Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Бородачев А. Н.

Предлагается новое представление частного решения уравнений линейной несвязанной квазистатической термоупругости в перемещениях для трансверсально-изотропных тел. Оно симметричным образом содержит две функции, определяемые независимо одна от другой и удовлетворяющие уравнениям, которые путем аффинных преобразований координат сводятся к уравнениям Пуассона. В изотермическом случае указанное представление переходит в известное решение Эллиотта [1]. Отдельно рассматриваются случаи равных и неравных корней характеристического уравнения.

Полученное представление частного решения более предпочтительно с точки зрения удовлетворения критериям Стернберга по сравнению с ранее известными. Решение Новацкого [2] выражается довольно сложным образом через одну вспомогательную функцию, удовлетворяющую неоднородному уравнению в частных производных четвертого порядка. Представление из работы [3], являющееся обобщением на неосесимметричный случай часто используемого решения Сингха [4, 5], содержит две функции, которые удовлетворяют связанным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка.

С использованием предложенного решения получено двумерное интегральное уравнение первого рода относительно контактного давления под нагретым жестким штампом произвольной формы в плане, вдавливаемым в трансверсально-изотропное упругое полупространство при отсутствии сил трения. Для эллиптического в плане штампа построено точное аналитическое решение указанного интегрального уравнения.

1. Выберем систему прямоугольных координат x_i таким образом, чтобы плоскость изотропии трансверсально-изотропного материала совпадала с координатной плоскостью x_1x_2. При этом уравнения линейной несвязанной квазистатической термоупругости в перемещениях для трансверсально-изотропных материалов принимают вид [2]

$$
\begin{gathered}
c_{11}u_{m,mm}+{}^1/_2(c_{11}-c_{12})u_{m,nn}+c_{44}u_{m,33}+{}^1/_2(c_{11}+c_{12})u_{n,mn}+\\
+(c_{13}+c_{44})u_{3,m3}=b_1T_{,m}\\
c_{44}\Delta_2u_3+c_{33}u_{3,33}+(c_{13}+c_{44})(u_{1,13}+u_{2,23})=b_2T_{,3}\\
b_1=(c_{11}+c_{12})\alpha_1+c_{13}\alpha_2,\quad b_2=2c_{13}\alpha_1+c_{33}\alpha_2
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, c_{ij} — коэффициенты жесткости в сокращенных обозначениях (формулы связи коэффициентов жесткости с техническими упругими постоянными содержатся в [5]), T — температура, отсчитываемая от исходного значения, соответствующего отсутствию напряжений в теле, и определяемая в несвязанной задаче независимо от поля перемещений, α_1 — коэффициент линейного расширения в направлениях x_1 и x_2, α_2 — в направлении x_3, Δ_2 — двумерный оператор Лапласа по переменным x_1 и x_2.

Компоненты тензора напряжений определяются через вектор перемещений и поле температуры соотношениями

$$
\begin{gathered}
\sigma_{mm}=c_{11}u_{m,m}+c_{12}u_{n,n}+c_{13}u_{3,3}-b_1T\\
\sigma_{33}=c_{13}(u_{1,1}+u_{2,2})+c_{33}u_{3,3}-b_2T\\
\sigma_{m3}=c_{44}(u_{3,m}+u_{m,3})\\
\sigma_{12}={}^1/_2(c_{11}-c_{12})(u_{2,1}+u_{1,2})
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

В формулах (1.1), (1.2) и везде далее индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующим координатам, суммирование по повторяющимся индексам не проводится, индексы m и n принимают значения 1 и 2, причем в пределах отдельных выражений $m \neq n$.

Коэффициенты жесткости удовлетворяют следующим неравенствам [2]:

$$c_{11} > 0, \quad c_{11} > c_{12}, \quad c_{44} > 0, \; c_{33}(c_{11} + c_{12}) > 2c_{13}^2$$

которые вытекают из условия положительной определенности удельной упругой энергии деформации.

Покажем, что частное решение неоднородной системы уравнений (1.1) допускает представление в форме

$$u_m^* = \varphi_{1,m} + \varphi_{2,m}, \quad u_3^* = h_1\varphi_{1,3} + h_2\varphi_{2,3} \tag{1.3}$$

где функции φ_m (по аналогии с решением Гудьера для изотропного материала [6] их естественно называть обобщенными потенциалами перемещений) — решения следующих однотипных уравнений:

$$\Delta_2\varphi_m + k_m\varphi_{m,33} = \beta_m T \tag{1.4}$$

а h_m, k_m и β_m — пока не определенные постоянные.

