi} \tag{2.5}$$

Величина $\mathbf{G}$ играет роль тензора сопротивления разрушению материала.

Для выполнения условия $r_f = 0$ при $\mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0$ достаточно, чтобы

$$r_f = \mathbf{G}_* : \mathbf{\Pi}^{\cdot} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{G}_*$ — произвольный заданный тензор второго ранга, определяющий плотность внешних источников разрушения.

Поскольку при учете (2.5), (2.6) имеем $\delta_f = 0$ при $\mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0$, то из второго соотношения (2.4) и независимости δ_M от $\mathbf{\Pi}^{\cdot}$ следует $\delta_M = 0$, $\delta_f = 0$ при всех $\mathbf{\Pi}^{\cdot}$. Это означает, что термоупругий повреждающийся материал является совершенным как в смысле термомеханики, так и в смысле энергетики разрушения. Соотношение $\delta_M = 0$ показывает, что любой процесс идет без внутренней диссипации, так что скорость изменения внутренней энергии при фиксированной деформации и поврежденности в точности равна тепловому притоку Q_T. Равенство $\delta_f = 0$ означает, что скорость поглощения энергии, расходуемой на изменение ε_f, равна скорости подвода энергии за счет распределенных источников разрушения r_f и высвобождения упругой энергии при росте поврежденности.

Соотношение $\delta_M = 0$ приводит к уравнению

$$\rho_\varkappa \eta^{\cdot} - \mathrm{Dif}\,(\theta^{-1}\mathbf{q}_\varkappa) = \rho_\varkappa (\theta^{-1} r_T + \delta_T)$$

которое является законом сохранения (изменения) энтропии в областях гладких решений.

Соотношение $\delta_f = 0$ при учете (2.6) дает

$$(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{\Pi} + \mathbf{G} - \mathbf{G}_*) : \mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0 \tag{2.7}$$

Отсюда в силу произвольности $\mathbf{G}_*$ следует, что возможны два процесса: пассивный, в котором $\mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0$, т. е. поврежденность неизменна, и активный, в котором

$$\partial\varepsilon(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{\Pi})/\partial\mathbf{\Pi} + \mathbf{G}(\mathbf{\Pi}) - \mathbf{G}_*(t) = 0, \quad \mathbf{\Pi}^{\cdot} \neq 0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) определяет связь энтропии поврежденности $\mathbf{\Pi}$ с текущим значением деформации $\mathbf{F}$, энтропии η и тензором $\mathbf{G}_*$ распределенных источников разрушения. Дифференцируя по времени (2.8), находим связь $\mathbf{\Pi}^{\cdot}$ со скоростями $\mathbf{F}^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$ и $\mathbf{G}_*^{\cdot}$:

$$\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\partial\mathbf{\Pi}} + \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{\Pi}}\right) : \mathbf{\Pi}^{\cdot} = \mathbf{G}_*^{\cdot} - \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\partial\mathbf{F}} : \mathbf{F}^{\cdot} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\partial\eta}\eta^{\cdot}\right) \tag{2.9}$$

Далее будем рассматривать материалы, в которых процессами залечивания микродефектов можно пренебречь. В качестве естественной характеристики степени разрушенности материала (нормы тензора энтропии поврежденности) выступает плотность поверхностной энергии. Тогда условие активного нагружения

$$\varepsilon_f^{\cdot} = \mathbf{G} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} > 0 \tag{2.10}$$

Условие (2.10) вместе с уравнением (2.8) накладывает ограничения на состояние $(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{\Pi})$ и скорости изменения $(\mathbf{F}^{\cdot}, \eta^{\cdot}, \mathbf{G}_*^{\cdot})$, при которых реализуется активный процесс.

