Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 539.3

О ПРИНЦИПЕ СЕН-ВЕНАНА В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

Ахмедов Н. К., Устинов Ю. А.

На примере задачи кручения показано, что в радиально-неоднородных цилиндрах с чередующимися жесткими и мягкими слоями существуют слабо затухающие погранслойные решения. Соответствующие им элементарные решения могут проникать достаточно глубоко и существенно менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Это приводит фактически к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке. На основе асимптотического анализа трехмерной задачи предлагается прикладная теория кручения, адекватно учитывающая возникающие особенности.

Ранее было установлено существование слабо затухающих погранслойных решений для плит с чередующимися жесткими и мягкими слоями [1].

1. Рассмотрим задачу кручения кругового радиально-неоднородного цилиндра. В цилиндрической системе координат область, занятая цилиндром

$$\Omega = \{r \in [r_0, r_1],\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, L]\}$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[G\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{u}{\rho}\right)\right]+\frac{2}{\rho}G\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{u}{\rho}\right)+G\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0;\tag{1.1}$$
$$\rho=\frac{r}{r_1},\quad \xi=\frac{z}{r_1},\quad l=\frac{L}{r_1}$$

Здесь u — касательная компонента вектора смещения, $G = G(\rho)$ — модуль сдвига, рассматриваемый как произвольная положительная кусочно-непрерывная функция.

Предполагаем, что боковая часть границы свободна от напряжений, а на торцах заданы произвольные граничные условия.

Общее решение поставленной задачи можно представить в виде

$$u=u_*+\sum_{s=1}^{\infty} v_s(\rho)\left[A_s e^{-\gamma_s\xi}+B_s e^{\gamma_s(\xi-l)}\right]\tag{1.2}$$
$$u_*=\rho\,(A_0+B_0\xi)$$

Здесь u_* — решение Сен-Венана, A_s, B_s — произвольные постоянные; γ_s — положительные собственные значения; v_s — собственные функции следующей спектральной задачи:

$$\frac{d}{d\rho}\left[G\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{v}{\rho}\right)\right]+\frac{2}{\rho}G\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{v}{\rho}\right)+G\gamma^2 v=0;\tag{1.3}$$
$$\frac{dv}{d\rho}-\frac{v}{\rho}=0\quad\text{при}\quad\rho=\rho_0,\rho_1$$

Можно показать, что задача (1.3) самосопряженная, в силу чего собственные функции удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho v_s v_t\,d\rho=\delta_{st}$$

где δ_{st} — символ Кронекера. Постоянные A_s, B_s определяются при удовлетворении граничных условий на торцах.

Было приведено [2] несколько первых численных значений γ_s для однородного сплошного и полого цилиндров, откуда следует, что экспоненциальные решения имеют характер краевого эффекта, локализованного у торцов, что обосновывает принцип Сен-Венана. Как будет показано ниже на примере слоистого цилиндра, этот принцип может нарушаться в силу того, что отдельные собственные значения γ_s могут быть достаточно малыми величинами.

2. Пусть радиально-неоднородный цилиндр состоит из чередующихся жестких и мягких слоев числом $n = 2r - 1$. Будем считать, что внутренний и внешний слои жесткие. Каждый жесткий слой пометим индексом $j = 1, 2, \ldots, r$; а мягкий — индексом $i = 1, 2, \ldots, r - 1$ (порядок нумерации — от центра цилиндра). Для простоты примем, что упругие свойства всех жестких и всех мягких слоев одинаковы. Модули сдвига $G_j = G_h$; $G_i = G_s$. Внутренний радиус k-слоя обозначим r_{0k}, внешний — r_{1k}; в безразмерных координатах — соответственно ρ_{0k}, ρ_{1k}.

Введем параметр $p = G_s/G_h$ и изучим спектральную задачу (1.3) при $p \to 0$.

