Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 539.3

ДАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПРИ ОБЩИХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТНОГО СЦЕПЛЕНИЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ

Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.

Рассматривается контактное взаимодействие упругой полуплоскости и произвольной системы сцепленных и частично или полностью отслоившихся штампов. Задача сведена к комбинированной краевой задаче Дирихле—Римана [1] и решена в квадратурах. Обсуждаются новые варианты метода и проблемы, возникающие в задачах с двумя и более участками скольжения; ранее [2] были изучены аналогичные задачи с одним участком скольжения. В качестве примера исследуется в расширенной постановке задача С. В. Фальковича [3].

1. Пусть $L_k = \langle a_k, b_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, l$,— открытые, полуоткрытые или замкнутые промежутки, $M_k = [p_k, q_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$,— отрезки действительной оси $y = 0$, на которых штампы имеют соответственно скользящий контакт и полное сцепление с упругой полуплоскостью $-\infty < x < \infty$, $y \leqslant 0$; $a_1 < b_1 < \ldots < b_l$, $p_1 < q_1 < \ldots < q_m$. Форму штампов, касательный натяг на M_k, безотрывное прилегание и непересечение штампа и полуплоскости определим граничными условиями

$$
\begin{gathered}
u' = u_0'(x), \quad x \in M; \quad v' = v_0'(x), \quad x \in L \cup M; \\
L = \bigcup_{k=1}^{l} L_k, \quad M = \bigcup_{k=1}^{m} M_k \\
\tau_{xy} = \tau_0(x), \ x \in L; \ \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \ x \in S; \ L \cap M = 0 \\
\sigma_y \leqslant 0, \ x \in L; \ v(x) - v_0(x) \geqslant 0, \ x \in S'
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь S — дополнение $L \cup M$ до действительной оси, S' — участки вне $L \cup M$, на которых основание штампа, имеющее форму $v_0(x)$, не соприкасается с полуплоскостью; заданные функции удовлетворяют условию Гельдера; промежуток $L_k = [a_k, b_k]$ ($L_k = (a_k, b_k)$) является замкнутым (открытым) в том случае, если к нему с двух сторон примыкают участки свободной границы S полуплоскости (участки сцепления M_j и M_{j+1}); полуоткрытые промежутки $L_k = (a_k, b_k]$ или $L_k = [a_k, b_k)$ соответствуют примыканию M_j к L_k только слева, при $q_j = a_k$, или справа, при $b_k = p_j$. На каждом открытом интервале (a_k, b_k) зададим касательный натяг $\chi_k = u(b_k) - u(a_k)$. К каждому полностью отслоившемуся штампу, занимающему отрезок $[a_k, b_k]$, приложим нормальную силу Y_k, к каждому штампу, имеющему один или несколько участков сцепления M_j, M_{j+1}, ... и, может быть, несколько участков скольжения,— одну касательную X_j' и одну нормальную силу Y_j'. Общее число параметров χ_k, Y_k, X_j', Y_j', очевидно, равно $l + 2m - \alpha' - 2\alpha''$, где α' — число полуоткрытых, α'' — число открытых промежутков L_k.

Решение задачи будем искать в форме [4]

$$
\begin{gathered}
\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)}, \quad z = x + iy \\
2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} \\
\Phi(z) = {}^1/_4\sigma_x^\infty + 2i\mu\varepsilon^\infty(\varkappa + 1)^{-1} - Fe^{i\theta}(2\pi z)^{-1} + O(z^{-2}), \\
z \to \infty
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где F и θ — величина и угол наклона к оси Ox главного вектора всех сил Y_k, X_j', Y_j', $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, σ_x^∞ — постоянная составляющая поля напряжений, ε^∞ — вращение на бесконечности.

Подставив (1.2) в (1.1), получим комбинированную краевую задачу Дирихле — Римана [1] для кусочно-аналитической функции с граничной линией $L \bigcup M$

$$(1.3)\qquad \operatorname{Im}\Phi^\pm(x) = f^\pm(x),\quad f^\pm(x) = (\varkappa+1)^{-1}[2\mu v_0'(x) \pm \tau^\pm(x)]$$
$$\tau^+(x) = \varkappa\tau_0(x),\ \tau^-(x) = \tau_0(x),\ x \in L$$

$$(1.4)\qquad \Phi^+(x) + \varkappa\Phi^-(x) = g(x),\ g(x) = 2\mu[u'_0(x) + iv_0'(x)],\quad x \in M$$

Каноническое решение $X(z)$ однородной задачи (1.3), (1.4) имеет вид

$$(1.5)\qquad X(z) = Z(z)e^{i\psi(z)}\prod_{j=1}^{l}(z-b_j)^{-\alpha_j}\prod_{j=1}^{l-1}(z-c_j)^{-\beta_j}$$

$$Z(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-p_k)^{-1/2+i\gamma}(z-q_k)^{-1/2-i\gamma},\quad \gamma = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\frac{Y(z)[h^+(t)+h^-(t)]}{Y^+(t)} + h^+(t) - h^-(t)\right\}\frac{dt}{t-z}$$

$$Y(z) = \prod_{k=1}^{l}(z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2},\quad Y(z) = z^l + O(z^{l-1}),\quad z\to\infty$$

$$Y^+(t) = i(-1)^{l-k}\left[\prod_{j=1}^{l}|t-a_j||t-b_j|\right]^{1/2},\quad t\in L_k$$

$$h^\pm(t) = \pi n_k^\pm - \arg Z^\pm(t) + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\arg(t-b_j)^\pm +$$
$$+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j\arg(t-c_j)^\pm,\quad t\in L_k$$

