

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ С КРЕСТООБРАЗНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Онищук О. В.

Излагается схема метода решения некоторого интегрального уравнения, состоящая в построении системы решений характеристического уравнения с полной системой специальных правых частей (например, многочленов) и записи приближенного решения исходного уравнения в виде линейной комбинации построенных функций. Схема реализуется в случае, когда характеристическое уравнение сводится к свертке Меллина и решается точно методом факторизации с использованием преобразования Меллина. Такой подход позволяет, в частности, эффективно решать интегральные уравнения с неподвижной особенностью в ядре. В качестве примера решается система двух интегральных уравнений, полученная в задаче об изгибе прямоугольной пластинки с крестообразным включением. В случае ветвей включения одинаковой длины характеристическая система решается обычным методом факторизации, в случае ветвей включения разной длины метод факторизации существенно модифицируется.

1. Общая схема метода базисных правых частей. Рассматривается интегральное уравнение вида

$$(1.1) \quad \int_0^1 (L(t, \tau) + K(t, \tau)) \varphi(\tau) d\tau - f(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

где $L(t, \tau)$ — характеристическая часть ядра, включающая в себя все имеющиеся в ядре особенности, $K(t, \tau)$ — регулярная часть ядра. Считается, что для характеристического уравнения

$$(1.2) \quad \int_0^1 L(t, \tau) \varphi_0(\tau) d\tau = g(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

можно построить точное решение. При этом свойства функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi_0(\tau)$ (расположение и характер особенностей) совпадают.

Предполагая, что функции $K(t, \tau)$ и $f(t)$ в (1.1) достаточно гладкие и хорошо аппроксимируются многочленами, и следуя [1] (с. 9), рассмотрим систему функций $\theta_m^\pm(\tau)$, являющихся решениями уравнений

$$(1.3) \quad \int_0^1 \begin{Bmatrix} L(t, \tau) \\ L(\tau, t) \end{Bmatrix} \theta_m^\pm(\tau) d\tau = t^m \quad (0 \leq t \leq 1, m = 0, 1, 2, \dots)$$

(для некоторых ядер $L(t, \tau)$ диапазон изменения m может сужаться, см. п. 3). Построим функции ([2], с. 40)

$$(1.4) \quad \|\pi_n^\pm(\tau), p_n^\mp(t)\| = \sum_{l=0}^n a_{nl}^\pm \|\theta_l^\pm(\tau), t^l\|$$

для которых

$$(1.5) \quad \int_0^1 \begin{Bmatrix} L(t, \tau) \\ L(\tau, t) \end{Bmatrix} \pi_n^\pm(\tau) d\tau = \sigma_n^\pm p_n^\mp(t) \quad (0 \leq t \leq 1, n = 0, 1, 2, \dots)$$

и выполняются условия биортогональности

$$(1.6) \quad \int_0^1 p_n^\pm(t) \pi_m^\pm(t) dt = N_n^\pm \delta_{mn}$$

Формулы (1.5), (1.6) позволяют записать точное решение уравнения (1.2) в следующем виде (аналогично [1], с. 7).

$$(1.7) \quad \varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N_n^- \sigma_n^+} \left(\int_0^1 g(t) \pi_n^-(t) dt \right) \pi_n^+(\tau)$$

а также применить для приближенного решения уравнения (1.1) метод, аналогичный методу ортогональных многочленов [1, 2]:

а) записать искомую функцию в виде

$$(1.8) \quad \varphi(\tau) = \sum_{n=0}^N \Phi_n \pi_n^+(\tau)$$

б) определить Φ_n из условия ортогональности левой части (1.1) функциям $\pi_m^-(t)$:

$$(1.9) \quad N_m^- \sigma_m^+ \Phi_m + \sum_{n=0}^N d_{mn} \Phi_n = F_m \quad (m=0, 1, \dots, N)$$

$$d_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 K(t, \tau) \pi_n^+(\tau) \pi_m^-(t) d\tau dt, \quad F_m = \int_0^1 f(t) \pi_m^-(t) dt$$

Функцию (1.8) можно записать также в виде

$$(1.10) \quad \varphi(\tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n \theta_n^+(\tau)$$

определяя φ_n из условия ортогональности левой части (1.1) функциям $\theta_m^-(t)$:

$$(1.11) \quad \sum_{n=0}^N (a_{mn} + b_{mn}) \varphi_n = f_m \quad (m=0, 1, \dots, N)$$

$$a_{mn} = \int_0^1 t^n \theta_m^-(t) dt, \quad f_m = \int_0^1 f(t) \theta_m^-(t) dt$$

$$b_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 K(t, \tau) \theta_n^+(\tau) \theta_m^-(t) d\tau dt$$

Использование (1.10), (1.11) вместо (1.8), (1.9) позволяет обойтись без трудоемкого в общем случае построения биортогональных систем (1.4).

Описанная схема переносится на системы интегральных уравнений следующим образом.

Если характеристическая часть матрицы-ядра диагональна:

$$(1.12) \quad \int_0^1 \left(L_\alpha(t, \tau) \varphi_\alpha(\tau) + \sum_{\beta=1}^M K_{\alpha\beta}(t, \tau) \varphi_\beta(\tau) \right) d\tau - f_\alpha(t) = 0$$

$$(0 \leq t \leq 1, \alpha = 1, 2, \dots, M)$$

то вместо (1.3), (1.10), (1.11) имеем

$$(1.13) \quad \int_0^1 \begin{Bmatrix} L_\alpha(t, \tau) \\ L_\alpha(\tau, t) \end{Bmatrix} \theta_{\alpha m}^\pm(\tau) d\tau = t^m, \quad \varphi_\alpha(\tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_{\alpha n} \theta_{\alpha n}^+(\tau)$$

$$\sum_{\beta=1}^M \sum_{n=0}^N (a_{\alpha\beta mn} + b_{\alpha\beta mn}) \varphi_{\beta n} = f_{\alpha m}$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, M; m = 0, 1, \dots, N)$$

$$a_{\alpha\beta mn} = \delta_{\alpha\beta} \int_0^1 t^n \theta_{\alpha m}^-(t) dt, \quad f_{\alpha m} = \int_0^1 f_{\alpha}(t) \theta_{\alpha m}^-(t) dt$$

$$b_{\alpha\beta mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_{\alpha\beta}(t, \tau) \theta_{\beta n}^+(\tau) \theta_{\alpha m}^-(t) d\tau dt$$

Для системы общего вида

$$(1.14) \quad \sum_{j=1}^M \int_0^{\lambda_j} (L_{ij}(t, \tau) + K_{ij}(t, \tau)) \varphi_j(\tau) d\tau - f_i(t) = 0$$

$$(0 \leq t \leq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, M)$$

получаем следующую схему:

$$(1.15) \quad \sum_{j=1}^M \int_0^{\lambda_j} \begin{Bmatrix} L_{ij}(t, \tau) \\ L_{ji}(\tau, t) \end{Bmatrix} \theta_{j\beta n}^{\pm}(\tau) d\tau = p_{i\beta} \mp t^n$$

$$(0 \leq t \leq \lambda_i; i = \overline{1, M}; \beta = \overline{1, M}; n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\varphi_j(\tau) = \sum_{\beta=1}^M \sum_{n=0}^N \varphi_{\beta n} \theta_{j\beta n}^+(\tau)$$

$$(1.16) \quad \sum_{\beta=1}^M \sum_{n=0}^N (a_{\alpha\beta mn} + b_{\alpha\beta mn}) \varphi_{\beta n} = f_{\alpha m}$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, M; m = 0, 1, \dots, N)$$

$$a_{\alpha\beta mn} = \sum_{i=1}^M \int_0^{\lambda_i} p_{i\beta n}(t) \theta_{i\alpha m}^-(t) dt, \quad f_{\alpha m} = \sum_{i=1}^M \int_0^{\lambda_i} f_i(t) \theta_{i\alpha m}^-(t) dt$$

$$b_{\alpha\beta mn} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_0^{\lambda_i} \int_0^{\lambda_j} K_{ij}(t, \tau) \theta_{j\beta n}^+(\tau) \theta_{i\alpha m}^-(t) d\tau dt$$