Подставляя (1.3) в (1.1), находим, что уравнения термоупругого равновесия в перемещениях удовлетворяются тождественно, если функции φ_m помимо уравнений (1.4) удовлетворяют также системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{2} \{c_{11}\Delta_2\varphi_j + [c_{44} + h_j(c_{13} + c_{44})]\,\varphi_{j,33}\} = b_1 T$$

$$\sum_{j=1}^{2} \{[c_{13} + (1 + h_j)\,c_{44}]\,\Delta_2\varphi_j + h_j c_{33}\varphi_{j,33}\} = b_2 T$$

которую при помощи (1.4) можно привести к виду

$$\sum_{j=1}^{2} t_{mj}^*\varphi_{j,33} = t_{m3}^* T \quad (m = 1, 2) \tag{1.5}$$

$$t_{1m}^* = c_{44} + h_m(c_{13} + c_{44}) - k_m c_{11}$$

$$t_{13}^* = b_1 - (\beta_1 + \beta_2)\,c_{11}$$

$$t_{2m}^* = h_m c_{33} - k_m[c_{13} + (1 + h_m)\,c_{44}]$$

$$t_{23}^* = b_2 - \sum_{j=1}^{2} \beta_j[c_{13} + (1 + h_j)\,c_{44}]$$

Система уравнений (1.5) удовлетворяется тождественно, если выбрать постоянные h_m, k_m и β_m таким образом, чтобы выполнялись соотношения $t_{ni}^* = 0$ ($n = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$), которые в этом случае представляют собой систему (вообще говоря, нелинейных) алгебраических уравнений относительно указанных постоянных. Решая эту систему, находим, что постоянные k_m и β_m выражаются через h_m согласно формулам

$$c_{11}k_m = c_{44} + (c_{13} + c_{44})\,h_m \tag{1.6}$$

$$c_{11}c_{44}(h_n - h_m)\,\beta_m = b_1[c_{13} + (1 + h_n)\,c_{44}] - b_2 c_{11}$$

а постоянные h_m — корни следующего характеристического уравнения:

$$h^2 + \left[2 + \frac{c_{13}^2 - c_{11}c_{33}}{c_{44}(c_{13} + c_{44})}\right] h + 1 = 0 \tag{1.7}$$

и определяются формулами

$$h_m = 1 + C\,[A + (-1)^m D^{1/2}] \tag{1.8}$$

$$A = c_{11}c_{33} - (c_{13} + 2c_{44})^2, \quad D = AB$$

$$B = c_{11}c_{33} - c_{13}^2, \quad C = 2\,(B - A)^{-1}$$

Таким образом, частное решение неоднородной системы уравнений (1.1) допускает представление в форме (1.3), (1.4), а постоянные h_m, k_m и β_m определяются соотношениями (1.6) и (1.8). В частном случае (при $T \equiv 0$) указанное представление совпадает с известным решением Эллиотта [1].

Подставляя (1.3) в (1.2) и используя (1.4), получаем следующие представления компонентов тензора напряжений через обобщенные потенциалы перемещений:

$$\sigma_{mm}^{*} = -\sum_{j=1}^{2} [(c_{11} - c_{12})\,\varphi_{j,\,nn} + c_{44}(1 + h_j)\,\varphi_{j,33}] \tag{1.9}$$

$$\sigma_{33}^{*} = -c_{44}\Delta_2 \sum_{j=1}^{2}(1 + h_j)\,\varphi_j$$

$$\sigma_{m3}^{*} = c_{44}\sum_{j=1}^{2}(1 + h_j)\,\varphi_{j,\,m3}, \quad \sigma_{12}^{*} = (c_{11} - c_{12})\sum_{j=1}^{2}\varphi_{j,12}$$

2. Из неравенств, которым удовлетворяют коэффициенты жесткости, следует, что постоянная B всегда положительна. Поэтому тип корней характеристического уравнения (1.7) определяется знаком постоянной A: при $A > 0$ имеем два разных вещественных корня уравнения (1.7), при $A < 0$ — два комплексно-сопряженных корня, а при $A = 0$ — два равных корня $h_m = 1$. Случай равных корней требует отдельного рассмотрения, так как при этом постоянные β_m не могут быть непосредственно определены по формулам (1.6).

