

УДК 541.124:532.5

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНВЕКТИВНОЙ
ДИФФУЗИИ В ОКРЕСТНОСТИ РАЗРЫВА
КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ**

Брыкина И. Г.

Рассматривается задача о конвективной диффузии при обтекании бинарной смесью пластины при наличии на ней линии разрыва каталитических свойств. Учитывается влияние продольной диффузии. Поверхность до разрыва предполагается некаталитической, после разрыва — обладающей конечной каталитической активностью. При малых значениях коэффициента каталитической активности получено аналитическое решение задачи путем применения преобразования Фурье. Найдены асимптотики решения в виде простых формул вблизи и вдали от точки разрыва граничных условий вверх и вниз по потоку. Проводится сравнение с решениями, полученными в приближении пограничного слоя и численным методом [1].

Задача о конвективной диффузии (или теплопроводности) в случае перехода с некаталитической поверхности на идеально каталитическую решалась [2, 3] методом Винера — Хопфа.

1. Рассматривается стационарное течение двухкомпонентной несжимаемой жидкости или газа с постоянными диффузионными свойствами и линейным профилем скорости ($u' = VL^{-1}y'$, $v' = 0$) в направлении x' около бесконечной пластины $y' = 0$, на поверхности которой протекают гетерогенные каталитические реакции первого порядка. В полуплоскости $y' = 0$, $x' < 0$ поверхность считается некаталитической, а в полуплоскости $y' = 0$, $x' > 0$ — обладающей конечной каталитической способностью.

Уравнение диффузии (совпадающее по форме с уравнением теплопроводности) и граничные условия в этом случае имеют вид

$$(1.1) \quad y \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$(1.2) \quad x \rightarrow -\infty, \quad \forall y \text{ и } y \rightarrow \infty, \quad \forall x: c \rightarrow c_0$$

$$y = 0, \quad x < 0: \frac{\partial c}{\partial y} = 0; \quad y = 0, \quad x > 0: \frac{\partial c}{\partial y} = kc;$$

$$k = \left(\frac{L}{VD}\right)^{1/2} k'$$

Здесь k' — константа скорости гетерогенной рекомбинации на поверхности; безразмерные переменные x , y связаны с размерными x' , y' следующим образом:

$$x' = \left(\frac{DL}{V}\right)^{1/2} x, \quad y' = \left(\frac{DL}{V}\right)^{1/2} y$$

(D — коэффициент диффузии, c — концентрация).

Рассмотрим случай $k \ll 1$. Тогда решение задачи можно искать в виде

$$(1.3) \quad c = c_0 (1 - kf + \dots)$$

Для функции $f(x, y)$ получим уравнение, идентичное (1.1), а граничные условия примут вид

$$(1.4) \quad x \rightarrow -\infty, \quad \forall y \text{ и } y \rightarrow \infty, \quad \forall x: f \rightarrow 0$$

$$y = 0, \quad x < 0: \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad y = 0, \quad x > 0: \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

Задача эллиптическая, поэтому система граничных условий (1.4) должна быть дополнена условиями при $x \rightarrow \infty, \forall y$.

Будем искать ограниченное решение задачи $f \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty, \forall y$. Для этого вместо последнего граничного условия (1.4) рассмотрим условие

$$(1.5) \quad y = 0, x > 0: \partial f / \partial y = -e^{-\delta x}, \delta > 0$$

Вводится некоторый положительный параметр δ , который можем положить сколь угодно малым (путем введения этого параметра можно будет избавиться от особенности, возникающей при обходе точки ветвления при нахождении функции $G_+(\alpha)$). После решения задачи в окрестности разрыва устремим δ к нулю и найдем решение, соответствующее последнему граничному условию (1.4).

Таким образом, математическая формулировка задачи следующая: требуется найти функцию $f(x, y)$, удовлетворяющую уравнению и граничным условиям:

$$(1.6) \quad y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$(1.7) \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty: f \rightarrow 0$$

$$y = 0, x < 0: \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad y = 0, x > 0: \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-\delta x}, \delta > 0$$

Сделаем еще следующее предположение о поведении решения при $x \rightarrow -\infty$:

$$(1.8) \quad |f| \leq A e^{ax}$$

для некоторого $a > 0$. Это предположение будет в дальнейшем проверено после нахождения решения задачи.