Очевидная из (2.7) возможность пассивного продолжения ($\mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0$) процесса из любого текущего состояния $\{\mathbf{F}(t), \eta(t), \mathbf{\Pi}(t)\}$ означает, что можно ввести конфигурацию материального элемента с той же самой поврежденностью $\mathbf{\Pi}(t)$, энтропией $\eta(t)$, но иной деформацией $\mathbf{F}^*(t)$. Чтобы выделить конкретные свойства этой конфигурации элемента, будем полагать ее разгруженной конфигурацией, в которой

$$\mathbf{T}_\varkappa\{\mathbf{F}^*(t), \eta(t), \mathbf{\Pi}(t)\} = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

Обозначим $\varkappa^*$ конфигурацию тела, составленного из разгруженных элементов. Тогда отображение $\varkappa \to \chi$ начальной конфигурации в текущую можно представить в виде последовательности двух невырожденных отображений $\varkappa \to \varkappa^*$, $\varkappa^* \to \chi$ с градиентами $\mathbf{F}^*$ и $\mathbf{E}$, так что имеет место композиция

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{F}^*, \ \det\mathbf{E} \neq 0, \ \det\mathbf{F}^* \neq 0 \tag{2.12}$$

В предположении, что уравнение (2.11) однозначно разрешимо относительно $\mathbf{\Pi}$, тензор $\mathbf{F}^*$ можно считать макроскопической мерой поврежденности. Разумеется, эта характеристика неоднозначна в том плане, что возможно введение других конфигураций с той же самой поврежденностью $\mathbf{\Pi}(t)$, но другой энтропией, равной, например, $\eta_\varkappa = \eta(0)$, другим напряженным состоянием $\mathbf{T}_\varkappa(\mathbf{F}^*, \eta, \mathbf{\Pi}) \neq 0$ и т. д. Однако все эти меры эквивалентны с точки зрения представления поврежденности функцией деформаций. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{F}^*$.

Промежуточная конфигурация $\varkappa^*$ в отличие от $\varkappa$ и χ в общем случае не принадлежит евклидову пространству, т. е. для $\mathbf{F}^*$ нет уравнений совместности типа $(1.1)_3$. Для дальнейшего важно понятие касательной конфигурации $\varkappa^*(\mathbf{X})$, которая представляет собой конфигурацию однородно деформированного тела с деформациями, равными деформациям в материальной точке $\mathbf{X}$ [19]. Эта конфигурация, составленная из одинаково деформированных элементов (совместных между собой скошенных параллелепипедов), разумеется, принадлежит евклидову пространству.

Воспользовавшись тензором $\mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{F}^*$, определяющие соотношения (2.2) при учете (2.3)—(2.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}(2.13)\qquad & \varepsilon = \varepsilon^{\times}(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{F}^*), \quad \mathbf{T}_\varkappa = \mathbf{T}_\varkappa^{\times}(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{F}^*)\\ & \theta = \theta^{\times}(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{F}^*), \quad \mathbf{q}_\varkappa = \mathbf{q}_\varkappa^{\times}(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{F}^*, \gamma_\varkappa)\\ & \varepsilon_f = \varepsilon_f^{\times}(\mathbf{F}^*), \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{F}^*) = 0\end{aligned}$$

где уравнение $\mathbf{\Phi} = 0$ представляет собой связь $\mathbf{F}$, η, $\mathbf{F}^*$ при активном нагружении. Соотношения (2.13) должны удовлетворять следующим требо ваниям инвариантности.

1°. Принципу материальной независимости от выбора системы отсчета [10];

2°. Условию инвариантности относительно ортогональных преобразований любой касательной конфигурации $\varkappa^*(\mathbf{X})$ [19];

3°. Условию инвариантности относительно преобразований начальной конфигурации $\varkappa$, принадлежащих группе симметрии материала.

Ограничимся случаем начально-изотропных сред. Как и в теории простых сред [10], это означает, что для тела, изготовленного из рассматриваемого материала, существует неискаженная или естественная конфигурация $\varkappa_0$, группа симметрии $g_{\varkappa_0}$ в которой включает в себя полную ортогональную группу о, т. е. $o \subset g_{\varkappa_0}$. Отсюда с учетом максимальности группы о [20] следует, что возможны два и только два случая:

$$(2.14)\qquad g_{\varkappa_0} = o$$

$$(2.15)\qquad g_\varkappa = u, \ \forall\varkappa$$

где u — унимодулярная группа любых преобразований, не изменяющих объема.

Если в теории простых сред группы симметрии (2.14), (2.15) приводят к определениям твердого тела и жидкости, то в рассматриваемом случае обе группы присущи твердому телу. Это обусловлено незатухающей памятью, свойственной определяющим соотношениям (2.13).