Здесь $n_k^\pm$, α_k, $\beta_k \neq 0$ — целые, c_k — комплексные числа; разрезы в плоскости z проведены вдоль действительной оси в положительном направлении, $Z(z)$ — каноническое решение однородной задачи Римана (1.4) в наиболее широком классе функций, интегрируемых в узлах p_k, q_k, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\psi(z)$ — решение задачи Дирихле $\operatorname{Re}\psi^\pm(x) = h^\pm(x)$, $x \in L$, ограниченное в узлах a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, и на бесконечности, что возможно только при выполнении условий

$$(1.6)\qquad \int_L\frac{h^+(t)+h^-(t)}{Y^+(t)}t^{j-1}dt = 0,\quad j = 1, 2, \ldots, l-1$$

Допуская существенный произвол в выборе чисел β_k и c_k, форма решения (1.5), (1.6) порождает и проблему этого выбора. Исключение составляет случай $l = 1$ [2], когда независимо от величины m в функцию $X(z)$ множители $(z-c_k)^{-\beta_k}$ не входят.

В [1, 2] общее решение однородной задачи Дирихле — Римана построено в виде суммы линейно независимых канонических решений. Ниже применяется иной метод, использующий одно каноническое решение. Различные варианты метода позволяют получить общее решение при данном соотношении между параметрами l, m, α' и α'' в наиболее простой и удобной форме.

Общее решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в самом широком классе функций $\Phi(z)$, определяющих конечную локальную энергию упругих деформаций полуплоскости в окрестности концов всех промежутков L_k, M_j и постоянных на бесконечности. Это соответствует решению задачи (1.3), (1.4) в самом широком классе кусочно-аналитических функций с граничной линией $L \bigcup M$ [5]. Однако, в отличие от задач Дирихле и Римана, каноническое решение (1.5), (1.6) комбинированной задачи Дирихле — Римана в общем случае не может быть построено в этом классе функций.

Действительно, в окрестности концов L_k асимптотики функции $X(z)$ имеют вид

(1.7) $$X(z) = O[(z-a_k)^{\mu_k}], \quad z \to a_k; \quad X(z) = O[(z-b_k)^{\nu_k}], \quad z \to b_k$$

(1.8) $$\mu_k = \delta_k + \omega_k - {}^1/_2 w_k^-, \quad \nu_k = \varepsilon_k - \omega_k + {}^1/_2 w_k^- - \alpha_k, \quad w_k^- = n_k^+ - n_k^-$$

(1.9) $$\omega_k = \theta_k - \frac{1}{2\pi}\arg\frac{Z^+(x)}{Z^-(x)}\Big|_{x\in L_k}, \quad \theta_k = \sum_{j=1}^{k-1}\alpha_k \quad (k > 1), \quad \theta_1 = 0$$

где $\delta_k = -{}^1/_2$ ($\delta_k = 0$), если точка a_k совпадает (не совпадает) с какой-либо точкой q_j; $\varepsilon_k = -{}^1/_2$ ($\varepsilon_k = 0$), если точка b_k совпадает (не совпадает) с точкой p_{j+1}. Поскольку функция $\arg\{Z^+(x)[Z^-(x)]^{-1}\}$ на L_k постоянна и кратна 2π, а α_k — целые числа, числа ω_k тоже целые.

Пусть в обоих узлах L_k функция $X(z)$ имеет интегрируемые особенности. Тогда из вида чисел (1.8) следует, что $\mu_k = \nu_k = -{}^1/_2$. Складывая равенства (1.8), получим соотношение $\alpha_k = \delta_k + \varepsilon_k + 1$, в силу которого число α_k может быть целым только при $\delta_k = \varepsilon_k$. Если $\delta_k = \varepsilon_k = -{}^1/_2$ ($L_k = (a_k, b_k)$), то $\alpha_k = 0$, если $\delta_k = \varepsilon_k = 0$ ($L_k = [a_k, b_k]$), то $\alpha_k = 1$. Если же $L_k = (a_k, b_k]$ или $L_k = [a_k, b_k)$, то будем полагать $\mu_k = -{}^1/_2$, $\nu_k = 0$, требуя ограниченности решения в точке b_k; при этом $\alpha_k = 0$.

Замечание 1. В задачах, имеющих какую-либо симметрию в расположении участков L_k и M_j, целесообразно вводить особенности функции $X(z)$ также симметрично.

Определив параметры α_k и зная взаимное расположение участков L_k и M_j, по формулам (1.9) найдем числа ω_k, по формуле (1.8) — разности $w_k^- = n_k^+ - n_k^-$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Так как числа $n_k^\pm$ целые, то разности w_k^- и суммы $w_k^+ = n_k^+ + n_k^-$ будут при каждом k одновременно четными или нечетными. Кроме указанных связей числа w_k^+ и c_k должны удовлетворять условиям (1.6), которые согласно (1.5) представляют собой систему $l - 1$ уравнений, линейных алгебраических относительно w_k^+ и трансцендентных относительно c_k. При выборе входящих в систему чисел β_k достаточно ввести в (1.5) только простые полюсы и нули $z = c_k$, полагая $|\beta_k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, l - 1$.