2. Введем преобразование Фурье по x

$$(2.1) \quad \Phi(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad \alpha = \sigma + i\tau$$

Оно определяет функцию $\Phi(\alpha, y)$, аналитическую по переменной α в полосе $0 < \text{Im} \alpha < a$ в силу условия (1.8) и ограниченности f при $x \rightarrow +\infty$, причем обратное преобразование имеет вид

$$(2.2) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau' - \infty}^{i\tau' + \infty} \Phi(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad 0 < \tau' < a$$

Сделав замену

$$(2.3) \quad s = e^{-i\pi/3} (i\alpha)^{1/2} (y + i\alpha)$$

для функции $\Phi(\alpha, s)$ из (1.6) получим уравнение Эйри

$$(2.4) \quad d^2\Phi/ds^2 - s\Phi = 0$$

Надо выбрать решение этого уравнения, убывающее ($\Phi \rightarrow 0$) при $y \rightarrow \infty$. Это решение выражается через функцию Эйри $\text{Ai}(s)$ [4] (считаем, что $\alpha^{1/2} = \sigma^{1/2}$ на действительной положительной оси)

$$(2.5) \quad \Phi(\alpha, y) = A(\alpha) \text{Ai}(s), \quad \text{Ai}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(ts + \frac{t^3}{3}\right) dt$$

причем $-\pi/3 < \arg s < \pi/3$ (в этом интервале функция Эйри экспоненциально убывает при $s \rightarrow \infty$). Отсюда следует, что

$$-\pi/2 < \arg \alpha < 3\pi/2$$

т. е. плоскость α должна иметь разрез вдоль отрицательной мнимой оси.

Для определения $A(\alpha)$ продифференцируем (2.5) по y и запишем полученное соотношение при $y = 0$

$$(2.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\alpha, 0) = A(\alpha) \text{Ai}'(z) e^{-i\pi/6} \alpha^{1/3}, \quad z = s|_{y=0} = e^{i\pi/3} \alpha^{1/3}$$

Учитывая граничные условия (1.7), получим выражение для левой части первого равенства (2.6), после чего найдем

$$(2.7) \quad A(\alpha) = e^{i\pi/6} [\sqrt{2\pi} (i\alpha - \delta) \alpha^{1/3} \text{Ai}'(z)]^{-1}$$

Подставив это выражение в (2.5), определим $\Phi(\alpha, y)$, а затем из (2.2) можно найти $f(x, y)$.

Разобьем функцию $\Phi(\alpha, y)$ на две функции:

$$(2.8) \quad \Phi(\alpha, y) = \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y)$$

$$(2.9) \quad \Phi_{\pm}(\alpha, y) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pm\infty} f(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

Определим теперь функции $\Phi_+(\alpha, 0)$ и $\Phi_-(\alpha, 0)$ при помощи метода Винера — Хопфа, что даст возможность найти асимптотику поведения решения при $x \rightarrow \pm 0$ и $x \rightarrow \pm \infty$. Запишем (2.8) при $y = 0$

$$(2.10) \quad \Phi_+(\alpha, 0) + \Phi_-(\alpha, 0) = G(\alpha)$$

$$(2.11) \quad G(\alpha) = \frac{e^{i\pi/2} g(z)}{\sqrt{2\pi} \alpha (\alpha + i\delta)}, \quad g(z) = \frac{K_{1/3}(2/3 z^{3/2})}{K_{2/3}(2/3 z^{3/2})}$$

(здесь учтено выражение функции Эйри через модифицированную функцию Бесселя второго рода порядка $1/3$ [4]: $\text{Ai}(z) = \pi^{-1} (z/3)^{1/2} K_{1/3}(2/3 z^{3/2})$ и правила дифференцирования бесселевых функций [5]).

Требуется из функционального уравнения (2.10) определить функции $\Phi_+(\alpha, 0)$ и $\Phi_-(\alpha, 0)$, аналитические соответственно в полуплоскостях $\text{Im } \alpha > 0$ и $\text{Im } \alpha < a$ (в силу (1.7) и (1.8)) и стремящиеся к нулю при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в своих областях аналитичности.

Пусть функцию $G(\alpha)$ можно представить в виде

$$(2.12) \quad G(\alpha) = G_+(\alpha) + G_-(\alpha)$$

где функции $G_+(\alpha)$ и $G_-(\alpha)$ — аналитические в полуплоскостях $\text{Im } \alpha > 0$ и $\text{Im } \alpha < a$ соответственно. Тогда, применяя рассуждения метода Винера — Хопфа [6], получим, что

$$(2.13) \quad \Phi_+(\alpha, 0) = G_+(\alpha), \quad \Phi_-(\alpha, 0) = G_-(\alpha)$$

(Для выполнения (2.13) необходимо, чтобы $G_-(\alpha) \rightarrow 0$ и $G_+(\alpha) \rightarrow 0$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$; это будет показано далее, после нахождения конкретного вида G_+ и G_- .)