Система уравнений (1.16) относительно $\varphi_{\beta n}$ получается из условия ортогональности вектора невязок $\|d_1(t), d_2(t), \dots, d_M(t)\|$ в левой части (1.14) векторам $\|\theta_{1\alpha m}^-(t), \theta_{2\alpha m}^-(t), \dots, \theta_{M\alpha m}^-(t)\|$:

$$\sum_{i=1}^M \int_0^{\lambda_i} d_i(t) \theta_{i\alpha m}^-(t) dt = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, M; m = 0, 1, \dots, N)$$

Реализуемость описанной схемы полностью определяется возможностью построения функций $\theta_m^{\pm}(\tau)$ в (1.3) в виде, позволяющем вычислить a_{mn}, b_{mn}, f_m в (1.11). Особенно легко это сделать в случае, если интегральные операторы в (1.3) — свертки Меллина:

$$(1.17) \quad \int_0^1 g_{\pm}\left(\frac{t}{\tau}\right) \theta_m^{\pm}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = t^m \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(либо сводятся к такому виду при помощи, например, дифференцирования). Уравнения (1.17) можно решить методом факторизации (см. ниже), в результате чего находятся трансформанты Меллина

$$(1.18) \quad \Psi_m^{\pm}(p) = \int_0^1 \theta_m^{\pm}(\tau) \tau^{p-1} d\tau$$

а по формуле обращения — и сами функции $\theta_m^{\pm}(\tau)$.

В силу (1.11), (1.18) $a_{mn} = \Psi_m^-(n+1)$. Если при этом функции $K(t, \tau)$ и $f(t)$ разлагаются в степенные ряды

$$(1.19) \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \quad K(t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{kl} t^k \tau^l$$

(в общем случае — в ряды по многочленам), то получаем следующие простые выражения:

$$(1.20) \quad f_m = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Psi_m^-(k+1), \quad b_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{kl} \Psi_n^+(l+1) \Psi_m^-(k+1)$$

Описанная методика может эффективно применяться к уравнениям с неподвижной особенностью в ядре (при $t = \tau = 0$), получающимся, в частности, в двумерных задачах теории упругости с пересекающимися (ветвящимися) линейными дефектами и линейными дефектами, выходящими на границу области [2—10].

Исследование таких уравнений проведено в [11]. Основная трудность при решении уравнения (1.1) в этом случае связана с усложнением поведения функции $\varphi(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$, которое будет, как правило, типа $\tau^{-\gamma}$, где γ — корень некоторого трансцендентного уравнения $G(\gamma) = 0$. Поэтому в работах [2—5] искомая функция записывается в виде $\varphi(\tau) = \tau^\alpha (1-\tau)^\beta \varphi_0(\tau)$, где $\alpha = -\gamma_0$, γ_0 — корень уравнения $G(\gamma) = 0$ из некоторой полосы, определяемой из механического смысла задачи. Функция $\varphi_0(\tau)$ аппроксимируется многочленами либо сплайнами.

Эта методика довольно громоздка даже в случае вещественного γ_0 из-за сложности вычисления интеграла

$$(1.21) \quad \int_0^1 (L(t, \tau) + K(t, \tau)) \tau^\alpha (1-\tau)^\beta \varphi_0(\tau) d\tau$$

В случае же наличия у уравнения $G(\gamma) = 0$ двух комплексно-сопряженных корней трудности значительно возрастают. Кроме того, на гладкость функции $\varphi_0(\tau)$ и эффективность ее аппроксимации многочленами оказывают влияние корни γ_k уравнения $G(\gamma) = 0$ с $\operatorname{Re} \gamma_k < \operatorname{Re} \gamma_0$. С целью упрощения алгоритма в работах [6—10] берется $\alpha = \alpha_0$ — ближайшее целое либо полуцелое число справа от γ_0 , что позволяет применять для вычисления (1.21) простые квадратурные формулы. По сути то же упрощение делается и в [12, 13], где при использовании конформных отображений приближенный вид отображающей функции приводит к сглаживанию угловых точек на границе области.

Предлагаемый метод, будучи алгоритмически достаточно простым (см. (1.11), (1.20)), в то же время наиболее точно учитывает поведение искомой функции при $\tau \rightarrow 0$, так как в формуле (1.18) при $\operatorname{Re} p \leq \operatorname{Re} \gamma_0$ имеем $\Psi_m^+(p) = R_m(p)[G(p)]^{-1}$ и по формуле обращения

$$(1.22) \quad \theta_m^+(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{R_m(p)}{G(p)} \tau^{-p} dp = \sum_k \operatorname{Res}_{\operatorname{Re} \gamma_k \leq \operatorname{Re} \gamma_0} \left[\frac{R_m(p)}{G(p)} \right] \tau^{-\gamma_k}$$

т. е. учитываются все корни уравнения $G(\gamma) = 0$ с $\operatorname{Re} \gamma \leq \operatorname{Re} \gamma_0$. Оба эти факта, а также полученное ниже новое решение задачи об изгибе прямоугольной пластинки с крестообразным включением указывают на эффективность метода.

Отметим, что при решении указанной задачи пришлось преодолеть трудности, связанные с наличием неинтегрируемых особенностей контактных усилий при $\tau \rightarrow 1$ (аналогичные особенности в задачах об изгибе пластинок с линейными (в виде отрезка прямой) включениями получены в [2, 14—17]).

2. Задача об изгибе прямоугольной пластинки с крестообразным включением. Рассмотрим прямоугольную ($|x| \leq a_1 = a/2$, $|y| \leq b_1 = b/2$) шарнирно опертую пластинку, внутри которой на отрезках $y = 0$, $|x| \leq c_1 = c/2$ и $x = 0$, $|y| \leq d_1 = d/2$ имеется тонкое абсолютно жесткое включение, проседающее под действием приложенной к нему силы P на величину W_0 .

Задача формулируется следующим образом. Требуется найти прогиб пластинки, удовлетворяющей уравнению и граничным условиям

$$(2.1) \quad D\Delta^2 w = q(x, y) \quad (|x| \leq a_1, |y| \leq b_1)$$

$$(2.2) \quad w = M_x = 0 \quad (|x| = a_1, |y| \leq b_1) \\ w = M_y = 0 \quad (|y| = b_1, |x| \leq a_1)$$

а также условиям на включении

$$(2.3) \quad w = W_0 \quad (y = 0, |x| \leq c_1 \text{ и } x = 0, |y| \leq d_1)$$

$$(2.4) \quad w_y' = 0 \quad (y = 0, |x| \leq c_1), \quad w_x' = 0 \quad (x = 0, |y| \leq d_1)$$

Очевидно, функция $w(x, y)$ четна по x и y .