Нелинейный изотропный термоупругий повреждающийся материал с группой симметрии (2.15) есть материал со скалярной характеристикой повреждаемости. Проводя рассуждения, аналогичные известным [19], получим, что необходимым и достаточным условием выполнения принципов инвариантности 1°—3° и неравенства диссипации (1.4) служит следующая форма определяющих соотношений (2.13):

$$\begin{aligned}(2.16)\qquad & \varepsilon = \varepsilon^\circ(\mathbf{e}, \eta, \omega), \ \mathbf{T} = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{e}, \eta, \omega) = \rho(\mathbf{I} - 2\mathbf{e})\,\partial\varepsilon^\circ/\partial\mathbf{e}, \ \theta = \theta^\circ(\mathbf{e}, \eta, \omega) = \\ & \partial\varepsilon^\circ/\partial\eta, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^\circ(\mathbf{e}, \eta, \omega, \nabla\theta), \quad \varepsilon_f = \varepsilon_f^\circ(\omega),\\ & \omega = \omega^\circ(\mathbf{e}, \eta) \ \text{ при } \ \dot\omega > 0\\ & (\mathbf{e} = {}^1/_2(\mathbf{I} - \omega^2\mathbf{F}^{-1T}\mathbf{F}^{-1}))\end{aligned}$$

где ε°, $\mathbf{T}^\circ$, θ°, $\mathbf{q}^\circ$, ε_f°, ω° — изотропные функции своих аргументов. В соотношениях (2.16) использованы обозначения: $\mathbf{T}$ — симметричный тензор напряжений Коши, $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока в переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ — тензор упругих деформаций, аналогичный по своей структуре тензору Альманси и построенный при помощи градиента $\mathbf{E} = \mathbf{F}\Pi^{-1}$ отображения $\varkappa^* \to \chi$. При этом учитывалось, что симметричная часть полярного разложения Π — деформация, обусловленная поврежденностью, равна $\omega\mathbf{I}$, $\omega^3 = \det \Pi$.

Другая возможная группа (2.14) симметрии характеризует материал, который не чувствует ортогональных деформаций неискаженной начальной конфигурации. В этом случае определяющие соотношения несколько сложнее по сравнению с (2.16):

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{U}, \eta, \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \quad \theta = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \eta}, \tag{2.17}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{q}_0(\mathbf{U}, \eta, \boldsymbol{\omega}, \nabla_\varkappa \theta), \quad \varepsilon_f = \varepsilon_{f0}(\boldsymbol{\omega}),$$
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{U}, \eta) \text{ при } \varepsilon_f^{\cdot} = \mathrm{G} : \boldsymbol{\omega}^{\cdot} > 0$$

где ε_0, $\mathbf{q}_0$, ε_{f0}, $\boldsymbol{\omega}_0$ — изотропные функции. В формулах (2.17) использованы обозначения: $\mathbf{R}$ — ортогональный, $\mathbf{U}$ — симметричный положительно-определенный тензоры из полярного разложения $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}$ — симметричный положительно-определенный тензор из полярного разложения $\Pi = \mathbf{R}_\Pi \boldsymbol{\omega}$, $\mathrm{G} \equiv \partial \varepsilon_{f0}(\boldsymbol{\omega})/\partial \boldsymbol{\omega}$.

3. Пример. Для иллюстрации возможностей используемого подхода рассмотрим простейший случай. Будем считать, что зависимостью свойств материала от температуры можно пренебречь вместе с тепловым потоком и распределенными источниками тепла; деформации — малые; поврежденность материала характеризуется скалярной величиной. Дополнительно будем полагать, что $G_* = 0$, $G = \partial \varepsilon_f^0/d\omega = \mathrm{const}$.

