

УДК 539.3

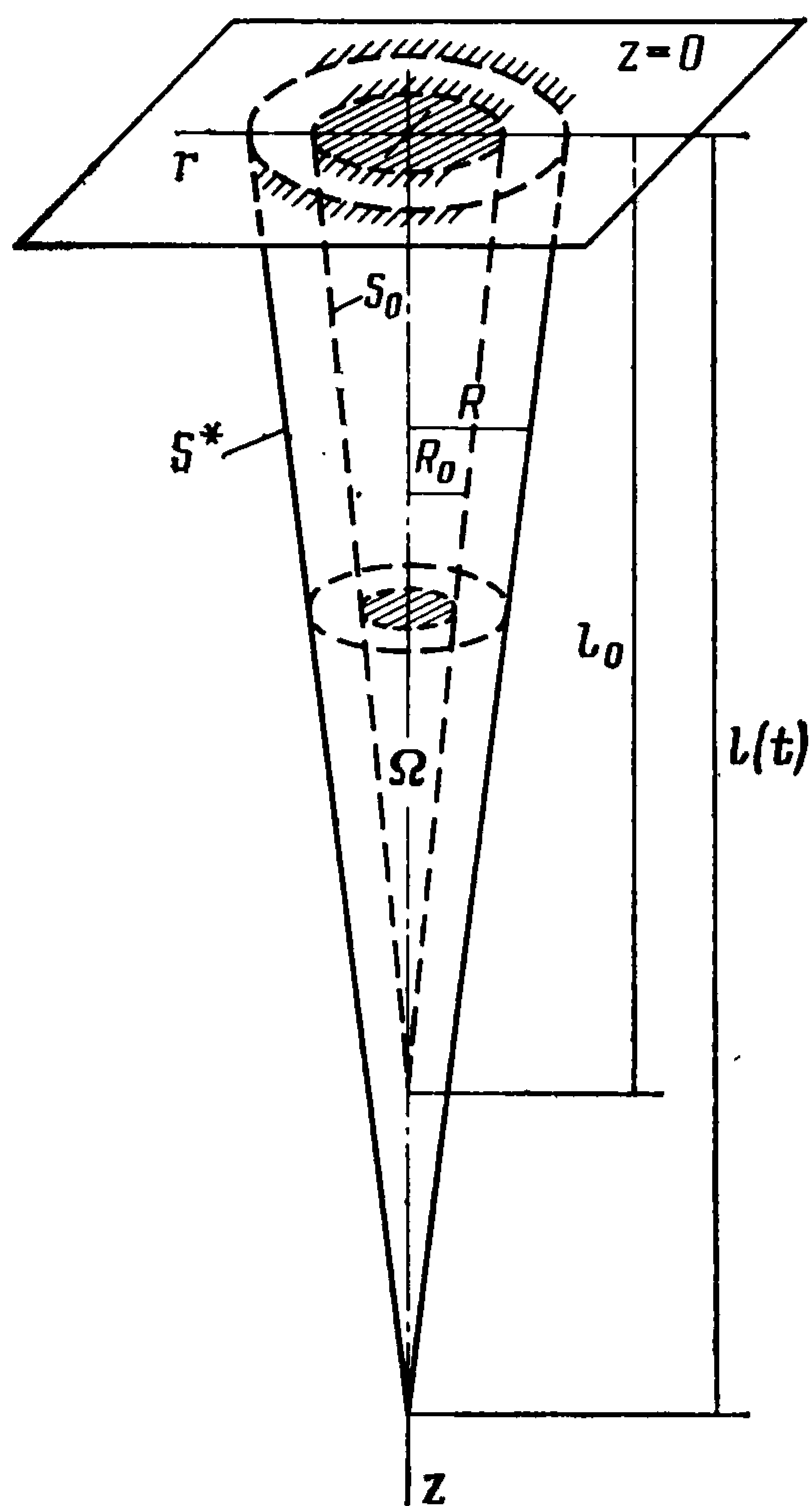
## ЗАДАЧА О РАСТУЩЕЙ ЛЕДЯНОЙ СОСУЛЬКЕ

Арутюнян Н. Х., Григорян С. С., Наумов В. Э.

Рассматривается одно из приложений механики растущих вязкоупругих тел, связанное с определением напряженно-деформированного состояния и закономерностей формообразования растущей или тающей ледяной сосульки.

Рост сосулек — весьма сложный физико-механический процесс, комплексное исследование которого встречает значительные затруднения. В работе предлагается механическая модель ледяной сосульки, которая позволит, по мнению авторов, выработать методику оценки ее напряженно-деформированного состояния и предсказать время ее разрушения, т. е. отрыва. Эта модель ни в коей мере не претендует на полноту и должна рассматриваться как первое приближение на пути решения данной задачи. Вполне возможно, что рассмотренная задача позволит разработать подход к решению соответствующих технологических и гляциологических проблем.

**1. Постановка задачи наращивания сосульки. Основные соотношения.** Ограничимся предположением, что сосулька представляет собой вытянутую фигуру вращения, длина которой значительно больше максимального



Фиг. 1

диаметра поперечного сечения. Допустим, что сосулька прикреплена к плоской горизонтальной поверхности, перпендикулярной ее продольной оси. Расположим начало цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$  в закрепленном сечении, а ось  $z$  направим вниз вдоль оси сосульки (фиг. 1). Далее предполагается, что наращивание сосульки начинается от некоторой исходной конфигурации, в качестве которой, в принципе, может быть принята форма замерзшей висящей капли. Пусть  $l_0$  и  $R_0(z)$  — длина и радиус поперечного сечения сосульки в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $l(t)$  и  $R(t, z)$  — полная длина сосульки в процессе наращивания и текущий радиус ее поперечного сечения, причем  $R(t, l(t)) \equiv 0$ .