В случае равных корней характеристического уравнения, когда

$$(c_{13} + 2c_{44})\,c_{11}^{-1} = c_{33}\,(c_{13} + 2c_{44})^{-1} \equiv k$$

можно, следуя [7], перейти к четырем новым независимым упругим постоянным μ, λ, δ и γ: $c_{11} = (\lambda + 2\mu)\,\delta$, $c_{33} = (\lambda + 2\mu)\,\delta^{-1}$, $c_{44} = \mu$, $c_{13} = \lambda$, $c_{11} - c_{12} = 2\gamma\mu$. При этом $A \equiv 0$ и $k = \delta^{-1}$. Полагая $\delta = \gamma = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, выходим на случай изотропного материала с постоянными Ламе μ и λ и коэффициентом линейного расширения α.

Частное решение уравнений (1.1) в случае равных корней характеристического уравнения ищем в виде

$$u_m^{*} = \psi_{1,m} + x_3\psi_{2,m}, \quad u_3^{*} = \psi_{1,3} + x_3\psi_{2,3} - p\psi_2 \tag{2.1}$$

где функции ψ_m удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_2\psi_1 + k\psi_{1,33} = \beta T - qx_3T_{,3} \tag{2.2}$$

$$\Delta_2\psi_2 + k\psi_{2,33} = qT_{,3}$$

Подставляя (2.1) в (1.1) и используя (2.2), находим (опускаем выкладки, аналогичные проделанным выше для случая неравных корней), что постоянные p, q и β определяются следующими соотношениями:

$$p = (c_{13} + 3c_{44})\,(c_{13} + c_{44})^{-1}, \quad \beta = b_1c_{11}^{-1}$$

$$q = (b_2 - kb_1)\,[(1 - p)\,kc_{11}]^{-1}$$

Переходя в (2.1), (2.2) к изотропному материалу, получаем

$$k = 1, \ q = 0, \ \beta = \alpha\,(3\lambda + 2\mu)\,(\lambda + 2\mu)^{-1}$$

так что без потери общности $\psi_2 \equiv 0$, и указанное представление сводится к решению Гудьера [6], а функция ψ_1 — к классическому потенциалу перемещений.

В случае равных корней характеристического уравнения компоненты тензора напряжений выражаются через обобщенные потенциалы перемещений ψ_m следующим образом:

(2.3)
$$\sigma_{mm}^* = -(c_{11}-c_{12})(\psi_{1,nn}+x_3\psi_{2,nn}) - 2c_{44}(\psi_{1,33}+x_3\psi_{2,33}) + c_{13}(1-p)\psi_{2,3}$$
$$\sigma_{33}{}^* = (c_{13}-b_2\beta^{-1})(\Delta_2\psi_1+x_3\Delta_2\psi_2) + (c_{33}-kb_2\beta^{-1})(\psi_{1,33} + x_3\psi_{2,33}) + c_{33}(1-p)\psi_{2,3}$$
$$\sigma_{m3}{}^* = c_{44}[2\psi_{1,m3}+2x_3\psi_{2,m3}+(1-p)\psi_{2,m}]$$
$$\sigma_{12}{}^* = (c_{11}-c_{12})(\psi_{1,12}+x_3\psi_{2,12})$$

3. С использованием очевидных аффинных преобразований координат уравнения относительно обобщенных потенциалов перемещений φ_m ($A \neq 0$) или ψ_m ($A = 0$) приводятся к уравнениям Пуассона. Частные решения этих уравнений можно выбрать в форме интегралов типа потенциалов, например, функции φ_m допускают такие представления:

$$\varphi_m(x_i) = -\frac{\beta_m}{4\pi}\iiint \frac{T(x_i')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'}{\{k_m[(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2]+(x_3-x_3')^2\}^{1/2}}$$

где интегрирование проводится по области, занимаемой упругим материалом.

По сравнению с предложенными ранее [2, 3] формами решения уравнений (1.1) представление (1.3), (1.4) наиболее предпочтительно с точки зрения удовлетворения критериям, предложенным Стернбергом (эти критерии перечислены в [8]) для оценки способов введения функций напряжений.