Теорема. Спектр $\Lambda(p)$ задачи (1.3) является счетным вещественным множеством и представляется в виде

(2.1) $$\Lambda(p) = \Lambda_-(p) \cup \Lambda_+^{(1)}(p) \cup \Lambda_+^{(2)}(p)$$

1) $\Lambda_-(p)$ состоит из двукратного собственного значения $\gamma_0 = 0$ и из $2(r - 1)$ собственных значений вида

$$\gamma_t = p^{1/2}\eta_t + O(p^{3/2})$$

где η_t — ненулевые собственные значения однородной якобиевой алгебраической системы (C — матрица Якоби)

(2.2) $$C\mathrm{x} - \eta^2 B\mathrm{x} = 0$$

$$\mathrm{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)^T, \quad B = \operatorname{diag}\| b_{jj} \|$$

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & -c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -c_{11} & c_{11} + c_{22} & -c_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_{rr} & c_{rr} \end{Vmatrix}$$

$$b_{jj} = \frac{\rho_{1j}^4 - \rho_{0j}^4}{4}, \quad c_{jj} = \frac{2\rho_{1j}^2\rho_{0,j+1}^2}{\rho_{0,j+1}^2 - \rho_{1j}^2}$$

2) $\Lambda_+^{(1)}(p)$ состоит из r множеств собственных значений вида

(2.3) $$\gamma_{jt} = \gamma_{jt0} + O(p)$$

где γ_{jt0} — корень уравнения

(2.4) $$L_{00}^{(j)} - \frac{2}{\gamma\rho_{1j}} L_{01}^{(j)} - \frac{2}{\gamma\rho_{0j}} L_{10}^{(j)} + \frac{4}{\gamma^2\rho_{0j}\rho_{1j}} L_{11}^{(j)} = 0$$

3) $\Lambda_+^{(2)}(p)$ состоит из $r - 1$ множеств собственных значений вида

(2.5) $$\gamma_{it} = \gamma_{it0} + O(p)$$

где γ_{it0} — корень уравнения

(2.6) $$L_{11}^{(i)} = 0$$

Здесь

$$L_{\alpha\beta}^{(k)} = J_\alpha(\gamma\rho_{0k}) Y_\beta(\gamma\rho_{1k}) - J_\beta(\gamma\rho_{1k}) Y_\alpha(\gamma\rho_{0k})$$

J_s, Y_s — функции Бесселя первого и второго рода.

Ввиду громоздкости укажем лишь общую схему доказательства сформулированных результатов.

В рассматриваемом случае цилиндр в радиальном направлении кусочно-однородный, поэтому спектральная задача (1.3) сводится к задаче сопряжения, которая, в свою очередь, сводится к некоторой алгебраической системе с матрицей, элементы которой аналитически зависят от спектрального параметра γ и линейно от параметра p.

Сформулированные выше результаты получаются при применении теории возмущений линейных операторов [3] к указанной выше алгебраической системе. Важно проанализировать предельную задачу. В данном случае при $p = 0$ имеют место два предельных варианта: 1) $G_s \to 0$, модуль G_h конечен; 2) модуль G_s конечен, $G_h \to \infty$.

Первому предельному варианту соответствует система из несвязанных между собой цилиндров (жесткие слои), цилиндрические поверхности которых свободны от напряжений. Очевидно, спектр предельной задачи будет объединением множеств собственных значений спектральных задач, соответствующих отдельным цилиндрам. Обозначим эти множества $\Lambda_j(0)$. Каждое такое множество состоит из двукратного собственного значения $\gamma_{j0} = 0$ и счетного множества значений γ_{jt0}, которые в (2.3) являются первыми членами аналитических разложений по параметру p. При малых $p \neq 0$ числа γ_{j0} порождают $\Lambda_-(p)$.

Второму предельному варианту соответствует система из $r - 1$ несвязанных между собой цилиндров, на цилиндрических поверхностях которых смещения равны нулю. Здесь спектр предельной задачи также будет объединением $r - 1$ множеств собственных значений. Каждое такое множество $\Lambda_i(0)$ состоит из корней γ_{it0} уравнения (2.6).

Из теоремы вытекает, что элементарные решения, соответствующие $\Lambda_-(p)$, при малых p слабо затухают при удалении от торцов цилиндра и могут давать существенную поправку к сен-венановскому решению. Назовем совокупность этих решений слабым краевым эффектом. Элементарные решения, соответствующие $\Lambda_+^{(1)}$ и $\Lambda_+^{(2)}$, при любых p быстро (сильно) затухают при удалении от торцов. Совокупность их будем называть «сильным краевым эффектом».