Сведем задачу (2.1)–(2.4) к системе интегральных уравнений. Для этого, как и в [2, 15–17], будем исходить из того, что наличие включения вызывает скачок поперечных сил

$$(2.5) \quad \psi_1(\xi) = V_y(\xi, -0) - V_y(\xi, +0), \quad \psi_2(\eta) = V_x(-0, \eta) - V_x(+0, \eta)$$

Функции ψ_1 , ψ_2 — четные, $\psi_1(\xi) \equiv 0$ при $c_1 < |\xi| < a_1$, $\psi_2(\eta) \equiv 0$ при $d_1 < |\eta| < b_1$. Предполагая, что нагрузка приложена только к включению, запишем правую часть уравнения (2.1) в виде

$$q(x, y) = \psi_1(x) \delta(y) + \psi_2(y) \delta(x) = \\ = \frac{4}{ab} \sum_k' \sum_l' \cos \alpha x \cos \beta y \left(\int_{-c_1}^{c_1} \psi_1(\xi) \cos \alpha \xi d\xi + \int_{-d_1}^{d_1} \psi_2(\eta) \cos \beta \eta d\eta \right) \\ \alpha = \alpha_k = \pi a^{-1} k, \quad \beta = \beta_l = \pi b^{-1} l$$

что приводит к следующему выражению для функции, удовлетворяющей (2.1), (2.2), через неизвестные функции $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\eta)$:

$$w(x, y) = \frac{4}{Dab} \sum_k' \sum_l' \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left(\int_{-c_1}^{c_1} \psi_1(\xi) \cos \alpha \xi d\xi + \int_{-d_1}^{d_1} \psi_2(\eta) \cos \beta \eta d\eta \right)$$

Здесь и далее штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по всем положительным нечетным значениям указанной переменной.

Условия (2.4) удовлетворяются за счет нечетности w_x' по x и w_y' по y и равномерной сходимости рядов для w_x' и w_y' , а условия (2.3) приводят к системе двух интегральных уравнений относительно $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\eta)$ ($\sigma = ba^{-1}$):

$$(2.6) \quad \int_{-c_1}^{c_1} \sum_k' \cos \alpha x \cos \alpha \xi \left(\sum_l' \frac{\sigma^3}{(l^2 + \sigma^2 k^2)^2} \right) \psi_1(\xi) d\xi + \\ + \int_{-d_1}^{d_1} \sum_k' \cos \alpha x \left(\sum_l' \frac{\sigma^3 \cos \beta \eta}{(l^2 + \sigma^2 k^2)^2} \right) \psi_2(\eta) d\eta = \frac{DW_0}{4a^2} \pi^4 \quad (|x| \leq c_1)$$

$$\int_{-c_1}^{c_1} \sum_l' \cos \beta y \left(\sum_k' \frac{\sigma^{-1} \cos \alpha \xi}{(k^2 + \sigma^{-2} l^2)^2} \right) \psi_1(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{-d_1}^{d_1} \sum_l' \cos \beta y \cos \beta \eta \left(\sum_k' \frac{\sigma^{-1}}{(k^2 + \sigma^{-2} l^2)^2} \right) \psi_2(\eta) d\eta = \frac{DW_0}{4a^2} \pi^4$$

($|y| \leq d_1$)

В системе (2.6) сделаем следующие три преобразования:

а) выполним замену переменных и функций: $x = c_1 t$, $y = c_1 \tau$, $\xi = c_1 \tau$, $\eta = c_1 \tau$, $\varphi_1(\tau) = \pi c_1 \psi_1(\xi)$, $\varphi_2(\tau) = \pi c_1 \psi_2(\eta)$, введем обозначения: $\varepsilon = ca^{-1}$, $\lambda = dc^{-1}$, $\gamma = \gamma_k = \pi \varepsilon k/2$ и учтем четность $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$;

б) просуммируем внутренние ряды по формуле

$$\sum_j' \frac{\cos(js)}{(j^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{8a^3} ((1 + sa) e^{-sa} + \mu(a) \operatorname{ch}(sa) - \nu(a) sa \operatorname{sh}(sa))$$

$$\mu(a) = \operatorname{th} \rho - 1 - \rho \operatorname{sech}^2 \rho, \quad \nu(a) = \operatorname{th} \rho - 1, \quad \rho = \pi a/2$$

вытекающей из формул 5.4.5.11–12 [18];

в) медленно сходящиеся части внешних рядов преобразуем с использованием формул

$$(2.7) \quad \sum_k' \frac{\cos \gamma t \cos \gamma \tau}{k^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right)^2 \left[(t - \tau)^2 \ln |t - \tau| + (t + \tau)^2 \ln |t + \tau| + \right.$$

$$\left. + \left(2 \ln \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right) - 3 \right) (t^2 + \tau^2) \right] +$$

$$+ A_3 - \pi^2 \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2l} (2l - 3)! T_{2l-2} \sum_{k=0}^l \frac{t^{2l-2k}}{(2l-2k)!} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sum_k' (1 + \gamma \tau) \frac{\cos \gamma t}{k^3} e^{-\gamma \tau} = \left(1 - \tau \frac{d}{d\tau} \right) \sum_k' \frac{\cos \gamma t}{k^3} e^{-\gamma \tau} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right)^2 \left[(t^2 + \tau^2) \ln (t^2 + \tau^2) + \left(2 \ln \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right) - 3 \right) (t^2 + \tau^2) + 2\tau^2 \right] +$$

$$+ A_3 - \pi^2 \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2l} (2l - 3)! T_{2l-2} \sum_{k=0}^l \frac{t^{2l-2k}}{(2l-2k)!} \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} (-1)^k (1 - 2k)$$

причем [18]

$$A_3 = \sum_k' k^{-3} \approx 1,0518, \quad T_s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-s}$$

Формулы (2.7) выводятся аналогично (1.5) [17].

В результате преобразований система (2.6) записывается в виде, обеспечивающем выполнение условий (1.19)

$$(2.8) \quad \sum_{j=1}^2 \int_0^{\lambda_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right)^2 L_{ij}(t, \tau) + K_{ij}(t, \tau) \right] \varphi_j(\tau) d\tau = \frac{DW_0}{a^2} \pi^4$$

($0 \leq t \leq \lambda_i$)

$$i = 1, 2; \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda; \quad L_{12}(t, \tau) = L_{21}(t, \tau) = (t^2 + \tau^2) \ln (t^2 + \tau^2)$$

$$L_{11}(t, \tau) = L_{22}(t, \tau) = (t - \tau)^2 \ln |t - \tau| + (t + \tau)^2 \ln (t + \tau)$$

$$(2.9) \quad K_{ij}(t, \tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right)^2 \left[\left(2 \ln \frac{\pi \varepsilon}{4 \sigma_i} - 3 \right) (t^2 + \tau^2) + 2(1 - \delta_{ij}) \tau^2 \right] +$$

$$+ \sigma_i^2 A_3 - \sigma_i^2 \pi^2 \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2 \sigma_i} \right)^{2l} (2l - 3)! T_{2l-2} \sum_{k=0}^l \frac{t^{2l-2k}}{(2l-2k)!} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} [\delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})(-1)^k(1 - 2k)] + \\ & + \sigma_i^2 \sum_k \frac{1}{k^3} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{\gamma}{\sigma_i} \right)^{2l} \frac{t^{2l}}{(2l)!} \right) \times \\ & \times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(\mu \left(\frac{\sigma}{\sigma_i^2} k \right) (1 - 2\delta_{ij})^l - \nu \left(\frac{\sigma}{\sigma_i^2} k \right) (1 - \delta_{ij}) 2l \right) \left(\frac{\gamma}{\sigma_i} \right)^{2l} \frac{\tau^{2l}}{(2l)!} \right], \\ & \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma \end{aligned}$$

в последней сумме по k использованы разложения функций \cos , ch , sh в степенные ряды.

Решение системы (2.8) проводится по-разному при одинаковой ($\lambda = 1$) и разной ($\lambda \neq 1$) длине ветвей включения.