Более общее решение уравнений термоупругого равновесия (1.1) можно получить полагая

(3.1) $$u_1 = u_1{}^* + \omega_{,2}, \quad u_2 = u_2{}^* - \omega_{,1}, \quad u_3 = u_3{}^*$$

где $u_i{}^*$ определяются формулами (1.3) в случае неравных корней характеристического уравнения и формулами (2.1) в случае равных корней, а функция ω, введенная в [9, 10], удовлетворяет однородному уравнению $\Delta_2\omega + 2c_{44}(c_{11}-c_{12})^{-1}\omega_{,33} = 0$ и не зависит от поля температуры.

Из решения (1.3), (1.4) можно получить предложенное Новацким [2] представление частного решения уравнений (1.1) через одну функцию, удовлетворяющую неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка. С этой целью введем новую функцию Ψ при помощи соотношений

(3.2) $$\varphi_m = \beta_m(\Delta_2\Psi + k_n\Psi_{,33})$$

При этом уравнения (1.4) относительно обобщенных потенциалов перемещений φ_m сводятся к одному уравнению четвертого порядка относительно функции Ψ, а именно

$$\left(\Delta_2 + k_1\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}\right)\left(\Delta_2 + k_2\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}\right)\Psi = T$$

Представления компонентов вектора перемещений и тензора напряжений через функцию Ψ можно получить подставляя (3.2) в (1.3) и (1.9).

4. Представление (3.1) позволяет строить решения краевых задач теории температурных напряжений для трансверсально-изотропных тел в виде суперпозиции решений независимых уравнений, приводящихся с помощью аффинных преобразований координат к уравнениям Пуассона.

В качестве примера рассмотрим неосесимметричную смешанную краевую задачу о давлении абсолютно жесткого нагретого штампа произвольной формы в плане на трансверсально-изотропное упругое полупространство $x_3 \geqslant 0$ при отсутствии сил трения.

Механические граничные условия сформулированной задачи имеют вид

(4.1) $$\sigma_{m3}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty$$
$$u_3(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S$$
$$\sigma_{33}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \notin S$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \ x = |\mathbf{x}| \equiv (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

где $f(\mathbf{x})$ — заданная (с точностью до параметров перемещения штампа как твердого тела) функция, описывающая форму основания штампа, S — площадка контакта.

При отсутствии источников тепла стационарное температурное поле удовлетворяет уравнению [5]

(4.2) $$\Delta_2 T + \varkappa^2 T_{,33} = 0$$

где $\varkappa^2$ — отношение коэффициента теплопроводности в направлении оси x_3 к коэффициенту теплопроводности в направлениях осей x_1 и x_2.

Для определенности рассмотрим температурные граничные условия типа a по классификации из работы [11], в которой указаны четыре типа идеализированных условий для контактных задач, а именно ($t(\mathbf{x})$ — заданная функция)

(4.3) $$T(\mathbf{x}, 0) = t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \quad T(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \notin S$$

Соотношения (4.1) и (4.3) следует дополнить стандартными условиями равновесия штампа и затухания термоупругого поля на бесконечности [12, 13].

Разберем случай неравных корней характеристического уравнения. При отсутствии на границе полупространства касательных напряжений можно без потери общности положить в (3.1) $\omega \equiv 0$, поэтому будем использовать непосредственно представление (1.3), опуская звездочку в обозначениях перемещений и напряжений.

Введем оператор двумерного интегрального преобразования Фурье

$$F\{\varphi(\mathbf{x}, x_3)\}(\xi, x_3) \equiv \varphi^F(\xi, x_3) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}, x_3) \exp(i\xi \cdot \mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$
$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

действуя которым на (4.2), (1.4) и решая получаемые при этом обыкновенные дифференциальные уравнения с учетом условий на бесконечности, находим ($E_m(\xi)$ — произвольные функции)

(4.4) $$T^F(\xi, x_3) = T^F(\xi, 0)\exp(-\xi z), \quad \xi = |\xi|$$
$$\varphi_m^F(\xi, x_3) = E_m(\xi)\exp(-\xi z_m) +$$
$$+ \beta_m \varkappa^2 (k_m - \varkappa^2)^{-1} \xi^{-2} T^F(\xi, 0)\exp(-\xi z)$$
$$z = x_3/\varkappa, \quad z_m = x_3/k_m^{1/2}$$