Пусть s_k, $k = 1, \ldots, l - 1$,— система произвольных непрерывных кривых. Пусть каждая кривая s_k целиком лежит в верхней ($y > 0$) или нижней ($y < 0$) полуплоскости, включая соответствующие берега L_k^+ и L_k^- разреза L_k, и имеет концы в точках a_k и b_k. Тогда можно показать, что при $w_l^+ = w_l^-$ и произвольном распределении по k чисел $\beta_k = \pm 1$ и четностей чисел w_k^+ система (1.6) имеет решение в виде целых чисел w_k^+ и комплексных чисел $c_k \in s_k$. В частности, если линия s_k совпадет с одним из берегов $L_k^\pm$, то c_k — действительное число.

Замечание 2. Вместо $l - 1$ кривых s_k, $k = 1, \ldots, l - 1$, и соотношения $w_l^+ = w_l^-$ можно взять $l - 1$ произвольных кривых и задать произвольное число w_k^+ той же четности, что и w_k^-, при любом одном k из l возможных.

Существование континуума решений $c_k \in s_k$ имеет ясный механический смысл: оно соответствует континуальному множеству форм равновесия полуплоскости при заданных показателях особенностей μ_k, ν_k, $k = 1, \ldots, l$, и неопределенных параметрах χ_k, Y_k, X_j', Y_j', ε^∞, σ_x^∞.

На общее количество β нулей $z = c_k$ (чисел $\beta_k = -1$) ниже налагаются разного рода ограничения. Выбрав с их учетом какую-либо последовательность β_k, $k = 1, 2, \ldots, l-1$, и определив из системы (1.6) неизвестные w_k^+ и c_k, получим функцию $X(z)$, имеющую на бесконечности, согласно (1.5) асимптотику

(1.10) $$X(z) = O(z^{-r}), \quad r = 2l + m - \alpha' - \alpha'' - 2\beta - 1$$

2. Перейдем к построению общего решения комбинированной задачи (1.3), (1.4). Полагая

(2.1) $$\Phi(z) = X(z)\,[\Phi_1(z) + \Phi_2(z)]$$

где $\Phi_2(z)$ — функция, аналитическая на M, из (1.4) получим задачу о скачке $\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = g(x)\,[X^+(x)]^{-1}$, $x \in M$, решение которой имеет вид

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}$$

Так как $\Phi_1(z) = O(z^{-1})$, $z \to \infty$, то из (2.1) и из условия $\Phi(z) = O(1)$, $z \to \infty$, следует, что $r \geqslant -1$, и значит, в силу (1.10) число нулей β ограничено ($E\{x\}$ — целая часть x)

(2.2) $$\beta \leqslant E\,\{{}^1/_2\,(2l + m - \alpha' - \alpha'')\}$$

Пусть для всех нулей $z = c_k$ $\operatorname{Im} c_k \neq 0$. Тогда, подставив (2.1) в (1.3), получим задачу Дирихле [5]

(2.3) $$\operatorname{Im}\Phi_2^{\pm}(x) = f_2^{\pm}(x), \quad f_2^{\pm}(x) = f^{\pm}(x)\,[X^{\pm}(x)]^{-1} - \operatorname{Im}\Phi_1(x), \quad x \in L$$

Естественно предположить, что интегрируемые особенности функции $\Phi(z)$ по аналогии с $X(z)$ корневые (это можно строго доказать, но при наличии теоремы единственности решения задачи (1.1), (1.2) такое доказательство не требуется). Тогда, исходя из равенства (2.1) и асимптотик (1.10), (1.7) функции $X(z)$, имеющей корневые особенности во всех узлах a_k, b_k, кроме α' узлов b_k полуоткрытых промежутков L_k, где она ограничена, решение задачи (2.3) нужно найти в классе функций, интегрируемых в указанных α' узлах b_k и конечных в остальных $2l - \alpha'$ узлах контура L при дополнительном условии $\Phi_2(z) = O(z^r)$, $z \to \infty$.

Учитывая, что это решение может иметь в β точках c_k простые полюсы, получим

(2.4) $$\Phi_2(z) = \frac{Y_0(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f_2^+(t) + f_2^-(t)}{Y^+(t)(t-z)}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f_2^+(t) - f_2^-(t)}{t-z}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\beta}\left\{\frac{A_k}{z-c_k} + \frac{\bar A_k}{z-\bar c_k} + Y(z)\left[\frac{A_k}{Y(c_k)(z-c_k)} - \frac{\bar A_k}{Y(\bar c_k)(z-\bar c_k)}\right]\right\} +$$
$$+ P_r(z) + iQ_s(z)\,Y_0(z), \quad Y_0(z) = Y(z)\prod_{k=1}^{\alpha'}(z-b_k')^{-1},$$
$$s = r - l + \alpha'$$
$$P_r(z) = C_0 + C_1 z + \ldots + C_r z^r, \quad Q_s(z) = D_0 + D_1 z + \ldots$$
$$\ldots + D_s z^s$$