3. Ветви включения одинаковой длины ($\lambda = 1$). Для сведения системы (2.8) к виду (1.12) сделаем замену функций $\varphi_{1,2} = \varphi_1^\circ \pm \varphi_2^\circ$ и образуем новую систему уравнений, взяв сумму и разность уравнений (2.8). В результате получаем

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & \left(\frac{\pi \varepsilon}{4} \right)^2 \int_0^1 L_\alpha(t, \tau) \varphi_\alpha^\circ(\tau) d\tau + \sum_{\beta=1}^2 \int_0^1 M_{\alpha\beta}(t, \tau) \varphi_\beta^\circ(\tau) d\tau = \\ & = 2\pi^4 \frac{DW_0}{a^2} \delta_{1\alpha} \\ & (0 \leq t \leq 1), \quad \alpha = 1, 2; \quad L_\alpha = L_{11} - (-1)^\alpha L_{12} \\ & M_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{(i+1)(\alpha+1)+(j+1)(\beta+1)} K_{ij} \end{aligned}$$

Ядра $L_\alpha(t, \tau)$ имеют подвижные (при $t = \tau$) и неподвижные (при $t = \tau = 0$) особенности и являются симметричными. Учитывая их четность по t , а также то, что $L_2(0, \tau) = 0$, вместо (1.13) рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \frac{1}{2\pi} \int_0^1 L_\alpha(t, \tau) \theta_{\alpha n}(\tau) d\tau = \frac{t^{2(n+\alpha)-2}}{(2(n+\alpha)-2)!} \equiv p_{\alpha n}(t) \\ & (0 \leq t \leq 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned}$$

Для сведения их к виду (1.17) продифференцируем трижды по t :

$$\begin{aligned} (3.3) \quad & \int_0^1 N_\alpha\left(\frac{t}{\tau}\right) \theta_{\alpha n}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{t^{2(n+\alpha)-5}}{(2(n+\alpha)-5)!} \equiv f_{\alpha n}(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \\ & N_\alpha(y) = N_{11}(y) - (-1)^\alpha N_{12}(y) \\ & N_{11}(y) = N_{22}(y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} \right), \\ & N_{12}(y) = N_{21}(y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{6y}{y^2+1} - \frac{4y^3}{(y^2+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Вообще говоря, не каждое решение $\theta_{\alpha n}(\tau)$ уравнения (3.3) будет решением (3.2), так как может дать при подстановке в левую часть (3.2) функцию, отличающуюся от $p_{\alpha n}(t)$ на четный многочлен второй степени $d(t)$ ($d(t) = d_0 + d_1 t^2$ при $\alpha = 1$, $d(t) = d_2 t^2$ при $\alpha = 2$). Многочлен $d(t)$ обратится в нуль, если на $\theta_{\alpha n}(\tau)$ наложить условия

$$\begin{aligned} (3.4) \quad & \int_0^1 L_1(0, \tau) \theta_{1n}(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \tau^2 \ln \tau \theta_{1n}(\tau) d\tau = p_{1n}(0) \\ & \int_0^1 \frac{\partial^2 L_\alpha}{\partial t^2}(0, \tau) \theta_{\alpha n}(\tau) d\tau = \frac{2(3-\alpha)}{\pi} \int_0^1 [1 + (2-\alpha) \ln \tau] \theta_{\alpha n}(\tau) d\tau = \\ & = p_{\alpha n}''(0) \end{aligned}$$

Для их удовлетворения будем разыскивать решение (3.3), содержащее $3 - \alpha$ произвольных постоянных. Уравнение (3.3) будем решать методом факторизации [1] с использованием преобразования Меллина, для чего запишем (3.3) в виде ($\psi_{\alpha n}(t)$ — неизвестная функция)

$$(3.5) \quad \int_0^{\infty} N\left(\frac{t}{\tau}\right) \theta_-(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f_-(t) + f_+(t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

$$\|\theta_-(t), f_-(t), f_+(t)\| = \begin{cases} \|\theta_{\alpha n}(t), f_{\alpha n}(t), 0\| & (0 \leq t \leq 1) \\ \|\theta_-(t), f_-(t), \psi_{\alpha n}(t)\| & (1 < t < \infty) \end{cases}$$

Применяя к (3.5) преобразование Меллина и учитывая формулы [18], получаем

$$(3.6) \quad G_{\alpha}(p) \Phi_{\alpha n}^{-}(p) = F^{-}(p) + F^{+}(p), \\ F^{-}(p) = [(p + 2(n + \alpha) - 5)(2(n + \alpha) - 5)!]^{-1}$$

$$(3.7) \quad \|G_{\alpha}(p), \Phi_{\alpha n}^{-}(p), F^{-}(p), F^{+}(p)\| = \\ = \int_0^{\infty} \|N_{\alpha}(t), \theta_-(t), f_-(t), f_+(t)\| t^{p-1} dt$$

$$(3.8) \quad G_{\alpha}(p) = T(p)K_{\alpha}(p) \\ T(p) = \operatorname{tg}^{1/2}\pi p, \quad K_{\alpha}(p) = 1 - (-1)^{\alpha} (2 - p)/\sin^{1/2}\pi p$$

Функции $\Phi_{\alpha n}^{-}(p)$, $F^{-}(p)$ регулярны в $D^{-} = \{p: \max(-1, \operatorname{Re} \gamma) < \operatorname{Re} p\}$, γ определяется асимптотикой $\theta_{\alpha n}(\tau) = O(\tau^{-\gamma})$ при $\tau \rightarrow 0$. Функция $F^{+}(p)$ регулярна в $D^{+} = \{p: \operatorname{Re} p < 1\}$. Равенство (3.6) выполняется в полосе $\Omega = \{p: \max(-1, \operatorname{Re} \gamma) < \operatorname{Re} p < 1\}$. Используя стандартные рассуждения [1], решение задачи (3.6), содержащее $3 - \alpha$ произвольных постоянных, получаем в виде

$$(3.9) \quad \Phi_{\alpha n}^{-}(p) = \{A_{\alpha}(p) + F^{-}(p)[G_{\alpha}^{+}(5 - 2(n + \alpha))]^{-1}\} [G_{\alpha}^{-}(p)]^{-1} \\ A_1(p) = a_0 + a_1 p, \quad A_2(p) = a_2 \\ G_{\alpha}^{\pm}(p) = T^{\pm}(p)K_{\alpha}^{\pm}(p); \quad T^{-}(p) = \frac{T(p)}{T^{+}(p)}, \\ T^{+}(p) = \frac{\Gamma(1/2 - 1/2p)}{\Gamma(1 - 1/2p)}, \quad K_{\alpha}^{-}(p) = \frac{K_{\alpha}(p)}{K_{\alpha}^{+}(p)} \\ K_{\alpha}^{+}(p) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln K_{\alpha}(q)}{q - p} dq\right) \begin{cases} (p - 1)^{\alpha-1} & (\operatorname{Re} p \leq 2) \\ (p - 1)^{\alpha-1} K_{\alpha}(p) & (\operatorname{Re} p \geq 2) \end{cases}$$

где L — контур $\operatorname{Re} q = 2$. Выбор L вместо контура L_1 с $\operatorname{Re} q \in (0, 1)$ вызван тем, что на L $\operatorname{Ind} K_{\alpha} = 0$, а на L_1 $\operatorname{Ind} K_2 = -1$. Наличие нуля у $K_2(p)$ при $p = 1$ учтено множителем $(p - 1)$. При $p \rightarrow \infty$ $G_{\alpha}^{\pm}(p) = O(p^{\pm(\alpha-3/2)})$, $\Phi_{\alpha n}^{-}(p) = O(p^{1/2})$. Рост $\Phi_{\alpha n}^{-}(p)$ при $p \rightarrow \infty$ допускается при использовании преобразования Меллина обобщенных функций [19] и указывает на наличие неинтегрируемых особенностей у функций $\theta_{\alpha n}(\tau)$ при $\tau \rightarrow 1 - 0$: $\theta_{\alpha n}(\tau) = O((1 - \tau)^{-3/2})$ (аналогично [2, 14—17]). Поведение $\theta_{\alpha n}(\tau)$ при $\tau \rightarrow +0$ определяется нулями функции $G_{\alpha}(p)$ (см. (1.22)) и совпадает с поведением поперечных сил в вершине заземленной четвертьплоскости [20].