Пусть поверхность  $S_0$  исходной сосульки в системе координат  $(r, z) = x$  задана в параметрической или координатной форме

$$(1.1) \quad S_0 = \{x: x = x_0(\tau), \tau \in [\tau_0, \tau_1]\}$$

$$S_0 = \{x: F_0(r, z) \equiv r - R_0(z) = 0, z \in [0, l_0]\}$$

где  $\tau_0, \tau_1$  — значения некоторого параметра  $\tau$  (которым может быть, например, длина дуги), соответствующие точкам на контуре осевого сечения сосульки при  $z = 0$  и  $z = l_0$ .

Аналогичным образом изменяющаяся граница льда  $S^* = S^*(t)$  в процессе роста сосульки задается одним из следующих способов:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} S^*(t) &= \{x: x = x^*(t, \tau), \tau \in [\tau_0, \tau_1(t)], t \geq 0\} \\ S^*(t) &= \{x: F(t, r, z) \equiv r - R(t, z) = 0, z \in [0, l(t)], t \geq 0\} \end{aligned}$$

Допустим, что на любом этапе наращивания сосульки поверхность  $S^*(t)$  остается достаточно пологой, т. е.

$$(1.3) \quad |\partial F / \partial z| \ll |\partial F / \partial r|, \quad F = 0, \quad t \geq 0$$

Это означает, что  $|\partial R / \partial z| \ll 1$ , т. е. угол между касательной к контуру осевого сечения сосульки и осью  $z$  весьма мал. Условие пологости (1.3) дает основание предположить, что напряженное состояние рассматриваемого удлиненного тела близко к одноосному и все компоненты напряжения пренебрежимо малы по сравнению с нормальным осевым напряжением  $\sigma_z \equiv \sigma$ .

Квазистатическое равновесие сосульки обеспечивается балансом нормальных напряжений, распределенных в произвольном поперечном сечении, и веса части сосульки, расположенной ниже этого сечения. Уравнение равновесия имеет вид

$$(1.4) \quad 2\pi \int_0^{R(t,z)} \sigma(t, z, r) r dr = \pi g \rho_s \int_z^{l(t)} R^2(t, \zeta) d\zeta$$

где  $\rho_s = \text{const}$  — плотность льда. В этом уравнении не учитывается наличие на поверхности сосульки стекающего по ней тонкого слоя воды. Влиянием веса стекающей водяной пленки, а также других гидромеханических эффектов, на напряженное состояние сосульки будем пренебрегать.

Введем в рассмотрение функцию  $\varepsilon_0(t, z)$ , равную осевой деформации материала в точках на оси  $z$ . Осевую деформацию в произвольной точке объема будем обозначать  $\varepsilon(t, z, r)$ . В соответствии с общей постановкой начально-краевой задачи для растущего тела [1] условия совместности в нем, вообще говоря, не выполняются, но скорости деформаций удовлетворяют условию совместности (точкой обозначается производная по времени):

$$(1.5) \quad \dot{\varepsilon}(t, z, r) = \dot{\varepsilon}_0(t, z)$$

Будем считать, что произвольный бесконечно малый объем сосульки, расположенный в окрестности точки с координатами  $(r, z)$ , начинает свое существование с момента зарождения  $\tau^*(r, z)$  (момента замерзания воды в этой точке). Для точек внутри исходной сосульки момент зарождения считается равным нулю, а для точек области наращивания, очевидно,  $\tau^*(r, z) > 0$ .

Интегрируя уравнение (1.5) по времени от момента присоединения элемента объема  $\tau^*(r, z)$  до некоторого текущего значения  $t$ , будем иметь

$$(1.6) \quad \varepsilon(t, z, r) - \varepsilon^*(r, z) = \varepsilon_0(t, z) - \varepsilon_0(\tau^*(r, z), z)$$

где  $\varepsilon^*(r, z)$  — начальная осевая деформация, возникающая в момент присоединения элемента к сосулке и связанная, например, с «дефектом объема» воды при замерзании. Соотношение (1.6) отражает тот факт, что затвердевшие элементы находятся в деформированном состоянии, несогласованном с состоянием основного тела. Напряжения в этих затвердевающих элементах будут зависеть кроме начальной деформации  $\varepsilon^*$  только от приращения осевой деформации сосульки после момента присоединения. Осе-

вая деформация на конце сосульки очевидно, равна нулю:

$$(1.7) \quad \varepsilon_0(t, l(t)) = 0$$

Для описания механического поведения льда при одноосном растяжении будем пользоваться определяющим соотношением нелинейной теории ползучести

$$(1.8) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + K\sigma^n; \quad E = \text{const}, \quad K > 0, \quad n > 1$$

где  $E$  — мгновенный модуль упругости,  $K, n$  — постоянные, характеризующие ползучесть льда.

В дальнейшем проанализируем два предельных случая — когда в уравнении (1.8) преобладающим является соответственно первый или второй член в правой части.

**2. Быстрый рост сосульки.** Предположим, что рост сосульки достаточно быстрый, так что эффекты ползучести льда не успевают сколько-нибудь заметно проявиться. В этом случае определяющее уравнение (1.8) принимает форму закону Гука

$$(2.1) \quad \varepsilon = \sigma/E$$

Уравнение равновесия сосульки (1.4) с учетом соотношений (1.6) и (2.1) перепишем в виде

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} R^2(t, z) \varepsilon_0(t, z) - \int_{R_0(z)}^{R(t, z)} \varepsilon_0(\tau^*(r, z), z) r dr = \\ = \frac{\beta}{2} \int_z^{l(t)} R^2(t, \zeta) d\zeta - \int_{R_0(z)}^{R(t, z)} \varepsilon^*(r) r dr, \quad \beta = \frac{g\rho_s}{E}$$