Здесь C_k, D_k — произвольные действительные, A_k — произвольные комплексные постоянные, для простоты записи в качестве нулей взяты первые β чисел c_k; если первый интеграл (2.4) отличен от нуля, то условие $X(z)\,\Phi_2(z) = O(1)$, $z \to \infty$, эквивалентное условию $X(z)\,Y_0(z)\,z^{-1} = O(1)$, накладывает на β ограничение

$$\beta \leqslant E\,\{{}^1/_2\,(l + m - \alpha')\} \tag{2.5}$$

не менее жесткое, чем (2.2); через b_k' обозначены α' узлов b_k, в которых функция $X(z)$ ограничена, $\nu_k = 0$. В итоге функция $\Phi_2(z)$ содержит $N = 2\beta + r + s + 2$ произвольных действительных постоянных. Из них $2(l - \beta - 1)$ постоянных должно уйти на ликвидацию полюсов функции $\Phi(z)$. Согласно (2.1), для этого достаточно потребовать обращения в нуль соответствующей кратности функции $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ в $l - \beta - 1$ простых комплексных или двукратных действительных полюсах c_k (если s_k — берег L_k, то полюсы и нули $c_k \in s_k$ удваиваются на этом берегу за счет образования логарифмической особенности у функции $\psi(z)$ в точке c_k). Количество $l + 2m - \alpha' - 2\alpha'' + 2$ оставшихся действительных постоянных не зависит от β и равно числу заданных кинематических и силовых параметров χ_k, Y_k, X_j', Y_j', ε^∞, σ_x^∞ исходной задачи, полученному в п. 1.

Таким образом, N постоянных (2.4) могут быть найдены из системы N линейных алгебраических уравнений; матричные элементы системы, соответствующие силовым и кинематическим факторам, вычисляются, как обычно [4], путем интегрирования контактных напряжений и граничных перемещений. В силу линейной независимости функций (2.4), умножаемых на эти N постоянных, и в силу единственности решения задачи теории упругости (1.1), (1.2), определитель системы отличен от нуля и она имеет единственное решение. Аналогичный результат получается и при объединении нескольких штампов в один или при ином ограничении их степеней свободы.

Для решения задачи (1.1), (1.2) в более узком классе функций — с конечными напряжениями в каких-либо N_1 узлах — можно, исходя из формул (1.2), (2.1), приравнять нулю коэффициенты интенсивности напряжений в этих узлах и получить N_1 условий связи заданных функций (1.1) и всех параметров $a_1, b_1, \ldots, q_m, \chi_k, Y_1, \ldots, X_m', \varepsilon^\infty, \sigma^\infty$, ранее независимых.

Рассмотрим варианты выбора s_k и β_k. Представление $N = 3l + 2m - \alpha' - 2\alpha'' - 2\beta$ показывает, что количество неизвестных в (2.4) уменьшается при увеличении числа нулей β, сокращаясь до минимума при $\beta = l - 1$. Однако увеличению β могут препятствовать с одной стороны условия (2.2), (2.5), с другой — усложнение поиска комплексных нулей (по сравнению с допускаемыми действительными полюсами c_k) и последующих вычислений. Если снять ограничение $\operatorname{Im} c_k \neq 0$ при $\beta_k = -1$, то решение однородной задачи Дирихле (2.3) с заданными двукратными действительными полюсами $c_k \in L_k^{\pm}$ выразится не в элементарных функциях (2.4), а в квадратурах, либо сведется к решению двух дополнительных систем уравнений типа (1.6); при этом неоднородную задачу (2.3) придется разбить на две, так, чтобы $f^{\pm}(x) \equiv 0$, $x \in L_k$ при $X^{\pm}(c_k) = 0$.

Можно, следуя [1], положить $\beta_k = -1$, $c_k \in L_k^{\pm}$ для всех k и, не сводя задачу Дирихле—Римана к задаче Дирихле, построить решение в виде суммы канонических линейно независимых решений (1.5). В этом случае система содержит $N = l + 2m - \alpha' - 2\alpha'' + 2$, т. е. минимум неизвестных но необходимо решить дополнительно примерно ${}^1/_2 N_2$ уравнений (1.6). Таким образом, каждый вариант имеет в разных случаях свои преимущества и недостатки.

3. В качестве примера рассмотрим в более общей постановке задачу С. В. Фальковича [3]. Пусть полуплоскость соприкасается с плоским штампом, имеющим два симметричных участка скольжения $L_1 = [-a, -b)$, $L_2 = (b, a]$ и один участок сцепления без натяга $M_1 = [-b, b]$. Тогда

$$
(3.1) \qquad \begin{aligned} & a_1 = -a, \quad b_1 = p_1 = -b, \quad a_2 = q_1 = b, \quad b_2 = a, \quad \alpha' = 2, \\ & \alpha'' = 0 \\ & l = 2, \quad m = 1, \quad u_0'(x) = v_0'(x) = \tau_0(x) \equiv 0, \quad X_1' = F\cos\theta, \\ & Y_1' = F\sin\theta, \quad \beta \leqslant 1 \end{aligned}
$$

В отличие от [3], здесь $X_1' \neq 0$ и снято условие абсолютной устойчивости трещин $\tau_{xy}(\pm b, 0) = 0$, существенно упрощающее задачу.