Для нахождения a_0, a_1, a_2 воспользуемся тем, что на основании (3.7) условия (3.4) переносятся на функции $\Phi_{\alpha n}^{-}(p)$ в следующем виде:

$$(3.10) \quad 2\pi^{-1} (\Phi_{1n}^{-}(p))'_{p=3} = p_{1n}(0) \\ 2(3 - \alpha)\pi^{-1} (\Phi_{\alpha n}^{-}(p) + (2 - \alpha)(\Phi_{\alpha n}^{-}(p))')_{p=1} = p''_{\alpha n}(0) \\ (\alpha = 1, 2)$$

Подставляя (3.9) в (3.10) и учитывая известные соотношения ([21], формула 1.7(1) и [18], с. 774), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно a_0, a_1, a_2 , которая завершает построение функций $\theta_{\alpha n}(\tau)$:

$$(3.11) \quad \sum_{j=0}^1 d_{ij} a_j = p_{1n}^{(2i)}(0) (4r)^{-1} - d_{i0} Q_1^-(p) - r (K_1^-(p))^{-1} Q_1^{-'}(p)$$

$$i = 0, 1; p = 3 - 2i, r = (2 - i)^{-1}, Q_{\alpha}^-(p) = F^-(p) \times \\ \times [G_{\alpha}^+(5 - 2(n + \alpha))]^{-1}$$

$$d_{i0} = \frac{r}{K_1^-(p)} \left(-\frac{K_1^{-'}(p)}{K_1^-(p)} - \ln 2 + r \right), \quad d_{i1} = p d_{i0} + \frac{r}{K_1^-(p)}$$

$$(K_2^-(1))^{-1} (a_2 + Q_2^-(1)) = p_{2n}''(0)/2$$

Используя построенные $\theta_{\alpha n}(\tau)$, приближенное решение системы (3.1) находим по формулам (1.13).

Следует отметить, что построение функций $\theta_{\alpha n}(\tau)$ можно рассматривать как решение задачи об изгибе бесконечной пластинки с крестообразным включением ($p_{\alpha n}(t)$ задают прогибы на включении). Решение этой задачи содержится в более общих результатах работы [22], однако там оно получено в форме, менее удобной для реализации изложенной в п. 1 схемы.

По результатам счета построена зависимость между проседанием включения W_0 и величиной, приложенной к включению силы

$$(3.12) \quad P = \int_{-c_1}^{c_1} \psi_1(\xi) d\xi + \int_{-d_1}^{d_1} \psi_2(\eta) d\eta =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \varphi_1^{\circ}(\tau) d\tau =$$

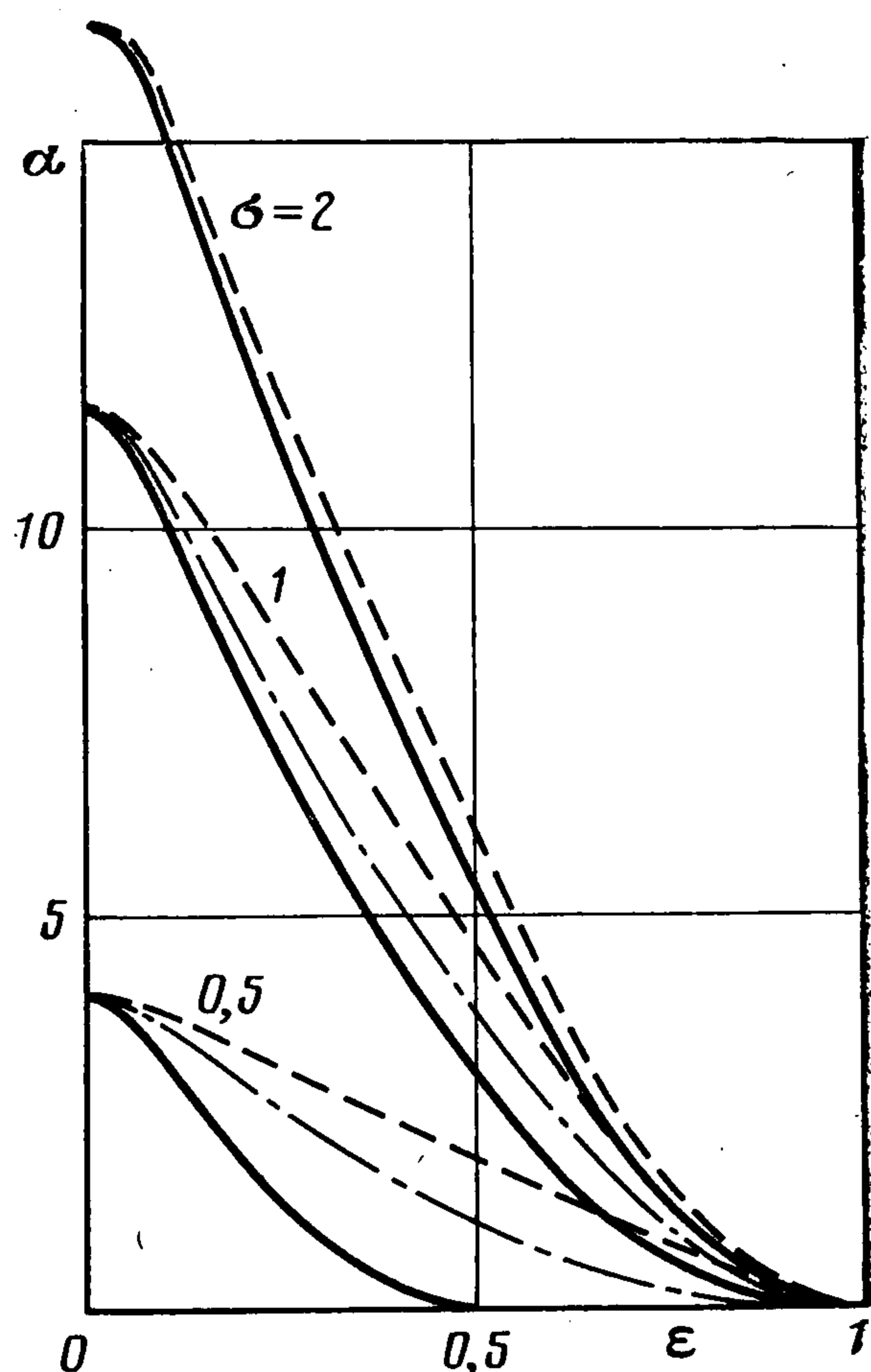
$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \varphi_{1n} \Phi_{1n}^-(1)$$

Значения P при $N = 2$ и $N = 3$ практически совпали, что подтверждает эффективность предложенного метода. Смещение включения представлялось в виде

$$(3.13) \quad W_0 = 10^{-3} \alpha P a^2 D^{-1}$$

где коэффициент $\alpha = \alpha(\varepsilon, \sigma, \lambda)$ характеризует жесткость системы пластинка — включение. Значения α , найденные в этом пункте (при $\lambda = 1$), приведены на фигуре сплошными линиями. Для сравнения штриховыми линиями приведены результаты для линейного включения, расположенного вдоль оси x , что соответствует $\lambda = 0$ (см. [2, 15]). Как и следовало ожидать, крестообразное включение проседает на меньшую величину. Это уменьшение особенно заметно для пластинки, вытянутой вдоль оси x ($\sigma = 0,5$), а также для квадратной пластинки ($\sigma = 1$) при больших размерах включения ($\varepsilon \geq 0,8$). В случае пластинки, вытянутой вдоль оси y ($\sigma = 2$), влияние второй ветви включения незначительно.