Приведем выражения для собственных функций v_t, соответствующих $\Lambda_-(p)$, которые описывают распределение перемещений по радиусу. Имеем (c_t — нормирующий множитель)

$$v_t = c_t\,[v_{t0}(\rho) + O(p)] \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} v_{jt0} = X_{jt}\rho, \quad v_{it0} = (\rho_{1i}^2 - \rho_{0i}^2)^{-1} \times \\ \times\,[X_{i+1,\,t}\rho_{1i}^2(\rho - \rho_{0i}^2/\rho) - X_{it}\rho_{0i}^2(\rho - \rho_{1i}^2/\rho)] \end{gathered} \tag{2.8}$$

3. Решению Сен-Венана вместе со слабым краевым эффектом можно дать сравнительно простую механическую интерпретацию.

В рассматриваемом радиально-неоднородном цилиндре с чередующимися жесткими и мягкими слоями будем считать, что любое сечение $\xi = \mathrm{const}$ жесткого слоя может только поворачиваться вокруг оси цилиндра без депланации. При этом смещения точек сечения, очевидно, будут иметь вид

$$u_j = g_j(\xi)\rho \tag{3.1}$$

Примем, что смещения в мягком слое в любом сечении $\xi = \mathrm{const}$ полностью определяются перемещениями смежных жестких слоев, т. е. в соответствии с (3.1) и принятой нумерацией имеем

$$u_i(\rho_{1i}, \xi) = g_{i+1}(\xi)\rho_{1i}; \; u_i(\rho_{0i}, \xi) = g_i(\xi)\rho_{0i}$$

Эта гипотеза позволяет представить смещения в мягком слое в виде

$$u_i = (\rho_{1i}^2 - \rho_{0i}^2)^{-1} [g_{i+1}\rho_{1i}^2 (\rho - \rho_{0i}^2/\rho) - g_i\rho_{0i}^2 (\rho - \rho_{1i}^2/\rho)] \tag{3.2}$$

В соответствии с (3.1) и (3.2) напряженно-деформированное состояние в каждом жестком и мягком слое будет следующим:

$$\sigma_{\theta zj} = G_h\varepsilon_{\theta zj}, \quad \varepsilon_{\theta zj} = \rho r_1^{-1} g_j' \tag{3.3}$$

$$\sigma_{r\theta i} = G_s\varepsilon_{r\theta i}, \quad \varepsilon_{r\theta i} = \frac{2\rho_{0i}^2\rho_{1i}^2}{r_1\rho^2 (\rho_{1i}^2 - \rho_{0i}^2)} (g_{i+1} - g_i)$$

Остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Чтобы получить краевую задачу, адекватную выбранной модели напряженно-деформированного состояния, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа

$$\delta\Pi - \delta A = 0 \tag{3.4}$$

где δA — вариация элементарной работы внешних сил, $\delta\Pi$ — вариация энергии деформации. В соответствии с (3.3) имеем

$$\Pi = 2\pi r_1^3 \int_0^l \Big[\sum_{j=1}^r \int_{\rho_{0j}}^{\rho_{1j}} \sigma_{\theta zj}\varepsilon_{\theta zj}\rho\, d\rho + \sum_{i=1}^{r-1} \int_{\rho_{0i}}^{\rho_{1i}} \sigma_{r\theta i}\varepsilon_{r\theta i}\rho\, d\rho \Big] d\xi \tag{3.5}$$

Чтобы определить δA, примем, например, что на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$u_\theta (\rho, 0) = 0, \ \sigma_{z\theta} (\rho, l) = \tau (\rho) \tag{3.6}$$

$$\tau (\rho) = \begin{cases} \tau_j(\rho), & \rho \in [\rho_{0j}, \rho_{1j}] \\ 0, & \rho \in [\rho_{0i}, \rho_{1i}] \end{cases}$$