Применяя преобразование Фурье к (1.3) и (1.9), подставляя в полученные соотношения формулы (4.4) и полагая $x_3 = 0$, приходим, в частности, к следующим представлениям:

(4.5) $$u_3^F(\xi, 0) = -\sum_{j=1}^{2} h_j [\xi E_j(\xi) k_j^{-1/2} + \varkappa \xi^{-1} T^F(\xi, 0) r_j]$$
$$\sigma_{m3}^F(\xi, 0) = i\xi_m c_{44} \sum_{j=1}^{2} (1 + h_j)[\xi E_j(\xi) k_j^{-1/2} + \varkappa \xi^{-1} T^F(\xi, 0) r_j]$$
$$\sigma_{33}^F(\xi, 0) = \xi^2 c_{44} \sum_{j=1}^{2} (1 + h_j)[E_j(\xi) + \varkappa^2 \xi^{-2} T^F(\xi, 0) r_j]$$
$$r_m = \beta_m (k_m - \varkappa^2)^{-1}$$

Используя первое граничное условие (4.1), из второго соотношения (4.5) находим зависимость между функциями $E_m(\xi)$

$$E_2(\xi) = -\frac{(1+h_1)k_2^{1/2}}{(1+h_2)k_1^{1/2}}E_1(\xi) - \tag{4.6}$$

$$-\frac{\varkappa k_2^{1/2}}{(1+h_2)\xi^2}T^F(\xi,0)\sum_{j=1}^{2}(1+h_j)r_j$$

Подставляя выражение (4.6) в первое и третье уравнения (4.5) и исключая из полученных соотношений функцию $E_1(\xi)$, устанавливаем формулу связи между преобразованиями Фурье нормальных перемещений и нормальных напряжений в точках плоскости $x_3 = 0$

$$u_3^F(\xi,0) = H^*\xi^{-1}\sigma_{33}^F(\xi,0) + G^*\xi^{-1}T^F(\xi,0) \tag{4.7}$$

$$H^* = (k_1^{1/2} + k_2^{1/2})c_{11}(c_{13}^2 - c_{11}c_{33})^{-1}$$

$$G^* = \varkappa(k_1^{1/2} - k_2^{1/2})^{-1}[\beta_1(1-h_1)(k_1^{1/2}+\varkappa)^{-1} - \beta_2(1-h_2)(k_2^{1/2}+\varkappa)^{-1}]$$

Действуя на (4.7) оператором обратного преобразования Фурье, с учетом третьего граничного условия (4.1) и граничных условий (4.3) находим

$$u_3(\mathbf{x},0) = H\iint\limits_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + G\iint\limits_S \frac{t(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{4.8}$$

$$H = -(2\pi)^{-1}H^*, \quad G = (2\pi)^{-1}G^*$$

где $\sigma(\mathbf{x}) = -\sigma_{33}(\mathbf{x},0)$ — контактное давление.

Удовлетворяя при помощи (4.8) второму граничному условию (4.1), приходим к двумерному интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления

$$H\iint\limits_S \sigma(\mathbf{x}')|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}d\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) - G\theta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S \tag{4.9}$$

$$\theta(\mathbf{x}) = \iint\limits_S t(\mathbf{x}')|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}d\mathbf{x}'$$

которое в изотермическом случае (когда $\theta(\mathbf{x}) \equiv 0$) сводится к известному [13].

5. Контактная задача трансверсально-изотропной термоупругости для кругового штампа достаточно полно исследована [5], приведены [11, 14] некоторые результаты по температурной контактной задаче изотропной теории упругости для эллиптического штампа, изучен [12, 13] соответствующий изотермический случай.

Ниже рассмотрим контактную задачу для нагретого эллиптического в плане штампа с полиномиальной формой основания, вдавливаемого в трансверсально-изотропное упругое полупространство (главный вектор и главные моменты приложенных к штампу сил считаются заданными). В этом случае

$$S = \left\{(\mathbf{x}, x_3): \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \leqslant 1, x_3 = 0\right\}, \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i+j=0}^{l_1} f_{ij}x_1^i x_2^j$$

где a_1 и a_2 — полуоси эллипса, $f(\mathbf{x})$ — полином произвольной степени l_1 по x_1 и x_2, причем коэффициенты f_{ij} при $i + j > 1$ заданы, а f_{00}, f_{10} и f_{01} — заранее неизвестные поступательное перемещение и проекции вектора поворота штампа.