4. Ветви включения разной длины ($\lambda \neq 1$). Для определенности считаем $\lambda < 1$ (ось x направлена вдоль длинной ветви креста). Систему (2.8) не удастся свести к виду (1.12), поэтому будем пользоваться формулами (1.15), (1.16). Построим систему решений $\|\theta_{1\beta n}(\tau), \theta_{2\beta n}(\tau)\|$ характерис-



тической системы уравнений с многочленами в правой части:

$$(4.1) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\lambda_j} L_{ij}(t, \tau) \theta_{j\beta n}(\tau) d\tau = p_{i\beta n}(t) \quad (0 \leq t \leq \lambda_i, i=1, 2)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, $\beta = 1, 2$, значению $\beta = 1$ соответствуют правые части вида $\|A + p(t), A\|$, $\beta = 2 - \|0, p(t)\|$. При этом учитывается, что из поведения $L_{ij}(t, \tau)$ при $t \rightarrow 0$ вытекает условие $p_{1\beta n}(0) = p_{2\beta n}(0)$. Учитывая также, что из четности $L_{ij}(t, \tau)$ по t следует четность $p_{i\beta n}(t)$, в качестве $p_{i\beta n}(t)$ берем следующие многочлены:

$$(4.2) \quad p_{11n}(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad p_{21n}(t) = \delta_{0n}, \quad p_{12n}(t) = 0, \quad p_{22n}(t) = \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Дифференцируя (4.1) трижды по t , получаем (см. (3.3))

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^2 \int_0^{\lambda_j} N_{ij}\left(\frac{t}{\tau}\right) \theta_{j\beta n}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = p_{i\beta n}'''(t) \equiv f_{i\beta n}(t) \quad (0 \leq t \leq \lambda_i, i=1, 2)$$

$$f_{i\beta n}(t) = \delta_{i\beta} t^{2(n+\beta)-5} [(2(n+\beta)-5)!]^{-1}$$

Для того чтобы решение системы (4.3) было решением системы (4.1), оно должно удовлетворять условиям, аналогичным (3.4):

$$(4.4) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\lambda_j} \tau^2 \ln \tau \theta_{j\beta n}(\tau) d\tau = p_{1\beta n}(0)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\lambda_j} (2 \ln \tau + 1 + 2\delta_{ij}) \theta_{j\beta n}(\tau) d\tau = p_{i\beta n}''(0) \quad (i=1, 2)$$

Систему (4.3) перепишем в виде ($\psi_{j\beta n}(t)$ — неизвестная функция)

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} N_{ij}\left(\frac{t}{\tau}\right) \theta_{j-}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f_{i-}(t) + f_{i+}(t) \quad (0 \leq t < \infty, i=1, 2)$$

$$\| \theta_{j-}(t), f_{j-}(t), f_{j+}(t) \| = \begin{cases} \| \theta_{j\beta n}(t), f_{j\beta n}(t), 0 \| & (0 \leq t \leq \lambda_j) \\ \| 0, 0, \psi_{j\beta n}(t) \| & (\lambda_j < t < \infty) \end{cases}$$

Вводя обозначения для преобразования Меллина

$$(4.6) \quad \int_0^{\infty} \| N_{11}(t), N_{12}(t), \theta_{1-}(t), f_{1-}(t), f_{1+}(t) \| t^{p-1} dt =$$

$$= \| T(p), R(p), \Phi_1^-(p), F_1^-(p), F_1^+(p) \|, \quad R(p) = (2-p)/\cos^{1/2} \pi p$$

$$\int_0^{\infty} \| \theta_{2-}(t), f_{2-}(t), f_{2+}(t) \| t^{p-1} dt = \lambda^p \int_0^{\infty} \| \theta_{2-}(\lambda \xi), f_{2-}(\lambda \xi), f_{2+}(\lambda \xi) \| \xi^{p-1} d\xi =$$

$$= \| \lambda^p \Phi_2^-(p), \lambda^p F_2^-(p), \lambda^p F_2^+(p) \|, \quad \Phi_j^-(p) \equiv \Phi_{j\beta n}^-(p)$$

и применяя преобразование Меллина к системе (4.5), получаем матричную задачу Римана (области регулярности D^\pm и функция $T(p)$ — те же, что и в (3.6)–(3.8)):

$$(4.7) \quad A_{11}(p) \Phi_1^-(p) + A_{12}(p) \lambda^p \Phi_2^-(p) = F_1^-(p) + F_1^+(p)$$

$$(4.8) \quad A_{21}(p) \Phi_1^-(p) + A_{22}(p) \lambda^p \Phi_2^-(p) = \lambda^p F_2^-(p) + \lambda^p F_2^+(p)$$

$$(4.9) \quad A_{11}(p) = A_{22}(p) = T(p), \quad A_{12}(p) = A_{21}(p) = R(p)$$

$$F_i^-(p) = \delta_{i\beta} \lambda^{2(n+\beta)-5} [(p+2(n+\beta)-5)(2(n+\beta)-5)!]^{-1} \equiv$$

$$\equiv F_{i\beta n}^-(p)$$

Будем предполагать наличие степенных особенностей у функций $\theta_{j-}(t)$ и $f_{j+}(t)$ при $t \rightarrow \lambda_j$. Тогда по теоремам абелева типа их трансформанты Меллина $\Phi_j^-(p)(F_j^+(p))$ имеют степенное поведение при $p \rightarrow \infty$, $p \in D^-(D^+)$. Целью дальнейших построений является преобразование (4.7), (4.8) к виду

$$(4.10) \quad C_i^+(p) = C_i^-(p) \quad (i = 1, 2), \quad C_i^\pm(p) = O(p^{\kappa_i}) \quad \text{при } |p| \rightarrow \infty \\ p \in D^\pm$$

что дает возможность применить теорему Лиувилля.

Нужное преобразование проведем, заменив для общности конкретные функции (4.9) произвольными функциями $A_{ij}(p)$ и предполагая при этом, что:

1) функции $A_{12}(p)/A_{11}(p)$ ($A_{21}(p)/A_{11}(p)$) имеют соответственно в $D^-(D^+)$ в качестве особых точек только полюсы первой кратности $p_m^-(p_m^+)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ и ведут себя как $O(p^{\mu_1})$ при $|p| \rightarrow \infty$, $p \in D_1(D_2)$, $D_{1,2} = \{p \in D^\mp, \inf |p - p_m^\mp| = \varepsilon_1 > 0\}$;

2) при факторизации $A_{11}(p) = A_{11}^+(p)A_{11}^-(p)$ и $G(p) \equiv A_{22}(p) - A_{12}(p)A_{21}(p)/A_{11}(p) = G^+(p)G^-(p)$ множители $A_{11}^\pm(p)$, $G_{11}^\pm(p)$ ведут себя как $O(p^{\mu_2})$ при $|p| \rightarrow \infty$, $p \in D^\pm$;

3) $\operatorname{Re} p_m^\mp = O(m^\alpha)$, $\alpha \geq 1$, $m \rightarrow \infty$;

4) $R_m^\mp = \operatorname{Res}_{p=p_m^\mp} (A_{12,21}(p)/A_{11}(p)) = O(m^\beta)$, $m \rightarrow \infty$.

Функции $F_i^-(p)$ для общности запишем в виде $F_i^-(p) = b_i(p - a_i)^{-1}$, $a_i \in D^+$.