Итак, для определения функций Φ_+ и Φ_- надо найти представление $G(\alpha)$ в виде (2.12).

3. Определим функции G_+ и G_- . Функции $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$ в плоскости α имеют бесконечное число простых нулей на положительной мнимой оси и точку ветвления $\alpha = 0$ (плоскость α разрезана вдоль отрицательной мнимой оси). Выберем параметр a в (1.9) меньшим по величине, чем расстояние от начала координат до первого нуля как функции $K_{1/3}$, так и $K_{2/3}$. Тогда функция $G(\alpha)$ будет аналитична в области $0 < \text{Im } \alpha < a$ ($G(\alpha)$ имеет бесконечное число простых полюсов на положительной мнимой оси, простой полюс $\alpha = -i\delta$ на отрицательной мнимой оси и точку ветвления $\alpha = 0$). Кроме того, $|G(\alpha)| = O(|\alpha|^{-2})$, $|\alpha| \rightarrow \infty$. Следо-

вательно, [6], функцию $G(\alpha)$ можно представить в виде суммы

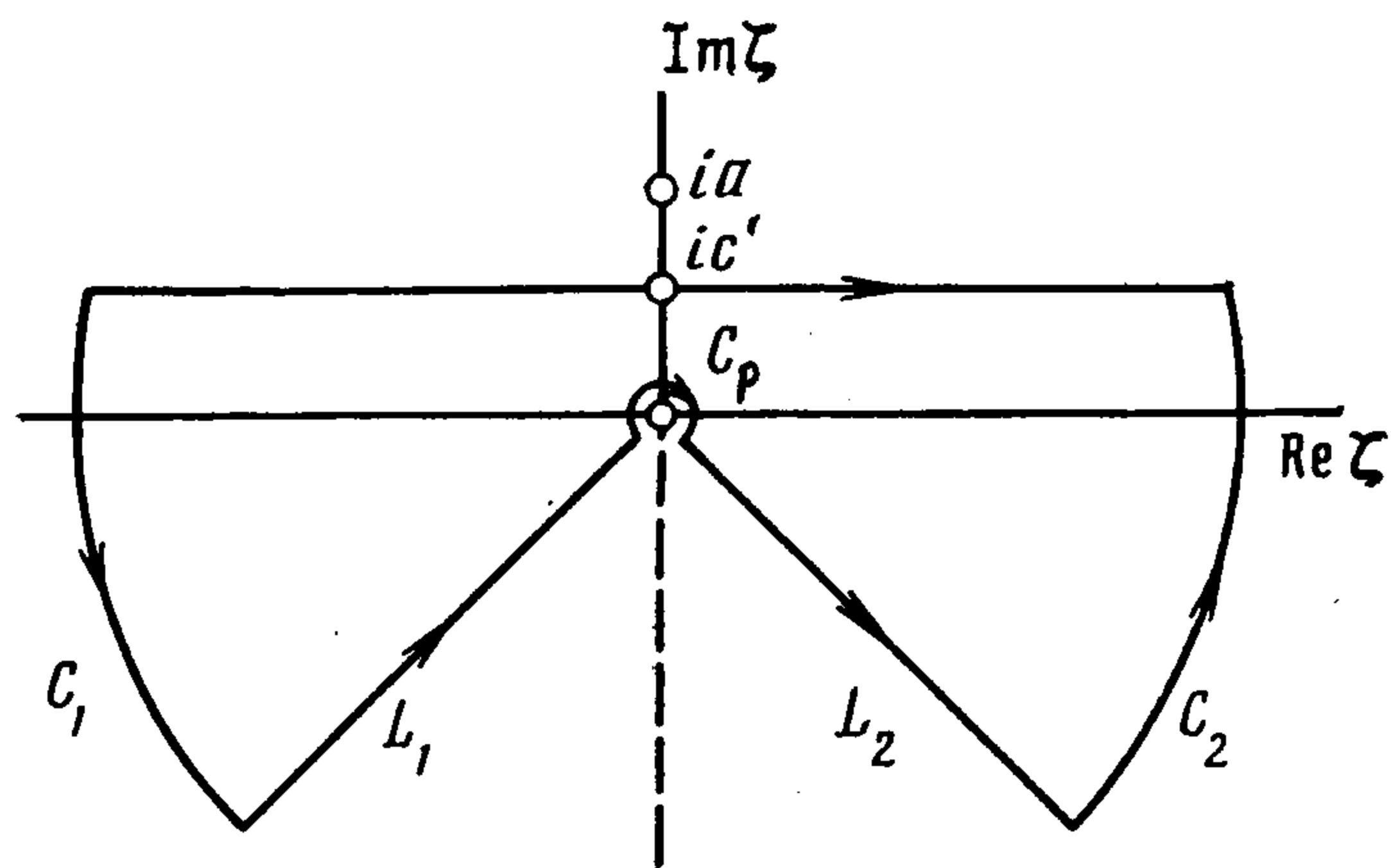
$$(3.1) \quad G(\alpha) = G_+(\alpha) + G_-(\alpha)$$