Пусть ε — тензор малых деформаций, $\varepsilon' = \varepsilon - {}^1/_3\mathbf{I}\,(\mathbf{I} : \varepsilon)$— девиатор тензора деформаций, $I_1 = \mathbf{I} : \varepsilon$, $J = (\varepsilon' : \varepsilon')^{1/2}$. Возьмем потенциал начально-изотропной упругой повреждающейся среды в виде

$$\rho_\varkappa \varepsilon = \rho_\varkappa \varepsilon_\varkappa + {}^1/_2 K I_1^2 + \mu J^2 + (\gamma - G)\omega + 1/2\beta\omega^2 - \alpha_p I_1 \omega - \alpha_s J \omega \tag{3.1}$$
$$(\varepsilon_\varkappa,\ K,\ \mu,\ \gamma,\ \alpha_p,\ \alpha_s,\ \beta = \mathrm{const})$$

Из (3.1) следует нелинейное выражение для тензора напряжений

$$\mathbf{T} = (K I_1 - \alpha_p \omega)\mathbf{I} + (2\mu - \alpha_s \omega/J)\varepsilon' \tag{3.2}$$

Условие $d\varepsilon/d\omega + G = 0$ при $\omega^{\cdot} > 0$ приводит к выражению для параметра поврежденности в активном процессе

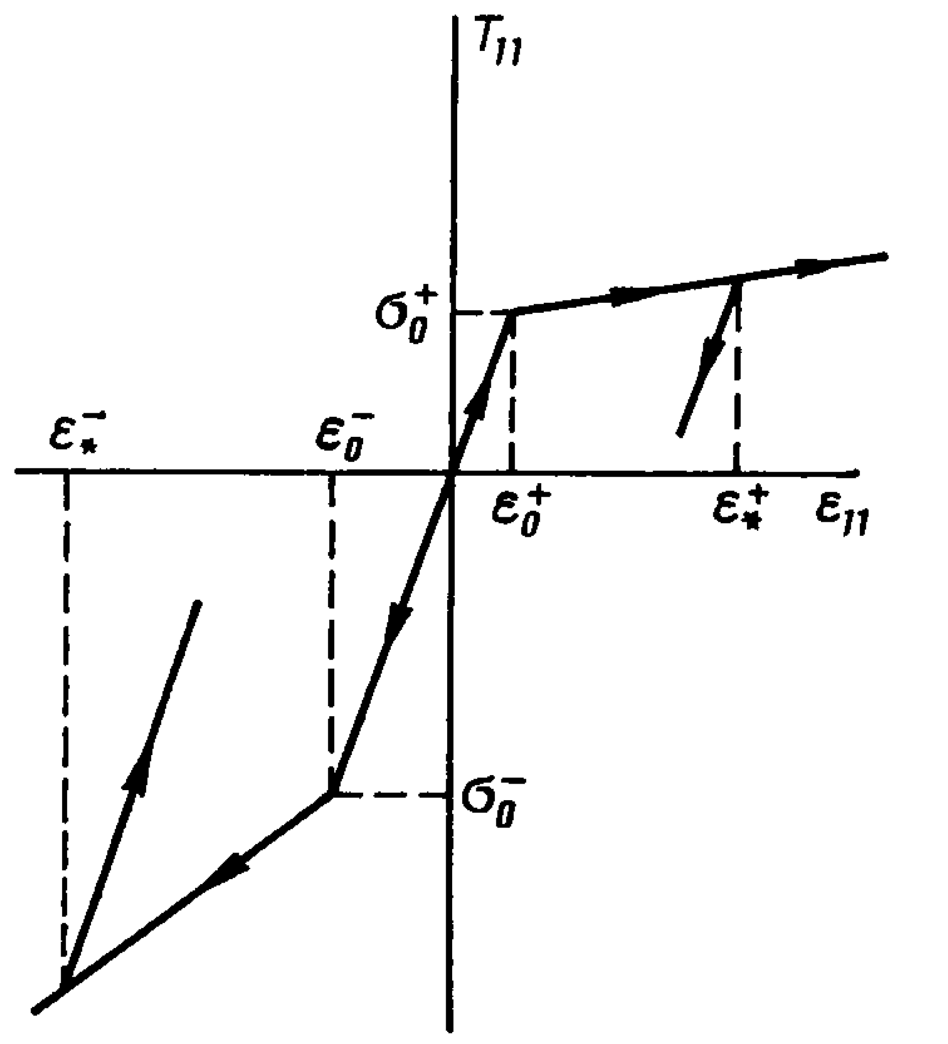
$$\omega = \beta^{-1}(\alpha_p I_1 + \alpha_s J - \gamma) \tag{3.3}$$

Из (3.2) видно, что в отсутствие поврежденности ($\omega = 0$) коэффициенты K и μ представляют собой объемный модуль и модуль сдвига материала.