Поскольку при $|p| \rightarrow \infty$, $p \in D^+$ функция $\lambda^p \rightarrow \infty$ быстрее любой степени p , а в равенстве (4.8) присутствуют одновременно слагаемые $A_{21}(p)\Phi_1^-(p)$ и $\lambda^p F_2^+(p)$, то сведение отдельно (4.8) к виду (4.10) с требуемой асимптотикой невозможно. Поэтому равенство (4.8) заменим линейной комбинацией $-\lambda^{-p}A_{21}(p)/A_{11}(p)$ (4.7) + λ^{-p} (4.8):

$$(4.11) \quad G(p)\Phi_2^-(p) = -\lambda^{-p} \frac{A_{21}(p)}{A_{11}(p)} (F_1^-(p) + F_1^+(p)) + (F_2^-(p) + F_2^+(p))$$

Равенства (4.7), (4.11) перепишем в виде

$$(4.12) \quad \frac{F_1^-(p) + F_1^+(p)}{A_{11}^+(p)} = A_{11}^-(p)\Phi_1^-(p) + \lambda^p \frac{A_{12}(p)}{A_{11}(p)} A_{11}^-(p)\Phi_2^-(p) \\ \frac{F_2^-(p) + F_2^+(p)}{G^+(p)} - \lambda^{-p} \frac{A_{21}(p)}{A_{11}(p)} \frac{(F_1^-(p) + F_1^+(p))}{G^+(p)} = G^-(p)\Phi_2^-(p)$$

и введем в рассмотрение функции

$$(4.13) \quad \Psi_1^+(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{p_m^-} A_m^-}{p - p_m^-}, \quad A_m^- = R_m^- A_{11}^-(p_m^-) \Phi_2^-(p_m^-) \\ \Psi_2^-(p) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-p_m^+} A_m^+}{p - p_m^+}, \quad A_m^+ = R_m^+ \frac{F_1^-(p_m^+) + F_1^+(p_m^+)}{G^+(p_m^+)}$$

вычитание которых из соответствующих слагаемых с множителями $\lambda^{\pm p}$ в (4.12) аннулирует имеющиеся там полюсы p_m^\pm . При этом ряды $\Psi_1^+(p)$ ($\Psi_2^-(p)$) сходятся равномерно в областях D_1 (D_2) соответственно и ведут себя как $O(p^{-1})$ при $|p| \rightarrow \infty$, $p \in D_1 \cup D^+$ ($p \in D_2 \cup D^-$). Числа A_m^\pm пока неизвестны, так как выражаются через неизвестные функции $\Phi_2^-(p)$ и $F_1^+(p)$.

Учитывая наличие в (4.12) полюсов в D^+ , даваемых функциями $F_i^-(p)$, введем обозначения

$$(4.14) \quad Q_1^-(p) = \frac{F_1^-(p)}{A_{11}^+(a_1)}, \quad Q_2^-(p) = \frac{F_2^-(p)}{G^+(a_2)} - F_1^-(p) \frac{\lambda^{-a_1}}{G^+(a_1)} \frac{A_{21}(a_1)}{A_{11}(a_1)}$$

Используя функции (4.13), (4.14), перепишем (4.12) в виде, соответствующем (4.10):

$$(4.15) \quad \begin{aligned} C_1^+(p) &\equiv \frac{F_1^-(p) + F_1^+(p)}{A_{11}^+(p)} - Q_1^-(p) - \Psi_1^+(p) = \\ &= A_{11}^-(p) \Phi_1^-(p) + \lambda^p \frac{A_{12}(p)}{A_{11}(p)} A_{11}^-(p) \Phi_2^-(p) - Q_1^-(p) - \\ &- \Psi_1^+(p) \equiv C_1^-(p) \\ C_2^+(p) &\equiv \frac{F_2^-(p) + F_2^+(p)}{G^+(p)} - \lambda^{-p} \frac{A_{21}(p)}{A_{11}(p)} \frac{(F_1^-(p) + F_1^+(p))}{G^+(p)} - \\ &- Q_2^-(p) - \Psi_2^-(p) = G^-(p) \Phi_2^-(p) - Q_2^-(p) - \Psi_2^-(p) \equiv C_2^-(p) \end{aligned}$$

Функции $C_i(p)$, изображаемые в D^\pm функциями $C_i^\pm(p)$, являются целыми и при сделанных относительно $A_{ij}(p)$ предположениях $C_i(p)$ при достаточно больших p удовлетворяют неравенствам $|C_i(p)| \leq B_i |p|^{\kappa_i}$. По теореме Лиувилля $C_i(p) \equiv P_{\kappa_i}(p)$ равняется многочлену степени κ_i . Важно подчеркнуть, что поскольку $\lambda^p \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$, $p \in D^-$, то присутствующее в $C_1^-(p)$ слагаемое с множителем λ^p не мешает выполнению указанного неравенства. Более того, поскольку $C_1(p)$ — многочлен, то в асимптотике $C_1^-(p)$ отсутствуют слагаемые типа $O(\lambda^p p^\omega)$, что можно объяснить наличием у искомой функции $\Phi_1^-(p)$ асимптотики $O(p^{\nu_1}) + O(\lambda^p p^{\nu_2})$ и взаимным сокращением членов асимптотики $O(\lambda^p p^\omega)$ в первых двух слагаемых в $C_1^-(p)$. Все сказанное относится и к слагаемому с множителем λ^{-p} в $C_2^+(p)$. Подставляя $P_{\kappa_i}(p)$ в (4.15), получаем

$$(4.16) \quad \begin{aligned} F_1^+(p) &= -F_1^-(p) + A_{11}^+(p) \left(Q_1^-(p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{p_l^-} A_l^-}{p - p_l^-} + P_{\kappa_1}(p) \right) \\ \Phi_2^-(p) &= \frac{1}{G^-(p)} \left(Q_2^-(p) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-p_l^+} A_l^+}{p - p_l^+} + P_{\kappa_2}(p) \right) \end{aligned}$$

Подставляя (4.16) в выражения для A_m^\mp в (4.13), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно A_m^\mp

$$(4.17) \quad \begin{aligned} A_m^- &= R_m^- \frac{A_{11}^-(p_m^-)}{G^-(p_m^-)} \left(Q_2^-(p_m^-) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-p_l^+} A_l^+}{p_m^- - p_l^+} + P_{\kappa_2}(p_m^-) \right) \\ A_m^+ &= R_m^+ \frac{A_{11}^+(p_m^+)}{G^+(p_m^+)} \left(Q_1^-(p_m^+) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{p_l^-} A_l^-}{p_m^+ - p_l^-} + P_{\kappa_1}(p_m^+) \right) \end{aligned}$$

Если зафиксировать каким-либо образом многочлены $P_{\kappa_i}(p)$, то, решая (вообще говоря, приближенно) систему (4.17) и подставляя A_m^\pm в (4.16), находим одно из решений задачи (4.7), (4.8). При $P_{\kappa_i}(p) \equiv 0$ получаем частное решение неоднородной задачи. Если же взять $Q_i^-(p) \equiv 0$ и выбирать $P_{\kappa_1}(p) = p^k$ ($k = 0, 1, \dots, \kappa_1$), $P_{\kappa_2}(p) \equiv 0$ либо $P_{\kappa_1}(p) \equiv 0$, $P_{\kappa_2}(p) = p^k$ ($k = 0, 1, \dots, \kappa_2$), то получаем набор $\kappa_1 + \kappa_2 + 2$ решений однородной задачи. Как обычно в методе факторизации, конкретные значения κ_1 и κ_2 определяются либо заданием поведения решений $\theta_{j\beta n}(\tau)$ исходных интегральных уравнений при $\tau \rightarrow \lambda_j - 0$ (и тем самым, заданием в силу (4.6) и теорем абелева типа поведения $\Phi_j^-(p)$ при $|p| \rightarrow \infty$), либо количеством постоянных для удовлетворения каким-либо дополни-

тельными условиям. В рассматриваемом в статье случае требуются три постоянные для удовлетворения условиям (4.4). Поэтому берем $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, $P_{\kappa_1}(p) = a_0 + a_1 p$, $P_{\kappa_2}(p) = a_2$ (другие варианты выбора κ_i дающие три произвольные постоянные, приводят к расходимости интеграла энергии изогнутой пластинки, см. [17, 23]).