Во втором члене левой части (2.1) выполним замену переменной интегрирования  $\tau^*(r, z) = \xi$ , принимая во внимание, что координата  $z$  зафиксирована, и продифференцируем обе части равенства (2.2) по  $t$

$$(2.3) \quad \frac{1}{2} R^2(t, z) \dot{\varepsilon}_0(t, z) = \beta \int_z^{l(t)} R(t, \zeta) R'(t, \zeta) d\zeta - \\ - \varepsilon^*(R(t, z)) R(t, z) R'(t, z)$$

Момент времени  $\tau_1^*(z)$ , в который общая длина сосульки равна  $z$ , связан с ранее введенной функцией  $\tau^*(r, z)$  соотношением  $\tau_1^*(z) = \tau^*(0, z)$ . Нетрудно заметить, что функции  $l(t)$  и  $\tau_1^*(z)$  взаимно обратные:

$$(2.4) \quad \tau_1^*(l(t)) \equiv t, \quad l(\tau_1^*(z)) \equiv z$$

Разделим обе части равенства (2.3) на  $1/2 R^2(t, z)$ , проинтегрируем полученное уравнение от момента образования сечения  $z = \text{const}$  до некоторого текущего момента времени и изменим порядок интегрирования по  $\zeta$  и  $\tau$ . Окончательно будем иметь

$$(2.5) \quad \varepsilon_0(t, z) = \varepsilon^0(z) + 2\beta \int_z^{l(t)} \left[ \int_{\tau_1^*(\zeta)}^t \frac{R(\tau, \zeta)}{R^2(\tau, z)} \frac{\partial R(\tau, \zeta)}{\partial \tau} d\tau \right] d\zeta - \\ - 2 \int_{\tau_1^*(z)}^t \frac{\varepsilon^*(R(\tau, z))}{R(\tau, z)} \frac{\partial R(\tau, z)}{\partial \tau} d\tau$$

Величина  $\varepsilon^0(z) = \varepsilon_0(\tau_1^*(z), z)$  в полученном выражении равна деформации оси сосульки в точке  $z = \text{const}$  в момент образования соответствующего сечения. Очевидно, что для области наращивания  $z \geq l_0$  ве-

личину  $\varepsilon^{\circ}(z)$  можно положить равной нулю (см. равенство (1.7) с учетом соотношений (2.4)), а для области  $0 \leq z \leq l_0$  она находится из уравнения равновесия в момент начала наращивания

$$(2.6) \quad \varepsilon^{\circ}(z) = \frac{\beta}{R_0^2(z)} \int_z^{l_0} R_0^2(\zeta) d\zeta$$

и полностью определяется конфигурацией исходной сосульки.

Таким образом, выражение (2.5) дает решение задачи о формировании напряженно-деформированного состояния упругой осесимметричной сосульки. Функции  $R(t, z)$  и  $l(t)$ , определяющие закон формообразования сосульки, до сих пор считались заданными. Ниже в п. 5 они будут определены. Функция  $\varepsilon^*(z)$  в (2.5), определяющая начальную деформацию затвердевающей пленки жидкости, также считается заданной. В ряде случаев ее можно положить равной нулю.

**3. Медленный рост сосульки.** Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда рост сосульки настолько медленный, что скоростью изменения напряжений можно пренебречь. В этом случае определяющее уравнение имеет вид закона Глена [2]

$$(3.1) \quad \dot{\varepsilon} = K\sigma^n$$

где  $K$  и  $n$  — постоянные, характеризующие ползучесть льда в заданном диапазоне изменения температуры и других параметров окружающей среды. Обращение этого уравнения имеет вид

$$(3.2) \quad \sigma = (K^{-1}\dot{\varepsilon})^{1/n}$$

Выполнив для данного случая преобразование уравнения равновесия (1.4), получим

$$(3.3) \quad \int_0^{R(t,z)} \sigma(t, z) r dr = \frac{g\rho_s}{2} \int_z^{l(t)} R^2(t, \zeta) d\zeta$$

Здесь учтено, что скорости осевой деформации (а следовательно, и значения напряжений) исходного ядра сосульки и элементов зоны наращивания в рассматриваемом поперечном сечении равны в соответствии с соотношением (1.5). Подставляя в (3.3) выражение (3.2), будем иметь

$$(3.4) \quad \frac{d\varepsilon(t, z)}{dt} = \gamma \left[ \frac{1}{R^2(t, z)} \int_z^{l(t)} R^2(t, \zeta) d\zeta \right]^n$$

$$\gamma = K (g\rho_s)^n = \text{const}$$

Выражение (3.4) определяет поведение растущей сосульки в условиях нелинейной ползучести, описываемой уравнением состояния (3.1). При этом, как и в случае быстрого роста сосульки, функции  $R(t, z)$  и  $l(t)$  считаются подлежащими определению.

**4. Критерии разрушения сосульки.** Один из основных вопросов, возникающих в связи с рассмотрением задачи наращивания сосульки, заключается в предсказании момента ее разрушения и отрыва под действием собственного веса. Остановимся сначала на случае упругой сосульки, напряженно-деформированное состояние которой определяется соотношениями (2.1), (2.5), (2.6). В качестве условия прочности и хрупкого разрушения льда в состоянии упругого деформирования обычно используется критерий максимальных допустимых напряжений [3, 4]. Величину допустимого напряжения при упругом растяжении ледяного образца обо-

значим  $\sigma_*$ . Тогда условие локального хрупкого разрушения сосульки, занимающей в момент разрушения область  $\Omega^*$ , имеет вид

$$(4.1) \quad \sigma = \sigma_*, \quad x \in \Omega^*$$

В условиях рассматриваемой задачи необходимо также предусмотреть возможность разрушения сосульки по участку ее крепления к недеформируемой поверхности основания. Прочность адгезионного сцепления льда с инородным материалом, измеренная в единицах напряжения, обычно называется силой смерзания и существенно зависит от различных параметров, в частности физико-механических свойств материала основания, шероховатости поверхности смерзания, температуры окружающей среды и т. п. Анализ экспериментальных значений силы смерзания льда с некоторыми распространенными в строительной практике материалами (например, бетоном или древесиной) при температуре окружающей среды  $0 - -5^\circ \text{C}$  приводит к заключению, что сила смерзания, как правило, несколько меньше прочности льда на растяжение (для соответствующей температуры и при прочих равных условиях), либо они имеют примерно одинаковые значения с точностью до разброса экспериментальных данных [3, 4].