В силу (3.1) в каноническом решении (1.5) имеем

$$
(3.2) \qquad \begin{aligned} & Z(z) = (z+b)^{-1/2+i\gamma}(z-b)^{-1/2-i\gamma}, \quad \arg Z^{\pm}(x) = -s(x) - \\ & -\pi m_j^{\pm}, \quad x \in L_j \\ & s(x) = \gamma \ln |(x+b)^{-1}(x-b)|, \quad m_1^{\pm} = 1, m_2^{+} = \delta_1 = \varepsilon_2 = 0, \\ & m_2^{-} = 2, \quad \varepsilon_1 = \delta_2 = -1/2 \end{aligned}
$$

Учитывая замечание 1, положим $\mu_1 = \nu_2 = 0$; $\mu_2 = \nu_1 = -1/2$. Отсюда и из (1.8), (1.9), (3.2) при учете замечания 2 следует, что

$$
(3.3) \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \omega_1 = w_1^{-} = 0, \quad \omega_2 = 1, \quad w_2^{+} = -w_2^{-} = -2
$$

Из двух возможных вариантов $\beta = 0$ и $\beta = 1$ решения (2.1), (1.5) остановимся на первом. Пусть $c_2 = c \in L_2^{+}$, $\beta_2 = 1$, $\arg(x-c)^{\pm} = \pi[1 + U(x-c)]$, где $U(x)$ — единичная функция Хевисайда. Тогда согласно (3.1) — (3.3) имеем

$$
(3.4) \qquad \begin{aligned} & \psi(z) = \frac{Y(z)}{\pi i}\left[\int\limits_L \frac{s(t)\,dt}{Y^{+}(t)(t-z)} + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{L_j}\frac{w_j^{+} + 2U(t-c)}{Y^{+}(t)(t-z)}\,dt\right] + 2\pi \\ & Y(z) = \sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}, \quad Y^{+}(t) = -i(-1)^j Y_1(t), \quad t \in \\ & \in L_j; \quad Y_1(t) = \sqrt{(a^2-t^2)(t^2-b^2)} \end{aligned}
$$

Вычислив [2] первый интеграл (3.4), получим

$$
(3.5) \qquad \begin{aligned} & \psi(z) = \gamma \ln\frac{z-b}{z+b} + \varphi(z), \quad Y_2(t) = \sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)} \\ & \varphi(z) = Y(z)\left[\int\limits_{-b}^{b}\frac{\gamma\,dt}{Y_2(t)(t-z)} - \int\limits_{b}^{a}\left(\frac{w_1^{+}}{t+z} - \frac{2}{t-z}\right)\frac{dt}{2Y_1(t)} - \right. \\ & \left. - \int\limits_{c}^{a}\frac{dt}{Y_1(t)(t-z)}\right] \end{aligned}
$$

Подставив (3.1)—(3.5) в (1.5), получим

$$
(3.6) \qquad X(z) = (z-c)^{-1}(z^2-b^2)\,e^{i\varphi(z)}
$$

После аналогичных подстановок уравнение (1.6) принимает вид

$$
n\int\limits_{b}^{a}\frac{dt}{Y_1(t)} + \int\limits_{c}^{a}\frac{dt}{Y_1(t)} - \gamma\int\limits_{-b}^{b}\frac{dt}{Y_2(t)} = 0, \quad n = -1 - \frac{1}{2}w_1^{+}
$$

и может быть записано в эллиптических интегралах Лежандра первого рода

$$
(3.7) \qquad \begin{aligned} & nK(\lambda') + F(\eta, \lambda') - 2\gamma K(\lambda) = 0, \quad \lambda = a^{-1}b, \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2} \\ & \eta = \arcsin[(a^2-c^2)^{1/2}(a^2-b^2)^{-1/2}], \quad \lambda \in (0, 1) \end{aligned}
$$

где $K(\lambda)$ — полный, $F(\eta, \lambda)$ — неполный интеграл.

Обращая функцию $F(\eta, \lambda')$, из (3.7) получим явное выражение c через n и λ

$$(3.8)\qquad c = a\sqrt{1-\lambda'^2\,\mathrm{sn}^2(T,\lambda')},\quad T \equiv T(n,\lambda) = 2\gamma K(\lambda) - nK(\lambda')$$

Здесь $\mathrm{sn}(T, \lambda)$ — эллиптический синус Якоби, положительное значение корня выбрано по условию $c \in [b, a]$, $b > 0$.

Из свойств эллиптических функций и коэффициента Пуассона $K(\lambda) > 0$, $T = F(\eta, \lambda') \geqslant 0$, $F(\eta, \lambda') \leqslant K(\lambda')$, $\gamma > 0$ и из (3.8) вытекают неравенства

$$(3.9)\qquad 0 \leqslant 2\gamma K(\lambda) - nK(\lambda') \leqslant K(\lambda'),\quad n \geqslant 0$$

связывающие n и λ, если n, c — корень уравнения (3.7). В интервале $0 < \lambda < 1$ функция $K(\lambda)$ монотонно возрастает от $^1/_2\pi$ до ∞, функция $K(\lambda')$ монотонно убывает от ∞ до $^1/_2\pi$, поэтому функция $T(n, \lambda)$ также монотонно возрастает при любом $n \geqslant 0$, меняя знак при $n \geqslant 1$. Отсюда следует, что при фиксированном $n \geqslant 1$ существует единственный корень $\lambda = \lambda_n$ уравнения $T(n, \lambda) = 0$. Так как при $n \geqslant 0$ неравенство (3.9) выполняется в промежутке $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, где $\lambda_0 = 0$, то для всякого $\lambda \in (0, 1)$ можно определить из (3.9) единственное, исключая точки $\lambda = \lambda_n$, значение $n = E\{2\gamma K(\lambda)\, K^{-1}(\lambda')\}$, а затем, по формуле (3.8), соответствующее c, т. е. найти корень уравнения (3.7).