Можно показать, что если заданное распределение температуры по площадке контакта S имеет вид

$$(5.1)\qquad t(\mathbf{x})=v^{k-1/2}(\mathbf{x})\sum_{i+j=0}^{l_2-2k} t_{ij}x_1^ix_2^j,\quad v(\mathbf{x})=1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}$$

где l_2 — произвольное целое число, k — любое из чисел 0, 1, 2, ..., $[l_2/2]$, $[r]$ — целая часть числа r, то

$$\theta(\mathbf{x})=\sum_{i+j=0}^{l_2}\theta_{ij}x_1^ix_2^j$$

причем коэффициенты θ_{ij} известным образом выражаются через постоянные t_{ij} [15].

При сделанных выше предположениях интегральное уравнение (4.9) содержит в правой части полином степени $l=\max\{l_1, l_2\}$ по x_1 и x_2:

$$(5.2)\qquad H\iint\limits_S \sigma(\mathbf{x}')\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\,d\mathbf{x}'=\sum_{i+j=0}^{l} q_{ij}x_1^ix_2^j,\ \mathbf{x}\in S$$

коэффициенты которого q_{ij} определяются очевидным образом через постоянные f_{ij} и θ_{ij}.

Полагая

$$(5.3)\qquad \sigma(\mathbf{x})=v^{-1/2}(\mathbf{x})\sum_{i+j=0}^{l}\tau_{ij}x_1^ix_2^j$$

приводим (5.2) к системе из $^1/_2\,(l+1)\,(l+2)$ линейных алгебраических уравнений относительно $3+{}^1/_2\,(l+1)\,(l+2)$ неизвестных постоянных f_{00}, f_{10}, f_{01} и τ_{ij}. Три дополнительных алгебраических уравнения относительно τ_{ij} дают условия равновесия штампа. Явный вид всех этих алгебраических уравнений указан в [15].

Таким образом, если эллиптический в плане штамп с острой кромкой имеет полиномильное основание и распределение температуры по площадке контакта описывается формулой (5.1), то контактное давление под штампом имеет вид (5.3), а коэффициенты τ_{ij} определяются из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Установленный результат обобщает известную теорему Л. А. Галина о функциональном виде контактного давления под эллиптическим в плане штампом [12] на случай трансверсально-изотропной термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elliott H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1948. V. 44. No. 4. P. 522—533.
2. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир. 1986. 159 с.
3. *Noda N.*, *Takeuti Y.*, *Sugano Y.* On a general treatise of three-dimensional thermoelastic problems in transversely isotropic bodies // ZAMM. 1985. B. 65. H. 10. S. 509—512.
4. *Singh A.* Axisymmetrical thermal stresses in transversely isotropic bodies // Arch. Mech. Stosow. 1960. V. 12. No. 3. P. 287—304.
5. *Грилицкий Д. В.*, *Кизыма Я. М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища шк. 1981. 136 с.
6. *Боли Б.*, *Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир. 1964. 517 с.
7. *Ting T. C. T.*, *Jin Y.*, *Chou S. C.* Eigenfunctions at a singular point in transversely isotropic materials under axisymmetric deformations // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. No. 3. P. 565—570.
8. *Youngdahl C. K.* On the completeness of a set of stress functions appropriate to the solution of elasticity problems in general cylindrical coordinates // Intern. J. Eng. Sci. 1969. V. 7. No. 1. P. 61—79.
9. *Hu H.-C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Acta Sci. Sinica. 1953. V. 2. No. 2. P. 145—151.

10. *Lodge A. S.* The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. No. 2. P. 211—225.
11. *Barber J. R.* Thermoelastic contact problems // The mechanics of the contact between deformable bodies. Enschede: Delft Univ. Press. 1975. P. 177—190.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980. 303 с.
13. *Gladwell G. M. L.* Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen aan den Rijn; Germanzown: Sijthoff and Noordhoff. 1980. 716 p.
14. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука. 1976. 493 с.
15. *Бородачев А. Н.* Об одном методе решения двумерного интегрального уравнения первого рода со степенным ядром и его применении к контактным задачам // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 839—844.

Киев

Поступила в редакцию
12.III.1987