Обозначив силу смерзания льда с поверхностью основания через  $\sigma_{**}$ , условие локального разрушения в точках закрепленного сечения запишем в виде

$$(4.2) \quad \sigma = \sigma_{**}, \quad x \in S^\circ$$

где  $S^\circ$  — область закрепленного сечения ( $z = 0$ ) в момент разрушения. Если осевые напряжения в поперечном сечении ледяного стержня и нормальные напряжения на участке его сцепления с основанием распределены равномерно, то условие (4.1) или (4.2) будет служить критерием не только локального разрушения, но и условием частичного или полного отрыва сосульки.

Однако в случае растущей сосульки напряжения согласно принятой модели деформирования распределены равномерно, вообще говоря, только в пределах исходного поперечного сечения сосульки. В целом же распределение напряжений в сечении растущей сосульки неравномерное, так как напряжения в зоне наращивания формируются независимо от состояния основного тела сосульки. Поэтому условия (4.1), (4.2) не могут служить критериями глобального разрушения и отрыва сосульки. Тем не менее разрыв исходного сечения сосульки делает ее состояние опасным с точки зрения прочности.

Учитывая, что при оценке прочности сосульки в некоторых случаях, по-видимому, целесообразно исходить из нижнего предельного значения гравитационной нагрузки, будем считать, что достижение максимально допустимого уровня напряжений означает разрушение соответствующего сечения и отрыв расположенной ниже этого сечения части сосульки. Обозначим  $t_\Omega$  и  $t_0$  моменты времени, в которые достигаются предельные значения напряжений в соответствии с равенствами

$$(4.3) \quad \max_{x \in \Omega^*} \sigma(t_\Omega, x) = \sigma_*, \quad \max_{x \in S^\circ} \sigma(t_0, x) = \sigma_{**}$$

Таким образом, отрыв сосульки происходит в момент времени  $t^* = \min(t_\Omega, t_0)$ . Если расчетные значения  $t_0$  и  $t_\Omega$ , определенные согласно критериям (4.1), (4.2) на основе соотношений (2.1), (2.5), (2.6), связаны неравенством  $t_0 < t_\Omega$ , то имеет место полный отрыв сосульки от поверхности крепления; если  $t_\Omega < t_0$ , то происходит частичный отрыв по разрушенному сечению.

Что касается случая чисто вязкого состояния сосульки, определяемого соотношениями (3.1), (3.4), то ввиду большого разнообразия критериев прочности и разрушения материалов при ползучести выбор конкретного критерия применительно к условиям рассматриваемой задачи связан с определенными трудностями. По-видимому, наиболее простым критерием разрушения льда, отражающим особенности его деформирования в условиях ползучести, является критерий предельной скорости

деформации (см. [3]):  $ds/dt = e_*$ , где  $e_*$  — критическое значение скорости деформации, при которой образец разрушается. Поскольку в силу соотношения (1.5) скорости деформации ядра сосульки и присоединяемых элементов сечения равны, то критерии локального и глобального разрушения совпадают и выражаются уравнением  $\dot{\epsilon}_0 = e_*$ , где  $\dot{\epsilon}_0$  — скорость деформации оси сосульки.

**5. Формообразование растущей сосульки.** Как уже отмечалось, полученные выше формулы (2.5), (3.4) представляют решение задачи о формировании напряженного состояния сосульки с той оговоркой, что закономерность изменения ее геометрической формы, определяемая условиями теплообмена с окружающей средой, известна. Описание теплообмена тела сосульки со стекающей по ней водой, за счет частичного или полного замерзания которой происходит рост сосульки, представляет собой отдельную и, скорее всего, не менее сложную задачу, чем анализ напряженно-деформированного состояния сосульки. Ниже предлагается один из возможных подходов к решению этой задачи.

**5.1. Задача о фазовом переходе для растущей сосульки.** Строго говоря, для анализа движения межфазовой границы при замерзании воды в процессе наращивания сосульки необходимо рассматривать полную математическую постановку задачи о фазовом переходе. Одной из возможных постановок является двумерная двухфазная задача Стефана со свободной границей. Однако получение решения подобной задачи в обозримом виде представляет значительные трудности. Поэтому упростим постановку задачи, ограничившись рассмотрением одномерной задачи Стефана в локальной системе координат  $(v, s)$ , когда фронт фазового перехода «вода — лед» движется вдоль координаты  $v$ , отсчитываемой вдоль внешней нормали к поверхности исходной сосульки (ввиду условия (1.3) нормаль практически направлена по радиусу поперечного сечения).

Учитывая, что в силу принятого условия (1.3) поверхность ледяной сосульки полая, ограничимся анализом процесса теплообмена льда со стекающей по нему водой в рамках одномерной задачи для поперечного сечения сосульки при произвольной фиксированной координате  $z$ .

Уравнение теплопроводности для льда в сечении сосульки имеет вид

$$(5.1) \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r \leq R(t, z)$$

где  $T_s$  — температура льда,  $c^2$  — коэффициент температуропроводности льда. В условиях рассматриваемой задачи наиболее интенсивный теплообмен происходит в сравнительно тонком слое льда, примыкающем к движущейся границе раздела фаз. Можно показать, что для этого слоя определяющим является первое слагаемое в правой части уравнения (5.1). При этом фронт фазового перехода считается уже плоским.