Замечание 3. В точках $\lambda = \lambda_n$ при всех $n \geqslant 1$ уравнение (3.7) имеет два корня: n, $c = a$ и $n - 1$, $c = b$.

Из формулы для n и монотонности возрастания функции $K(\lambda)$ следует, что в интервале $0 < \lambda < 1$ величина n неограниченно возрастает, пробегая последовательно значения 0, 1, 2, ... Из монотонности возрастания в промежутке $\lambda_n \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{n+1}$ эллиптического синуса в (3.8) от $\mathrm{sn}(0, \lambda_n') = 0$ до $\mathrm{sn}[K(\lambda_{n+1}'), \lambda_{n+1}'] = 1$ следует, что при каждом $n \geqslant 0$ величина c на $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ монотонно убывает от a (при $n \geqslant 1$) до b.

Общее решение (2.1), задачи (1.1), (3.1) имеет вид $\Phi(z) = X(z)\,\Phi_2(z)$, функция $X(z)$ определена в (3.6); согласно (1.5), (1.10), (2.2) и (2.4), $r = 2$, $s = 2$, $N = 6$

$$(3.10)\qquad \Phi_2(z) = P_2(z) + iQ_2(z)\,(z^2 - a^2)^{-1/2}\,(z^2 - b^2)^{1/2}$$

Четыре условия на бесконечности (1.2) и два условия ограниченности решения $\Phi_2^+(c) = 0$, $\Phi_2'^+(c) = 0$ дают следующую систему уравнений относительно шести произвольных постоянных, входящих в (3.10)

$$(3.11)\qquad \begin{gathered} C_2 + iD_2 = i\exp(i\zeta + {}^1/_2 in\pi)\,[{}^1/_4\sigma_x^\infty + 2i\mu\varepsilon^\infty(\varkappa+1)^{-1}] \\ (c + i\zeta_1)(C_2 + iD_2) + C_1 + iD_1 = -{}^1/_2 i\pi^{-1}F\exp(i\zeta + i\theta_n) \\ (a^2 - c^2)\,P_2(c) + Y_1(c)\,Q_2(c) = 0,\quad \theta_n = \theta + {}^1/_2 n\pi \\ (a^2 - c^2)\,P_2'(c) + Y_1(c)\,Q_2'(c) + c\,(a^2 - b^2)\,Y_1^{-1}(c)\,Q_2(c) = 0 \\ \zeta = \arcsin\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}},\quad \zeta_1 = -\int\limits_{-b}^{b}\frac{\gamma t\,dt}{Y_2(t)} + \int\limits_{b}^{a}\frac{nt^2\,dt}{Y_1(t)} - \int\limits_{c}^{a}\frac{t^2\,dt}{Y_1(t)} \end{gathered}$$

Контактные напряжения на участках проскальзывания и сцепления имеют вид $(j = 1, 2)$

$$(3.12)\qquad \begin{gathered} \sigma_y = -\frac{2(-1)^{n_j}}{|x-c|}\left[\frac{(-1)^j P_2(x)\,\mathrm{sh}\,\varphi_1(x)}{\sqrt{x^2-b^2}} + \frac{Q_2(x)\,\mathrm{ch}\,\varphi_1(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right],\quad x \in L_j \\ \sigma_y - i\tau_{xy} = -\frac{(\varkappa+1)\,e^{i\varphi_2(x)}}{\sqrt{\varkappa}\,(x-c)}\left[\frac{iP_2(x)}{\sqrt{b^2-x^2}} - \frac{Q_2(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right],\quad x \in [-b, b] \end{gathered}$$

$$\varphi_1(x) = (-1)^{j+1} Y_1(x)\varphi_0(x), \quad x \in L_j; \quad \varphi_2(x) = -Y_2(x)\varphi_0(x),$$
$$x \in [-b, b]$$
$$\varphi_0(x) = \int_{-b}^{b} \frac{\gamma\, dt}{Y_2(t)(t-x)} + \int_{b}^{a} \frac{n\, dt}{Y_1(t)(t+x)} -$$
$$-\int_{c}^{a} \frac{dt}{Y_1(t)(t-x)}, \quad x \in [-a, a]$$

где интегралы вычисляются в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим подробнее случай $\sigma_x^\infty = \varepsilon^\infty = 0$. Из системы уравнений (3.11) найдем

(3.13) $$C_0 = [-C_1\Delta_1 + D_1 Y(c)\sin^2\zeta]$$
$$D_0 = -[C_1 Y_1(c)\cos^2\zeta + D_1\Delta_2]$$
$$C_1 = F_*\sin(\zeta + \theta_n),\ D_1 = -F_*\cos(\zeta + \theta_n), \quad C_2 = D_2 = 0$$
$$F_* = {}^1/_2(\pi c)^{-1}F, \quad \Delta_1 = c^2\sin^2\zeta + b^2\cos^2\zeta,$$
$$\Delta_2 = c^2\cos^2\zeta + a^2\sin^2\zeta$$