$$G_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic'}^{\alpha+ic'} \frac{G(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta, \quad G_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha+id}^{\infty+id} \frac{G(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta$$

$$0 < c' < \text{Im } \alpha < d < a$$

где функции $G_+(\alpha)$, $G_-(\alpha)$ — аналитические соответственно в верхней ($\text{Im } \alpha > 0$) и нижней ($\text{Im } \alpha < a$) полуплоскостях.

Рассмотрим функцию $G_+(\alpha)$. Продеформируем путь интегрирования в интеграле (3.1) для $G_+(\alpha)$ так, чтобы он проходил по двум прямым: L_1 ($\arg \alpha = 5\pi/4$) и L_2 ($\arg \alpha = -\pi/4$) (фигура). За-мкнем путь интегрирования двумя дугами большого радиуса R :



C_1 ($\alpha = Re^{i\theta}$, $\pi < \theta < 5\pi/4$) и C_2 ($\alpha = Re^{i\theta}$, $-\pi/4 < \theta < 0$) и дугой окружности C_ρ малого радиуса ρ (обход точки ветвления). Можно показать, что

$$\int_{C_1+C_2} \frac{G(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta \rightarrow 0 \text{ как } R^{-2} \text{ при } R \rightarrow \infty$$

$$\int_{C_\rho} \frac{G(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta \rightarrow 0 \text{ как } \rho^{2/3} \text{ при } \rho \rightarrow 0$$

Подынтегральная функция аналитична внутри замкнутого контура, ограниченного C_1 , L_1 , C_ρ , L_2 , C_2 и исходной прямой интегрирования, следовательно

$$(3.2) \quad G_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{L_1+L_2} \frac{g(z(\zeta))}{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta+id)} d\zeta$$

Сделаем замену переменных

$$\text{на } L_2: \zeta = re^{-i\pi/4}, \quad g(z) = g(r^{1/2}) = K_{1/2}(2/3r^2)/K_{3/2}(2/3r^2)$$

$$\text{на } L_1: \zeta = re^{i5\pi/4}, \quad g(z) = -g(r^{1/2})$$

После преобразований интеграл (3.2) можно привести к виду

$$(3.3) \quad G_+(\alpha) = Q(\alpha), \quad Q(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{g(r^{1/2}) [2t\delta + \sqrt{2}r(\delta-t)]}{S(t,r)R(r)} dr$$

$$S(t,r) = r^2 + \sqrt{2}rt + t^2, \quad R(r) = r^2 - \sqrt{2}\delta r + \delta^2$$

$$t = -i\alpha$$

Функция $G_-(\alpha)$ находится аналогичным способом. Учитывая при переходе от интегрирования по прямой $\text{Im } \zeta = d$ к интегрированию по прямым L_1 и L_2 , что подынтегральная функция имеет полюс первого порядка в области, ограниченной контуром C_1 , L_1 , C_ρ , L_2 , C_2 и прямой $\text{Im } \zeta = d$, получим

$$(3.4) \quad G_-(\alpha) = G(\alpha) - Q(\alpha)$$

4. Найдем асимптотику решения при $|x| \gg 1$, $x > 0$. Получим выражение для $G_+(\alpha)$ при $|\alpha| \ll 1$. Учитывая разложение для функции