Таким образом, уравнение теплопроводности для льда и условие Стефана на межфазовой границе имеют вид [5]

$$(5.2) \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial v^2}, \quad -\infty < v < \xi(t)$$

$$(5.3) \quad k_s \frac{\partial T_s}{\partial v} \Big|_{v=\xi(t)-0} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial v} \Big|_{v=\xi(t)+0} = \lambda \rho_l \frac{d\xi}{dt}$$

Здесь  $T_l$  — температура воды,  $k_s$ ,  $k_l$  — коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз соответственно,  $\lambda$  — скрытая теплота фазового перехода, отнесенная к единице массы,  $\rho_l$  — плотность воды. Точки  $v =$

$= \xi - 0$  и  $v = \xi + 0$  являются предельными точками на границе раздела фаз при стремлении к ней со стороны льда и воды.

Будем считать, что температура льда при  $v = -\infty$  (т. е. достаточно далеко от границы фазового перехода) постоянна и ниже температуры фазового перехода. Предположим также, что температура воды постоянна и равна температуре замерзания. Таким образом, дополнительно к соотношениям (5.2), (5.3) имеем условия

$$(5.4) \quad T_l \equiv 0, \quad v \geq \xi(t); \quad T_s = T_l = 0, \quad v = \xi(t); \quad T_s = T_0 < 0, \quad v = -\infty$$

Аналогично [5] можно показать, что распределение температуры во льде и положение межфазовой границы определяются формулами

$$(5.5) \quad T_s(t, v) = T_0 \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{2c} \right) \right]^{-1} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{2c} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{v}{2c\sqrt{t}} \right) \right] \\ \xi(t) = \alpha \sqrt{t}$$

Постоянная  $\alpha$  является решением следующего трансцендентного уравнения:

$$(5.6) \quad \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{2c} \right) \right]^{-1} \exp \left( -\frac{\alpha^2}{4c^2} \right) = D\alpha \\ D = -\sqrt{\pi} \lambda \rho_l c / (2k_s T_0) > 0$$

Очевидно, что уравнение (5.6) всегда имеет корень  $\alpha > 0$ .

**5.2. Кинематика формообразования растущей сосульки.** Второе выражение (5.5) определяет толщину слоя льда, присоединившегося к исходной поверхности сосульки, измеренную вдоль внешней нормали к ней. Если поверхность исходной сосульки задана соотношениями (1.1), то поверхность льда в новом положении определится уравнением

$$(5.7) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \nabla F_0 / |\nabla F_0|$$

В силу условия пологости (1.3) векторное уравнение (5.7) может быть сведено к приближенному скалярному соотношению

$$(5.8) \quad R(t, z) = R_0(z) + \xi(t)$$

где функция  $\xi(t)$  определяется соотношениями (5.5), (5.6). Полученное приближенное выражение для функции  $R(t, z)$  может непосредственно использоваться для определения напряженно-деформированного состояния сосульки по формулам (2.5) или (3.4). Функцию  $l(t)$  в этих формулах, равную длине растущей сосульки, будем определять на основе следующих соотношений:

$$(5.9) \quad l(t) = l_0 + \int_0^t \frac{dl(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{l_0}{\max_z R_0(z)} \frac{d\xi}{dt}$$

Рост сосульки в поперечном направлении на участке  $l_0 \leq z \leq l(t)$  определяется при этом по формуле

$$(5.10) \quad R(t, z) = \xi(t) - \xi(\tau_1^*(z))$$

где  $\tau_1^*(z)$  — функция, заданная соотношениями (2.4).

**5.3. Анализ результатов.** Примем для определенности, что поверхность исходной сосульки имеет форму узкого конуса

$$(5.11) \quad r = \mp Az \pm B, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad 0 \leq z \leq B/A \equiv l_0$$

где коэффициент  $A$  достаточно мал.

Ограничимся рассмотрением упругой сосульки, напряженно-деформированное состояние которой определяется соотношениями (2.5), (2.6).

Положим в этих соотношениях  $\varepsilon^* \equiv 0$ . Вычисления по формулам (2.5), (2.6), (5.5), (5.8)—(5.11) дают следующие результаты:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(t, z) &= \alpha\beta \sqrt{t/A} + 1/3 (l_0 - z) \beta, & 0 \leq z \leq l_0 \\ \varepsilon_0(t, z) &= \alpha\beta \sqrt{t/A} - (z - l_0) \beta, & l_0 \leq z \leq l(t) \end{aligned}$$

Из выражений (5.12) видно, что максимальное значение деформации льда достигается в сечении  $z = 0$ , т. е. на поверхности смерзания. При этом деформация  $\varepsilon_0(t, 0)$  монотонно возрастает во времени при наращивании сосульки. Допустим, что в момент начала наращивания  $t = 0$  выполняется условие прочности сосульки. Тогда из соотношений (2.1), (4.2) и первого выражения (5.12) получим формулу для определения момента разрушения сосульки

$$t_0 = \left[ \frac{A}{\alpha\beta} \left( \frac{\sigma_{**}}{E} - \frac{\beta l_0}{3} \right) \right]^2$$

Следует подчеркнуть одно важное, хотя и не совсем очевидное обстоятельство: напряженно-деформированное состояние растущей упругой сосульки существенно отличается от состояния такой же сосульки с идентичными геометрическими параметрами, но сформированной мгновенно или в таких условиях, когда силы тяжести начинают действовать по завершении формирования.