Асимптотики напряжений в точках раздела граничных условий, согласно (3.12), (3.13), выражаются формулами

(3.14) $$\sigma_y(x) = K_{\rm I}(\pm b)[2\pi(-b \pm x)]^{-1/2} + \sigma_0(\pm b) + O(\sqrt{-b \pm x}),$$
$$x \to \pm b \pm 0$$
$$(\sigma_y - i\tau_{xy})(x) = \sigma_0(\pm b) - iK_{\rm II}(\pm b)[2\pi(b \mp x)]^{-1/2} +$$
$$+ O(\sqrt{b \mp x}), \quad x \to \pm b \mp 0$$
$$\sigma_y(x) = K_{\rm I}(\pm a)[2\pi(a \mp x)]^{-1/2} + O(\sqrt{a \mp x}), \quad x \to \pm a \mp 0$$
$$K_{\rm I}(\pm b) = (\varkappa + 1)(\varkappa - 1)^{-1} K_{\rm II}(\pm b),$$
$$K_{\rm II}(\pm b) = \pm(\varkappa + 1)cF_*\sqrt{\pi\Delta_1(\varkappa b)^{-1}}\sin(\delta_1 \mp \theta - {}^1/_2\pi n)$$
$$K_{\rm I}(\pm a) = \pm 2F_*\sqrt{\frac{\pi\Delta_2}{a}}\sin(\delta_2 \pm \theta + {}^1/_2\pi n),$$
$$\delta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right), \quad \delta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2}}\right)$$

($\sigma_0(\pm b)$ — некоторые постоянные).

Производная нормального перемещения свободной границы полуплоскости у краев штампа в силу (1.2), (3.14) имеет вид

(3.15) $$2\mu(\varkappa + 1)^{-1}v'(x) = -{}^1/_2 K_{\rm I}(\pm a)[2\pi(-a \pm x)]^{-1/2} +$$
$$+ O(\sqrt{-a \pm x}), \quad x \to \pm a \pm 0$$

Для того чтобы контактные напряжения на участках скольжения были сжимающими, необходимо удовлетворить четырем неравенствам $K_{\rm I}(\pm a) \leqslant 0$, $K_{\rm I}(\pm b) \leqslant 0$, которые при учете (3.14) запишем в виде

(3.16) $$\sin[\pm\delta_j + (-1)^j(\theta \pm {}^1/_2\pi n)] \leqslant 0, \quad j = 1, 2; \quad n \geqslant 0$$

Они порождают две последовательности условий, ограничивающих направление силы X_1', Y_1' и отношение длин участков скольжения и сцепления

(3.17) $$|\theta - {}^1/_2\pi| \leqslant \delta_0, \quad n = 1, 5, 9, \ldots; \quad |\theta - {}^3/_2\pi| \leqslant \delta_0, \quad n =$$
$$= 3, 7, 11, \ldots$$

Здесь $\delta_0 = \delta_1$ при $c \leqslant \sqrt{ab}$, $\delta_0 = \delta_2$, при $c \geqslant \sqrt{ab}$, первое неравенство соответствует отрыву, второе — вдавливанию штампа в полуплоскость. Неравенства (3.16) допускают кроме (3.17) решения в дискретном множестве точек $\lambda = \lambda_n$ при всех четных $n \geqslant 0$, но они не вносят ничего нового.

Действительно, при $\lambda = \lambda_n$ уравнение $T(n, \lambda) = 0$ согласно замечанию 3 имеет два корня — с четным и нечетным n, определяющих по теореме единственности одно и то же решение контактной задачи, а все нечетные n уже входят в (3.17).

Из (3.17) следует, что решение задачи (3.1) при $\sigma_x^\infty = \varepsilon_x^\infty = 0$ в интервалах $\lambda \in (\lambda_{2s}, \lambda_{2s+1})$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, не может быть механически реализовано ни при каких θ. Множество значений λ, для которых решение в окрестности точек $\pm a$, $\pm b$ имеет механический смысл, полностью совпадает с набором отрезков $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ только при $\theta = {}^1/_2\pi$, $n = 1, 5, \ldots$, и $\theta = {}^3/_2\pi$, $n = 3, 7, \ldots$, т. е. при $X_1' = 0$. По мере отклонения силы от нормали в любую сторону каждый n-й отрезок монотонно сужается, превращаясь при $|X_1'| = |Y_1'|$ в точку λ_n^*, определяемую уравнением $2\gamma K(\lambda_n^*) - (n + {}^1/_2) K'(\lambda_n^*) = 0$. При $|X_1'| > |Y_1'|$ рассматриваемая задача не имеет решения.

Возникает вопрос, являются ли условия (3.17) достаточными для выполнения неравенства $\sigma_y(x, 0) \leqslant 0$ при всех $x \in L$. Поскольку в задаче с одним участком отслаивания [2] достаточность строго обоснована, а участки L_1, L_2 малы по сравнению с M_1 (согласно числовым расчетам $\lambda_1 = 0{,}999$, $\lambda_2 = 1 - 1{,}26 \cdot 10^{-7}$, асимптотика λ_n имеет вид $\lambda_n = 1 - 8 \exp(-{}^1/_2\gamma^{-1}\pi n)$), то по принципу Сен-Венана влияние напряжений $\sigma_y(x, 0)$ при $x \in L_1$ на значения $\sigma_y(x, 0)$ при $x \in L_2$ мало и достаточность условий (3.17), по-видимому, имеет место.