$g(r^{1/3})$ при малых r , представим g следующим образом:

$$(4.1) \quad g(r^{1/3}) = \frac{r^{2/3}}{p} (1 - pr^{1/3} + O(r^{2/3})) = \\ = \frac{r^{2/3}}{p} (1 - pr^{1/3}) + N_1(r) = \frac{r^{2/3}}{p} + N_2(r), \quad p = 3^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Подставляя (4.1) в (3.3), представим $G_+(\alpha)$ в виде

$$(2\pi)^{3/2} G_+(\alpha) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ I_1 = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{2t\delta(1 - pr^{1/3})}{r^{1/3} S(t, r) R(r)} dr, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{2t\delta N_1(r)}{S(t, r) R(r)} dr \\ I_3 = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}(\delta - t)r}{r^{1/3} S(t, r) R(r)} dr, \quad I_4 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}(\delta - t)r N_2(r)}{S(t, r) R(r)} dr$$

и произведем оценку членов. Учитывая представление $1/S(t, r) = r^{-2} - \sqrt{2}tr^{-3} + (t^2r^{-2} + \sqrt{2}t^3r^{-3})/S$, получим

$$I_1 = \frac{2\pi}{p\delta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) t^{-1/3} + \frac{4\pi}{p\delta^2 \sqrt{3}} t^{2/3} + \frac{2t}{\delta} \ln t + O(t), \quad I_2 = O(t) \\ I_3 = \frac{2\pi}{p\delta \sqrt{3}} t^{-1/3} - \frac{2\pi}{p\delta^2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) t^{2/3} + C_1 + O(t), \quad I_4 = C_2 + O(t) \\ C_1 = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{2 - \sqrt{2}r/\delta}{r^{1/3} R(r)} dr, \quad C_2 = \sqrt{2} \delta \int_0^\infty \frac{g(r^{1/3}) - r^{2/3}/p}{r R(r)} dr$$

Запишем окончательное выражение

$$(4.2) \quad G_+(\alpha) = \frac{t^{-1/3}}{p\delta \sqrt{2\pi}} + \frac{C_1 + C_2}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{t^{2/3}}{p\delta^2 \sqrt{2\pi}} + \frac{t \ln t}{\delta \pi \sqrt{2\pi}} + O(t)$$

Для функции $f(x) \equiv f(x, 0)$ ($x > 0$), используя теорему 41.1 [7], можно получить

$$(4.3) \quad f(x) = \frac{3^{1/3} \Gamma(1/3)}{2\pi\delta} x^{-2/3} + \frac{3^{-5/3} \Gamma(1/3)}{\pi\delta^2} x^{-5/3} + O(x^{-2} \ln x)$$

Концентрация на поверхности при этом определяется по формуле (1.3).

5. Найдем асимптотику решения вблизи точки разрыва, т. е. найдем решение при $|x| \ll 1$, $x \geq 0$. Получим сначала выражение для $G_+(\alpha)$ при $|\alpha| \gg 1$.

Преобразуем интеграл (3.3) аналогично [8], учитывая разложение

$$g(r^{1/3}) = 1 - 1/4 r^{-2} + O(r^{-4}), \quad r \gg 1 \\ \frac{1}{S(t, r)} = \frac{1}{t^2} - \frac{\sqrt{2}r}{t^3} + \frac{T(t, r)}{t^3}, \quad T(t, r) = \frac{tr^2 + \sqrt{2}r^3}{S(t, r)} \\ (5.1) \quad (2\pi)^{3/2} G_+(\alpha) = \frac{2\delta}{t} J_{-1} - \frac{\sqrt{2}\delta}{t^2} J_0 - \frac{\sqrt{2}}{t} J_0 + \frac{2\delta}{t^2} \int_0^\infty \frac{T(t, r) P(r)}{r} dr - \\ - \frac{2(\delta - t)}{t^3} \int_0^1 P(r) r dr - \frac{2(\delta - t)}{t^3} \int_1^\infty \frac{g(r^{1/3}) - 1}{R(r)} r dr + \\ + \frac{\sqrt{2}(\delta - t)}{t^3} \int_0^1 T(r) P(r) dr + \\ + \frac{\sqrt{2}(\delta - t)}{t^3} \int_1^\infty \frac{g(r^{1/3}) - 1}{R(r)} T(r, t) dr - \frac{2(\delta - t)}{t^3} \int_1^\infty \frac{r^{-1/2} \sqrt{2} T(t, r)}{R(r)} dr$$

$$P(r) = \frac{g(r^{1/3})}{R(r)}, \quad J_n = \int_0^\infty P(r) r^n dr$$

Четвертое, седьмое и восьмое слагаемые имеют порядок t^{-3} , пятое и шестое слагаемые можно представить в виде суммы членов соответственно порядка t^{-2} и t^{-3} . Последнее слагаемое можно привести к виду

$$\frac{1}{t^2} \left[\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} - \delta}{\delta} - \ln(1 - \sqrt{2}\delta + \delta^2) \right] + 2 \frac{\ln t}{t} - 4\delta \frac{\ln t}{t^3} + O(t^{-3})$$