Действительно, вычислим упругую осевую деформацию  $\varepsilon_0^*(t, z^*)$  мгновенно сформированной в момент времени  $t$  сосульки для некоторого фиксированного сечения  $z^* = \text{const} < l_0$ . При этом радиус поперечного сечения в соответствии с формулой (5.8) равен  $R(t, z^*) = \alpha \sqrt{t} + A(l_0 - z)$ , а общая длина сосульки согласно соотношениям (5.9) равна  $l(t) = l_0 + \alpha \sqrt{t/A}$ . Будем иметь  $\varepsilon_0^*(t, z^*) = V_{z^*} \rho_s g / (S_{z^*} E)$ , где  $V_{z^*} = 1/3 S_{z^*} (l - z^*)$  — объем льда, заключенного в конусе, лежащем ниже сечения  $z^*$ , а  $S_{z^*}$  — площадь этого сечения. Таким образом

$$\varepsilon_0^*(t, z^*) = 1/3 \beta (l_0 + \alpha \sqrt{t/A} - z^*)$$

Сравнивая полученное значение с соответствующей деформацией сосульки  $\varepsilon_0(t, z^*)$ , сформированной за конечный промежуток времени  $[0, t]$  в поле сил тяжести (см. первое выражение (5.12)), запишем  $\varepsilon_0/\varepsilon_0^* = 3 - 2/(1 + \gamma)$ , где величина  $\gamma = \alpha \sqrt{t}/[A(l_0 - z^*)]$  определяет отношение толщины выросшего слоя льда к радиусу исходного поперечного сечения при фиксированном  $z^*$  в рассматриваемый момент времени  $t$ . Видно, что  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\varepsilon_0/\varepsilon_0^*) = 3$ , т. е. деформация растущей сосульки при достаточно большой толщине выросшего слоя льда практически в три раза больше деформации мгновенно сформированной сосульки таких же размеров. Аналогичное сравнение для участка наращивания оси сосульки  $l_0 \leq z^* \leq l(t)$ , когда деформация  $\varepsilon_0(t, z^*)$  определяется вторым выражением (5.12), дает  $\varepsilon_0/\varepsilon_0^* = 3$ , т. е. ровно трехкратное превышение деформации на любом этапе наращивания.

Указанное отличие упругих деформаций растущей и «стационарной» сосулек обусловлено тем, что в случае растущей сосульки ее элементы воспринимают гравитационную нагрузку постепенно по мере зарождения. Внутренние элементы сечения в этом случае оказываются наиболее загруженными, а продольные волокна, примыкающие к оси сосульки, подвержены наибольшим деформациям растяжения. В сечении стационарной сосульки деформации распределены равномерно, так как все ее элементы загружаются одновременно.

**6. Таяние сосульки.** Сдвиг теплового баланса в дневное время обуславливает таяние льда и уменьшение общего объема сосульки. Если таяние льда в дневное время протекает не очень интенсивно, то сосулька продолжает свое существование еще в течение нескольких суток. В утренние часы, когда температура воздуха невысока, она может расти, а после прогревания воздуха — таять.

Приступим к построению механической модели тающей ледяной сосульки. При этом для описания реологического поведения льда при таянии будем пользоваться законом Глена (3.1). Очевидно, что формирова-

ние напряжений и скоростей деформаций в этом случае по-прежнему определяется соотношением (3.4). В отличие от случая растущей сосульки функции  $R(t, z)$  и  $l(t)$  в уравнении (3.4) применительно к рассматриваемой ситуации будут монотонно убывающими функциями времени.

6.1. *Динамика стекания водяной пленки.* Формообразование тающей сосульки определяется плавлением поверхностного слоя льда в процессе теплообмена с тонким слоем (пленкой) воды, стекающей вдоль внешней поверхности льда, начиная от верхнего закрепленного сечения сосульки. Количество воды, стекающей по сосулке, определяется режимом таяния льда и снега в питающем массиве. Зафиксируем некоторую начальную конфигурацию сосульки. Пусть форма исходной сосульки в начальный момент времени  $t = 0$  описывается соотношениями вида (1.1). Таяние льда приводит к тому, что твердая поверхность сосульки становится фронтом фазового перехода «лед — вода» и перемещается в сторону внутренней нормали к исходной поверхности льда. Изменяющуюся границу льда в текущий момент времени по-прежнему будем обозначать через  $S^*(t)$  (см. (1.2)) и считать, что выполнены условия (1.3).

Всюду ниже будем считать, что толщина водяной пленки  $h$  значительно меньше характерного поперечного размера сосульки (задача гидродинамики обтекания тела вращения при этом условии может быть рассмотрена как плоская). Кроме того, ограничимся наиболее простой моделью стекания, в которой не учитывается влияние поверхностного натяжения на равновесие жидкой пленки.

В рамках условия (1.3) пленочное течение вдоль поверхности  $S^*$  может быть проанализировано локально как течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоскости. Введем систему координат  $(\zeta, \eta)$ , ось  $\zeta$  которой направлена вдоль поверхности сосульки вниз, а ось  $\eta$  — по внешней нормали к ней. Составляя уравнение равновесия бесконечно тонкого слоя жидкости под действием касательных напряжений и гравитационных сил, аналогично [6] будем иметь

$$(6.1) \quad -\mu du/d\eta = \rho_l g (\eta - h) \cos \theta$$

где  $\theta$  — угол отклонения касательной к поверхности сосульки от вертикали,  $u$  — скорость жидкости в направлении оси  $\zeta$ ,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости. Из соотношения (6.1) найдем выражение для скорости течения

$$(6.2) \quad u = (\rho_l g / \mu) \cos \theta (h\eta - \eta^2/2)$$

Запишем теперь условие сохранения объема жидкости при течении по наклонной плоскости, не учитывая пока движения границы раздела фаз (фиг. 2). С точностью до малых более высокого порядка получим

$$(6.3) \quad V|_{t+dt} = V|_t + (\langle u \rangle h)|_{\zeta+d\zeta} dt - (\langle u \rangle h)|_{\zeta} dt + \frac{\partial h}{\partial t} d\zeta dt$$

Здесь  $V$  — элементарный объем жидкости, заключенный между свободной поверхностью текущей пленки и наклонной плоскостью, а также парой бесконечно близко расположенных сечений  $\zeta = \text{const}$  и  $\zeta + d\zeta = \text{const}$ ,  $\langle u \rangle$  — усредненная по толщине слоя скорость течения.