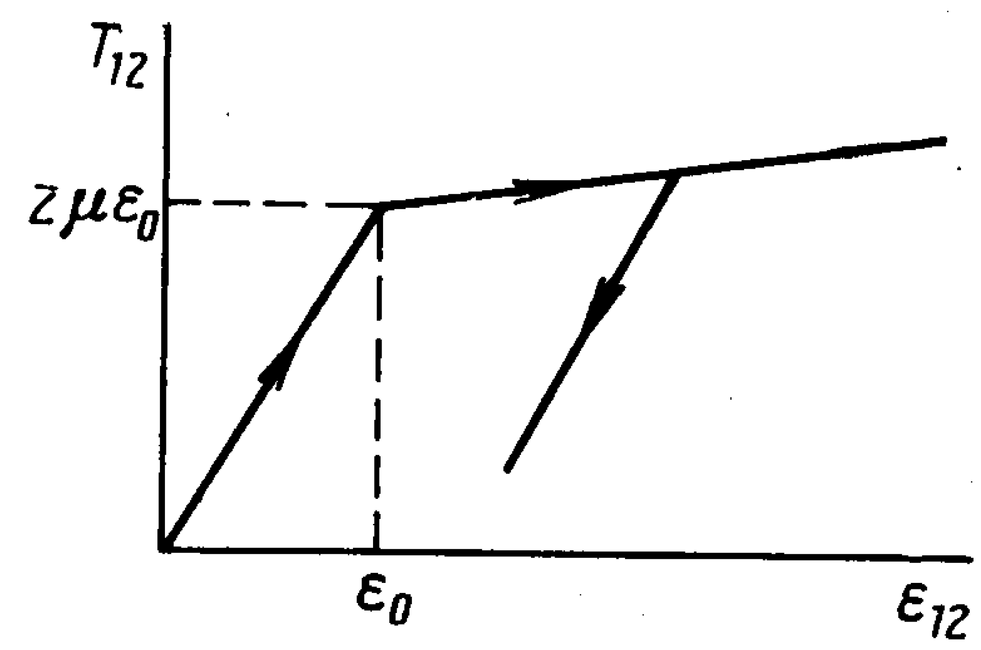
В случае одномерной деформации, когда $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, а остальные компоненты деформации равны нулю, из формул (3.2), (3.3) следует

$$T_{11} = \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon \\ (\lambda + 2\mu - \beta\alpha_+^2)\,\varepsilon + \sigma_0^+ \\ (\lambda + 2\mu - \beta\alpha_-^2)\,\varepsilon + \sigma_0^- \end{cases}$$
$$\omega = \begin{cases} 0, & \varepsilon_0^- \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0^+ \\ \alpha_+(\varepsilon - \varepsilon_0^+), & \varepsilon > \varepsilon_0^+ > 0, \quad \varepsilon^{\cdot} > 0 \\ \alpha_-(\varepsilon - \varepsilon_0^-), & \varepsilon < \varepsilon_0^- < 0, \quad \varepsilon^{\cdot} < 0 \end{cases}$$
$$\alpha_\pm = \beta^{-1}(\alpha_p \pm \alpha_s \sqrt{2/3}), \quad \varepsilon_0^\pm = \gamma/\alpha_\pm$$
$$\lambda = K - 2\mu/3, \quad \sigma_0^\pm = \beta\alpha_\pm^2 \varepsilon_0^\pm$$

График, иллюстрирующий указанную зависимость, представлен на фиг. 1. В области, ограниченной ε_0^+ при растяжении и ε_0^- при сжатии, материал ведет себя как линейно-упругое тело с коэффициентами Ламе λ и μ. Вне этой области при $\varepsilon\varepsilon^{\cdot} > 0$ зависимость от деформаций также линейная, но с касательными модулями $\lambda + 2\mu - \beta\alpha_\pm^2$ (знак плюс соответствует растяжению, минус — сжатию). Если скорость де-



Фиг. 1



Фиг. 2

формации в точке $\varepsilon_*^{\pm}$ меняет знак, начинается пассивный процесс разгрузки, в котором поврежденность неизменна и равна $\omega = \alpha_{\pm}(\varepsilon_*^{\pm} - \varepsilon_0^{\pm})$. Касательные модули в процессе разгрузки в точности равны упругим модулям неповрежденного материала.