Считая δg_j независимыми вариациями ($\delta g_j = 0$ при $\xi = 0$), из вариационного уравнения (3.4) при учете (3.3) и (3.6) получаем систему дифференциальных уравнений и граничных условий, которые удобно представить в векторном виде (матрицы C и B те же, что и в (2.2)):

$$-B\mathbf{g}'' + pC\mathbf{g} = 0 \tag{3.7}$$

$$\mathbf{g}(0) = 0, \ B\mathbf{g}'(l) = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_r)^T, \ \mathbf{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_r) \tag{3.8}$$

$$M_j = 2\pi r_1^2 \int_{\rho_{0j}}^{\rho_{1j}} \tau_j\rho\, d\rho$$

Если решение уравнения (3.7) отыскивать в виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}e^{\gamma\xi}, \quad \gamma = p^{1/2}\eta, \quad \mathbf{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)^T$$

то приходим к задаче (2.2).

Обозначим $\mathbf{x}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{rt})^T$ собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_t = \eta_t^2$ задачи (2.2) ($t = 0, 1, \ldots, r-1$). В силу самосопряженности задачи их можно подчинить условию

$$(B\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s) = \sum_{j=1}^r b_{jj}X_{jt}X_{js} = \delta_{st} \tag{3.9}$$

Прямой проверкой можно показать, что $\lambda_0 = 0$ — собственное значение и ему соответствует собственный вектор

$$\mathbf{x}_0 = (X_0, X_0, \ldots, X_0)^T, \quad X_0 = \Big(\sum_{j=1}^r b_{jj}\Big)^{-1/2} \tag{3.10}$$

Общее решение векторного уравнения можно представить в виде

$$g = g_0 + \sum_{t=1}^{r-1} x_t \left[A_t e^{-\gamma_t \xi} + B_t e^{\gamma_t (\xi - l)}\right] \tag{3.11}$$

$$g_0 = x_0 (A_0 + B_0 \xi)$$

где A_0, B_0, A_t, B_t — произвольные постоянные.

Если построить поле смещений, соответствующее вектору g_0, то на основании формул (3.1), (3.2), (3.11) получаем

$$u_i = X_0 (A_0 + B_0 \xi) \rho$$

т. е. данное частное решение полностью эквивалентно решению Сен-Венана. Напряженно-деформированное состояние, соответствующее ненулевым собственным значениям η_t, является первым приближением по p слабого краевого эффекта. Распределение смещений по радиусу, соответствующее $\gamma_t \neq 0$, определяется формулами (2.8), что находится в полном соответствии с принятыми гипотезами (3.1), (3.2).

Определим теперь постоянные A_0, B_0, A_t, B_t из граничных условий (3.8). Подставляя (3.11) в (3.8) и используя условие ортогональности (3.9), получаем

$$A_0 = 0, \quad B_0 = X_0 \sum_{j=1}^{r} M_j, \quad A_t = -e^{-\gamma_t l} B_t$$

$$B_t = \frac{m_t}{\gamma_t (1 - e^{-2\gamma_t l})}, \quad m_t = \sum_{j=1}^{r} M_j X_{jt}$$

4. В качестве примера рассмотрим трехслойный цилиндр. В этом случае

$$\eta_1^2 = c_{11} (b_{11}/b_{22} + b_{22}/b_{11}), \quad X_0 = (b_{11} + b_{22})^{-1/2}$$

$$X_{11} = (b_{22}/b_{11})^{1/2} X_0, \quad X_{21} = -(b_{11}/b_{22})^{1/2} x_0$$

Для цилиндра с параметрами $\rho_{01} = 0$, $\rho_{11} = 0{,}5$, $\rho_{02} = 0{,}8$, $\rho_{12} = 1$ имеем $\eta_1 \approx 7{,}62$. Поэтому, если $p = 10^{-2}$, то $\gamma_1 = 0{,}762$, если $p = 10^{-3}$, то $\gamma_1 = 0{,}241$. Для сплошного цилиндра, согласно [2], $\gamma_1 = 5{,}136$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Устинов Ю. А.* О структуре погранслоя в слоистых плитах // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1976. Т. 229. № 2. С. 325—328.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
3. *Данфорд Н.*, *Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 895 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 15.VII.1987