Увеличение объема воды за счет частичного таяния льда, т. е. перемещения опорной поверхности по материальным частицам объема твердой фазы, учитывается соотношением

$$(6.4) \quad V|_{t+dt} = V|_t + v d\zeta dt$$

где  $v > 0$  — скорость перемещения поверхности льда за счет таяния, направленная по нормали к поверхности сосульки внутрь твердой фазы.

Соотношения (6.3), (6.4) приводят к уравнению

$$(6.5) \quad \partial h / \partial t + \partial (\langle u \rangle h) / \partial \xi = v$$

Используя для вычисления величины  $\langle u \rangle$  выражение (6.2), учитывая, что  $\cos \theta \approx 1$  в силу малости угла  $\theta$ , и подставляя результат в уравнение (6.5), приведем его к следующему виду:

$$(6.6) \quad \partial h / \partial t + \rho_l g \mu^{-1} h^2 \partial h / \partial \zeta = v$$

Скорость перемещения поверхности льда  $v$  должна определяться из дополнительных соотношений, описывающих теплообмен между сосулькой и водяной пленкой.

**6.2. Условия теплообмена при пленочном обтекании тающей сосульки.** Обратимся к классическому условию Стефана на границе фазового перехода лед—вода, которое применительно, к рассматриваемому случаю имеет вид

$$(6.7) \quad \lambda \rho_s v = k_l \left. \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right|_{\eta=+0} - k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right|_{\eta=-0}$$

Будем считать, что температура льда постоянна и равна температуре плавления  $T_s \equiv 0$ , а температура воды внутри пленки распределена по ее толщине по линейному закону

$$(6.8) \quad T_s = 0, \quad \eta \leq 0; \quad T_l = T_a \eta / h, \\ 0 \leq \eta \leq h$$

где  $T_a$  — температура окружающего воздуха ( $T_a > 0$ ). Эти предположения достаточно хорошо обоснованы для сравнительно массивных сосулек, если слой стекающей воды весьма тонкий.

С учетом выражений (6.8) условие (6.7) запишем в виде

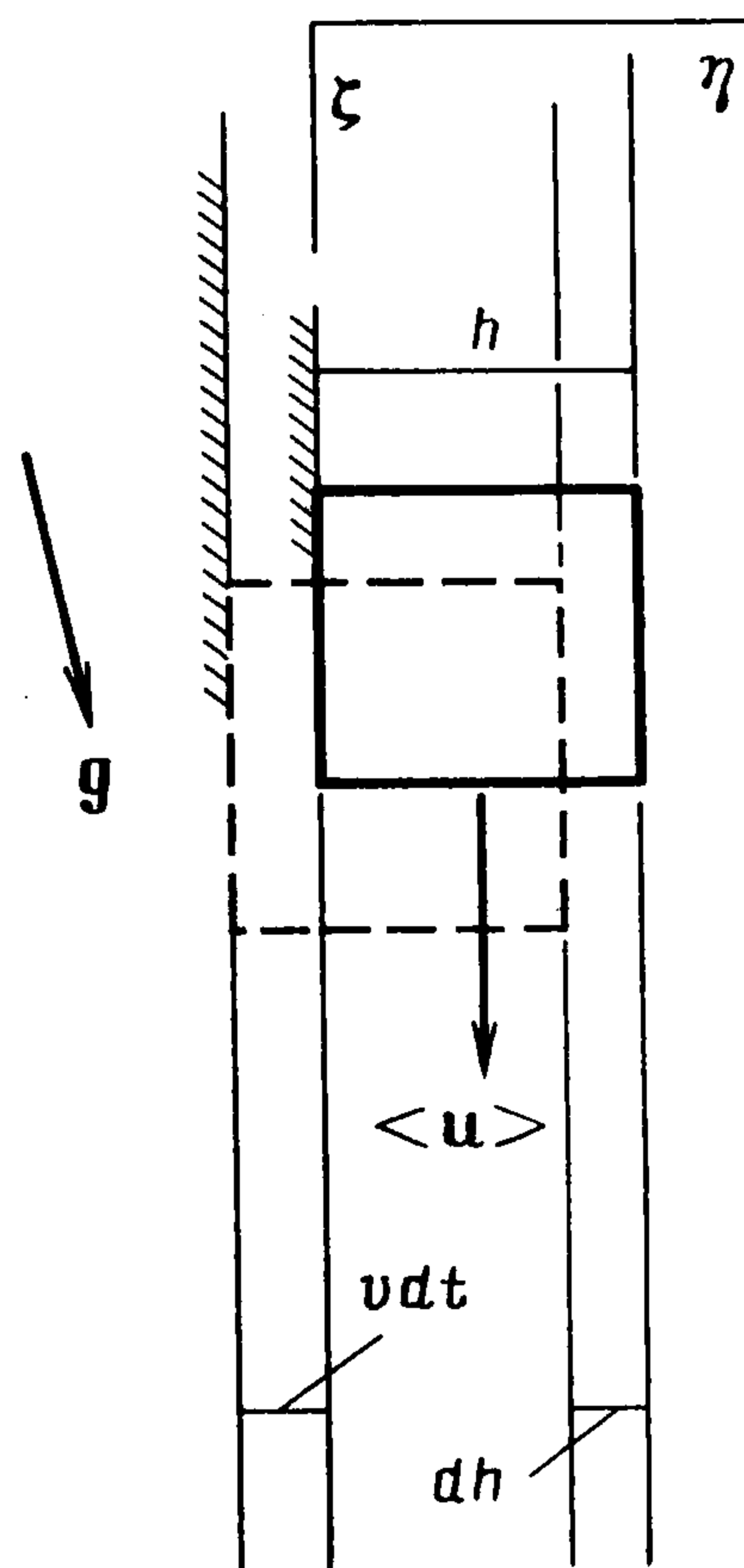
$$(6.9) \quad \lambda \rho_s v = k_l T_a / h$$

Поскольку все величины, входящие в это уравнение, кроме  $v$  и  $h$ , считаются постоянными, то из него следует, что в рассматриваемый момент времени скорость плавления льда обратно пропорциональна толщине водяной пленки, стекающей по сосулке.