В случае чистой гидростатики, когда $\varepsilon = 1/3 I_1 \mathrm{I}$, имеем

$$\mathrm{T} = \begin{cases} K I_1 \mathrm{I} \\ [K I_1 - \beta^{-1}\alpha_p^2 (I_1 - I_1^0)]\,\mathrm{I} \end{cases}, \quad \omega = \begin{cases} 0, & I_1 < I_1^0 \\ \beta^{-1}\alpha_p (I_1 - I_1^0), & I_1 > I_1^0, \quad I_1^{\cdot} > 0 \end{cases}$$

где $I_1^0 = \gamma/\alpha_p$. Следовательно, гидростатическое сжатие не может вызвать разрушение рассматриваемого материала.

При сдвиге, когда $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon$, а все остальные компоненты тензора деформации равны нулю, разрушение начинается при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \gamma/(\alpha_s \sqrt{2})$ и напряжении $T_{12} = 2\mu\varepsilon_0$. Симметричная относительно начала координат зависимость $T_{12}(\varepsilon_{12})$ представлена на фиг. 2. В активном процессе нагружения ($\varepsilon > \varepsilon_0$, $\varepsilon^{\cdot} > 0$)

$$\omega = \beta^{-1}\alpha_s \sqrt{2}\,(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad T_{11} = -\beta^{-1}\alpha_p\alpha_s \sqrt{2}\,(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad T_{12} = (2\mu - \beta^{-1}\alpha_s^2)\varepsilon + \beta^{-1}\alpha_s^2\varepsilon_0$$

т. е. деформация простого сдвига рассматриваемого материала сопровождается появлением нормальных напряжений.

Аналогично, сдвиг материала касательным напряжением приводит к появлению эффектов дилатансии, сопровождающих процесс разрушения.

Таким образом, рассматриваемая модель упругой повреждающейся среды описывает ряд качественных эффектов, типичных для горных пород [11]: наличие пороговых напряжений, при которых начинается разрушение, отсутствие необратимых деформаций при чисто гидростатическом сжатии, различие сдвигового разрушения и разрушения отрыва, характеризуемое коэффициентами α_s и α_p, дилатансия материала, упругий характер разгрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26—31.
2. *Работнов Ю. Н.* О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5—7.
3. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3. С. 21—35.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
5. *Слепян Л. И.* О моделях в теории волн хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 181—186.
6. *Григорян С. С.* О некоторых работах по разрушению хрупких тел в динамических условиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 173—181.
7. *Николаевский В. Н.* Динамическая прочность и скорость разрушения // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир. 1981. С. 166—203.
8. *Шестериков С. А., Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ. 1980. Т. 13. С. 3—104.
9. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163—198.

10. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред М.: Мир. 1975. 592 с.
11. *Троллон Д. Х., Бок Х., Бест Б. С. и др.* Введение в механику скальных пород. М.: Мир. 1983. 276 с.
12. *Эринген А. К.* Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир. 1975. Т. 2. С. 646—751.
13. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
14. *Вакуленко А. А., Качанов М. Л.* Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 159—166.
15. *Никитин Л. В., Юнга С. Л.* Методы теоретического определения тектонических деформаций и напряжений в сейсмоактивных областях // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 11. С. 54—67.
16. *Кондауров В. И., Петров И. Б.* Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1985. Т. 285. № 6. С. 1344—1347.
17. *Кондауров В. И.* Энергетический подход к задаче континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 6. С. 17—22.
18. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112—125.
19. *Кондауров В. И.* Уравнения релаксационного типа для вязкоупругих сред с конечными деформациями // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 791—800.
20. *Noll W.* Proof of maximality of the orthogonal group in the unimodular group // Arch. Rat. Mech. and Analys. 1965. V. 18. No. 1. P. 100—102.

Москва

Поступила в редакцию
27.XI.1987