Ограничения (3.17) однозначно определяют допустимые участки сцепления $[-b, b]$, но все основание штампа $[a_1^*, b_2^*]$ может быть шире участка контакта $[-a, a]$ за счет промежутков S'.

Действительно, пусть параметры θ и λ удовлетворяют условию (3.17). Если $\delta_0 = \delta_1$ или при $\delta_0 = \delta_2$ неравенство (3.17) является строгим, то $K_{\mathrm{I}}(\pm a) < 0$ и согласно (3.15) промежутки $[a_1^*, b_2^*]$ и $[-a, a]$ должны совпадать, в противном случае $v(x) > v(a)$ при $x \in S'$ вблизи $\pm a$. Если же $\delta_0 = \delta_2$ и выполнено равенство (3.17), то коэффициент интенсивности K_{I} в точках a, $-a$ или, в случае нормальной силы, в обеих этих точках обратится в нуль, прилегание штампа к полуплоскости будет в них плавным, при условии $v(x) \leqslant v(a)$, $x \in S'$, основание штампа может перекрывать промежуток $[-a, a]$.

Следуя [2], можно выписать уравнения для точных значений предельно больших параметров a_1^* и b_2^*, но они будут мало отличаться от соответствующих параметров для штампа [2] с одним участком сцепления $x \in [0, 2b]$ и одним участком скольжения $x \in [2b, a + b]$. Это также следует из принципа Сен-Венана и оценки $1 - \lambda_n < 10^{-3}$ для всех $n \geqslant 1$. В частности, для нормальной отрывающей силы $\theta = {}^1/_2\pi$, при $\delta_2 = 0$ и $n = 1$ аналогично [2] $a_1^* = -\infty$, $b_2^* = \infty$. Это означает, что если участки L, увеличиваясь, достигли некоторой пороговой величины ($ba^{-1} = \lambda_1$), то обе трещины отслаивания становятся глобально неустойчивыми. В связи с монотонным возрастанием коэффициента K_{II} как функции $a - b$ при $ba^{-1} = \lambda_1$ начавшийся процесс их продвижения при постоянной силе Y_1' приводит к полному отрыву штампа.

В своем развитии на пути к глобальной неустойчивости ($ba^{-1} > \lambda_1$) трещина может пройти теоретически сколь угодно много состояний торможения. Действительно, если $\delta_0 = \delta_2$ или при $\delta_0 = \delta_1$ имеет место строгое неравенство (3.17), то при достаточно большой величине F развиваются обе трещины отслаивания, $K_{\mathrm{I}}(\pm b) < 0$. Если же при $\delta_0 = \delta_1$ выполняется равенство (3.17), то коэффициенты интенсивности K_{II} и K_{I} обращаются в нуль в точках b или $-b$, а при $X_1' = 0$ — в той и другой одновременно.

Последний случай нормальной силы особенно интересен, так как здесь обе трещины, продвинувшись до точек, определяемых счетным множеством параметров $\lambda = \lambda_{4s+2}$ при $\theta = {}^1/_2\pi$ и $\lambda = \lambda_{4s+4}$ при $\theta = {}^3/_2\pi$, $s = 0, 1, \ldots$, становятся абсолютно устойчивыми.

Фактически эта задача рассматривалась в [3], но ее механическая постановка, методика решения и анализ были иными. Предполагалось, что штамп $[-a, a]$ вдавливается в полуплоскость нормальной силой при условиях допредельного трения на $[-b, b]$ и скольжения вне этого промежутка. Сделанная в [3] замена условий допредельного трения условиями полного сцепления в принципе законна, но требует после решения задачи проверки выполнения неравенства $|\tau_{xy}| \leqslant -\rho\sigma_y$, $x \in [-b, b]$, $y = 0$, где $\rho > 0$ — коэффициент трения.

Хотя любая задача о допредельном трении имеет бесчисленное множество решений, в данном случае ни одно из них не реализуется. На это имеются косвенные указания и в самой работе [3] (перемена знака σ_y $(x, 0)$ при $x \in [-b, b]$), и в книге [6]. В задаче (1.1) при изучении отслаивания на M естественно допустимы растягивающие напряжения и из (3.12) следует, что они всегда возникают на $[-b, b]$.

Метод решения [3] не распространяется на общий случай задачи (3.1). Ссылки на другие работы, в которых применялся этот метод, можно найти в [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О некоторых краевых задачах и их приложениях в теории упругости // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. 1984. Т. 172. С. 7—13.
2. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 663—673.
3. *Балькович С. В.* О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 425—432.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 511 с.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980. 303 с.
7. *Моссаковский В. И., Новопашин А. А.* Смешанная задача плоской теории упругости и проблема построения уравнения класса Фукса с заданной группой 1 // Гидроаэродинамика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во ДГУ. 1977. Вып. 22. С. 47—55.

Ленинград

Поступила в редакцию
9.XII.1986