В случае, если $A_{ij}(p)$ и $F_i^-(p)$ даются формулами (4.9), получаем

$$\frac{A_{12}(p)}{A_{11}(p)} = \frac{A_{21}(p)}{A_{11}(p)} = \frac{2-p}{\sin^{1/2}\pi p}, \quad p_m^\mp = 2 \pm 2m$$

$$G(p) = T(p), \quad K(p)K(p) = 1 - (p-2)^2/\sin^2 1/2\pi p, \quad G^\pm(p) = T^\pm(p)K^\pm(p)$$

Выражения для $T^\pm(p)$ и $K^\pm(p)$ даются формулами (3.9) с заменой $K_2(p)$ на $K(p)$. Формулы (4.13), (4.14), (4.16), (4.17) принимают вид

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(p) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m+2} A_m^-}{p-2m-2}, \quad A_m^- = \frac{4}{\pi} (-1)^m m T^-(2+2m) \Phi_2^-(2+2m) \\ \Psi_2^-(p) &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m-2} A_m^+}{p+2m-2}, \\ A_m^+ &= - \frac{4}{\pi} (-1)^m m \frac{F_1^-(2-2m) + F_1^+(2-2m)}{G^+(2-2m)} \\ Q_1^-(p) &= \frac{F_1^-(p)}{T^+(3-2n)}, \quad Q_2^-(p) = \frac{F_2^-(p)}{G^+(1-2n)} - \frac{F_1^-(p)}{\lambda^{3-2n}} \frac{(1-2n)(-1)^n}{G^+(3-2n)} \\ F_1^+(p) &= -F_1^-(p) + T^+(p) \left(Q_1^-(p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2l+2} A_l^-}{p-2l-2} + a_0 + a_1 p \right) \\ \Phi_2^-(p) &= \frac{1}{G^-(p)} \left(Q_2^-(p) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2l-2} A_l^+}{p+2l-2} + a_2 \right) \\ (4.18) \quad A_m^- + K_m^- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2l-2} A_l^+}{2(m+l)} &= K_m^- (Q_2^-(2+2m) + a_2), \\ K_m^\pm &= \frac{4m(-1)^m}{\pi K^\pm(2 \mp 2m)} \\ A_m^+ - K_m^+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2l+2} A_l^-}{2(m+l)} &= -K_m^+ (Q_1^-(2-2m) + a_0 + (2-2m)a_1) \end{aligned}$$

Бесконечная система (4.18) при фиксированных a_i решалась методом редукции, а урезанная система — методом простой итерации. Сохранялось от 10 уравнений при $\lambda = 0, 2$ до 100 уравнений при $\lambda = 0,95$.

Заметим, что проведенные построения в идейном отношении близки к использованным в [24].

Определим a_i , воспользовавшись условиями (4.4). Для этого выполним ряд преобразований. На основании (4.6) условия (4.4) переносятся на функции $\Phi_i^-(p)$ в следующем виде (вместо последних двух уравнений в (4.4) взяты их суммы и разность):

$$\begin{aligned} (4.19) \quad \pi^{-1} (\Phi_1^-(p) + \lambda^p \Phi_2^-(p))'_{p=3} &= p_{1\beta n}(0) \\ 2(3-i)\pi^{-1} ((2-i)(\Phi_1^-(p) \pm \lambda^p \Phi_2^-(p))' + (\Phi_1^-(p) \pm \lambda^p \Phi_2^-(p)))_{p=1} &= \\ = p''_{1\beta n}(0) \pm p''_{2\beta n}(0) \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

В соответствии со структурой правых частей в (4.18) числа A_m^\pm линейно зависят от a_i и функции (4.13) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (4.20) \quad \Psi_{1,2}^\pm(p) &\equiv \Psi_{1,2}^\pm(p, a_0, a_1, a_2) = \Psi_{1,2}^\pm(p, 0, 0, 0) + \\ &+ a_0 \Psi_{1,2}^\pm(p, 1, 0, 0) + a_1 \Psi_{1,2}^\pm(p, 0, 1, 0) + a_2 \Psi_{1,2}^\pm(p, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Аналогичное представление можно записать для функций (4.16), а с учетом (4.7), (4.8) — для функций

$$(4.21) \quad \Phi_1^-(p) \pm \lambda^p \Phi_2^-(p) = \pm \left(1 \mp \frac{R(p)}{T(p)} \right) \lambda^p \Phi_2^-(p) + \frac{F_1^-(p) + F_1^+(p)}{T(p)}$$

Подставляя (4.21) в (4.19), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно a_i . Далее значения a_i подставляем в (4.18), A_m^\pm — в (4.16), (4.7), (4.8). В итоге находим трансформанты $\lambda_j \Phi_j^-(p)$ функций $\theta_{j\beta n}(\tau)$ — решения системы (4.1). Поведение функций $\theta_{j\beta n}(\tau)$ при $\tau \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow \lambda_j - 0$ то же, что и у функций $\theta_{\alpha n}(\tau)$ в п. 3. Используя построенные $\theta_{j\beta n}(\tau)$, приближенное решение системы (2.8) находим по формулам (1.15), (1.16).

Как и в п. 3, по результатам счета вычислен коэффициент α в формуле (3.13), где

$$(4.22) \quad P = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\lambda_j} \varphi_j(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{n=0}^N \varphi_{\beta n} \lambda_j \Phi_j^-(1)$$

Значения P при $N = 2$ и $N = 3$ практически совпали.

Для $\lambda < 1$ наибольший интерес представляет случай $\sigma < 1$. Соответствующие значения α при $\sigma = 0,5$ и $\lambda = 0,5$ приведены в левой нижней части фигуры штрихпунктирной линией. Как и следовало ожидать, полученная кривая лежит в области, ограниченной двумя предельными кривыми: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Для квадратной пластинки ($\sigma = 1$) влияние второй ветви включения заметно лишь при λ , близких к единице (на фигуре показана штрихпунктиром соответствующая зависимость при $\lambda = 0,9$). В случае $\sigma = 2$ влияние второй ветви несущественно и соответствующие результаты мало отличаются от приведенных в п. 3. Как и в [2, 15], при $\varepsilon = 0$ значения α дают известные значения прогиба под сосредоточенной силой, приложенной в центре пластинки.

Автор благодарит Г. Я. Попова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вища. шк. 1982. 167 с.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука. 1982. 342 с.
3. Ворovich И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 109—115.
4. Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. Метод интегральных уравнений в двумерных задачах теории упругости для кусочно-однородных сред с разрезами // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка. 1986. Вып. 24. С. 28—31.
5. Тихоненко Л. Я., Ситник В. А. Задача об упругой полуплоскости с трещиной, ортогонально выходящей на границу // Динамические системы. Киев: Вища шк. 1985. Вып. 4. С. 45—52.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук думка. 1976. 443 с.
7. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1981. 323 с.
8. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка. 1983. 288 с.
9. Грилицкий Д. В., Евтушенко А. А. Взаимодействие тонкого упругого включения с трещиной в кусочно-однородной плоскости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. № 3. С. 12—24.
10. Каландия А. И. К задаче об изгибе полукруглой плиты // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 2. С. 11—21.
11. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба. 1979. 135 с.
12. Каминский А. А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наук. думка. 1982. 158 с.
13. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1983. 277 с.
14. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192—206.
15. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141—150.
16. Климюк Ю. С., Онищук О. В., Попов Г. Я. Задачи о колебаниях и устойчивости прямоугольной пластинки с тонким включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 137—143.

17. *Онищук О. В., Попов Г. Я., Фаршайт П. Г.* Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293—302.
18. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981. 798 с.
19. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1977. 287 с.
20. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1967. 402 с.
21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука. 1973. 294 с.
22. *Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* Несимметричный изгиб пластинки, подкрепленной симметричной системой радиальных ребер // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 469—477.
23. *Онищук О. В., Попов Г. Я., Процеров Ю. С.* О некоторых контактных задачах для подкрепленных пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 307—314.
24. *Игнатенко М. М., Кириллов В. Х.* О решении некоторых задач математической физики // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1296—1302.

Одесса

Поступила в редакцию
17.XI.1986