**6.3. Основное уравнение динамики стекания воды по тающей сосулке и его решение.** Уравнения (6.6) и (6.9) образуют систему уравнений, из которой должна определяться закономерность движения внешней границы льда  $S^*$ . Подставляя (6.9) в (6.6) и вводя безразмерные переменные  $h^* = h/d_0$ ,  $t^* = t/t^0$ ,  $\zeta^* = \zeta/d_0$ , где  $d_0$ ,  $t^0$  — некоторые характерные единицы длины и времени, получим основное уравнение течения водяной пленки (звездочки у безразмерных переменных опущены):

$$(6.10) \quad h \frac{\partial h}{\partial t} + ah^3 \frac{\partial h}{\partial \zeta} = b, \quad a = \frac{\rho_l g t^0 d_0}{\mu}, \quad b = \frac{2k_l T_a t^0}{\lambda \rho_s d_0^2}$$

В качестве масштаба  $d_0$  естественно принять начальную длину сосульки или ее характерный диаметр. В качестве  $t^0$  можно задать величину, обращающую в единицу либо число  $a$ , либо число  $b$ . Решение задачи таяния сосульки будет определяться лишь отношением безразмерных параметров  $a/b$ . При изменении этого отношения от малых до весьма больших значений будут соответственно преобладать либо тепловые, либо гидродинамические эффекты.



Фиг. 2

Заметим, что уравнение (6.10) получено на основе соотношений, описывающих локальное пленочное течение в окрестности произвольной точки поверхности сосульки. Можно показать, что при переходе от локальных координат  $(\zeta, \eta)$  к криволинейным ортогональным координатам  $(\xi, \nu)$ , где  $\xi$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль поверхности  $S^*$ , а  $\nu$  — расстояние вдоль ортогональной кривой к координатной линии  $\xi$ , уравнение (6.10) сохраняет свой вид в рамках условия (1.3) пологости поверхности  $S^*$ .

Вводя новую неизвестную функцию  $f = h^2$ , перепишем уравнение (6.10) в виде

$$(6.11) \quad \partial f / \partial t + af \partial f / \partial \zeta = b$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом характеристик. Характеристические уравнения имеют вид

$$(6.12) \quad df/ds = b, \quad dt/ds = 1, \quad d\zeta/ds = af$$

Здесь  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль характеристик. Начальные условия типа Коши для системы уравнений (6.12) примем пока в виде произвольных функций характеристической координаты  $\tau$ , отсчитываемой вдоль линии начальных условий:

$$(6.13) \quad f = f_0(\tau), \quad t = t_0(\tau), \quad \zeta = \zeta_0(\tau)$$

Из первого и последнего уравнений (6.12) получим

$$(6.14) \quad f(s, \tau) = bs + f_0(\tau), \quad \zeta(s, t) = 1/2 abs^2 + asf_0(\tau) + \zeta_0(\tau)$$

Характеристики, соответствующие полученному решению (6.14), имеют форму ветвей парабол, определяемых уравнениями

$$\zeta = \left[ \sqrt{\frac{ab}{2}} t + \sqrt{\frac{a}{2b}} + f_0(\tau) \right]^2 + \zeta_0(\tau) - \frac{a}{2b} f_0^2(\tau)$$

Зададим для определенности следующие начальные условия:

$$(6.15) \quad t_0(\tau) = 0, \quad \zeta_0(\tau) = \tau, \quad f_0(\tau) = \beta - \alpha\tau, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

По физическому смыслу начальные условия типа Коши такого вида представляют собой граничное условие для функции  $f$ , заданное в начальный момент времени  $t = 0$  на поверхности исходной сосульки.

Исключая из уравнений (6.14) переменную  $\tau$ , представим решение уравнения (6.11) при заданных условиях (6.15) в виде

$$(6.16) \quad f(t, \zeta) = bt + \beta + \alpha (act - 1)^{-1} (\zeta - 1/2 abt^2 - a\beta t)$$

Согласно полученному выражению, безразмерная толщина слоя жидкости  $h = \sqrt{f}$  возрастает во времени для всех точек поверхности сосульки. Тогда в соответствии с соотношением (6.9) скорость смещения фазовой границы таяния по материальным точкам льда будет монотонно убывать во времени. Заметим, что этот вывод справедлив в рамках принятой модели таяния сосульки, описываемой уравнением (6.11), для начальных условий вида (6.15). Выражение (6.16) с учетом связи  $h = \sqrt{f}$  в сочетании с соотношениями, полностью аналогичными (5.7), (5.8), может непосредственно использоваться для описания формообразования тающей ледяной сосульки.

При  $t \rightarrow \infty$  из (6.16) следует, что  $f \sim 1/2 bt$ , т. е. процесс формообразования сосульки асимптотически выходит на режим равномерного стаивания по всей ее поверхности с не зависящей от продольной координаты скоростью стаивания  $v \sim f^{-1/2}$ . Такой режим возникает сразу, если начальная толщина пленки, покрывающей сосульку, равна нулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 783—789.
2. Glen J. W. The creep of polycrystalline ice // Proc. Roy. Soc. London. 1955. V. 228, No. 1175. P. 519—538.
3. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат. 1980. 384 с.
4. Войтковский К. Ф. Механические свойства льда. М.: Изд-во АН СССР. 1960. 100 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
6. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия. 1974. 688 с.

Москва

Поступила в редакцию  
27.III.1987