Получим окончательное выражение для $G_+(\alpha)$ при $|\alpha| \gg 1$, отбрасывая в (5.1) члены $O(t^{-3})$

$$(5.2) \quad G_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{b_1}{-i\alpha} + b_2 \frac{\ln(-i\alpha)}{(i\alpha)^2} + \frac{b_3}{(i\alpha)^2} + b_4 \frac{\ln(-i\alpha)}{(-i\alpha)^3} \right] + O(|\alpha|^{-3})$$

$$b_1 = 2\delta J_{-1} - \sqrt{2} J_0, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = \int_0^1 P(r) r dr + 2 \int_1^\infty \frac{g(r^{1/3}) - 1}{R(r)} dr - \sqrt{2} \delta J_0 + \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} - \delta}{\delta} - \ln(1 - \sqrt{2}\delta + \delta^2), \quad b_4 = -4\delta$$

Зная преобразование Фурье $G_+(\alpha)$ от $f(x)$ ($x > 0$) при $|\alpha| \gg 1$, найдем оригинал $f(x)$ при $x \ll 1$, воспользовавшись аналогом леммы Ватсона в случае, когда функция имеет логарифмическую особенность [4]:

$$(5.3) \quad f(x) = \frac{b_1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} x \ln x + O(x^2 \ln x), \quad x > 0$$

Перейдем в этом выражении к пределу при $\delta \rightarrow 0$, т. е. найдем решение, соответствующее граничным условиям (1.4).

Учитывая разложение (4.1) функции $g(r^{1/3})$ при малых r , представим b_1 в виде суммы нескольких слагаемых аналогично представлению $G_+(\alpha)$ в п. 4. После вычисления соответствующих интегралов и перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ получим

$$(5.4) \quad f(x) = a_1 - \pi^{-1} x \ln x, \quad |x| \ll 1, \quad x > 0$$

$$(5.5) \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty \frac{r^{2/3}/p - g(r^{1/3})}{r^2} dr \approx 0,8822$$

Асимптотика решения при $x < 0$, $|x| \ll 1$ определяется аналогично и соответствует (5.4) при замене $\ln x$ на $\ln(-x)$.

Концентрация на поверхности определяется по формуле

$$(5.6) \quad c/c_0 = 1 - k(0,8822 - \pi^{-1} x \ln |x|), \quad |x| \ll 1, \quad k \ll 1$$

Проведем сравнение с решением, которое дает теория диффузионного пограничного слоя. В погранслоном приближении, без учета продольной диффузии, исходную задачу запишем в виде ($x > 0$)

$$y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \quad y = 0: \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1; \quad y \rightarrow \infty: \quad f \rightarrow 0$$

Эта задача имеет решение

$$f(x, y) = -y + 3^{-2/3} \Gamma(2/3) \left[\exp\left(-\frac{y^3}{9x}\right) x^{1/3} + \frac{y}{3} \int_0^{y/x^{1/3}} \xi \exp\left(-\frac{\xi^3}{9}\right) d\xi \right]$$

$$f(x, 0) = 3^{-2/3} \Gamma(2/3) x^{1/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 3^{-5/3} \Gamma(2/3) x^{-2/3}$$

Видно, что как истинное (с учетом продольной диффузии) значение искомой функции на поверхности при $x = 0$: $f \approx 0,8822$ отличается от значения, даваемого теорией

пограничного слоя $f = 0$, так и истинный характер ее поведения при $x \rightarrow +0$: $\partial f / \partial x \sim |\ln x|$ отличается от зависимости, даваемой погранслоем решением: $\partial f / \partial x \sim x^{-1/3}$.

Сравнение значения концентрации на поверхности при $x = 0$ с решением, полученным численным методом [1], показало, что разница между результатами не превышает 5%.

6. Осталось проверить сделанное в п. 1 предположение (1.8) о характере убывания решения при $x \rightarrow -\infty$. Достаточно провести проверку при $y = 0$.

Преобразование Фурье от $f(x)$ при $x < 0$ можно записать в виде

$$(6.1) \quad G_-(\alpha) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{id-\infty}^{id+\infty} G^*(\zeta) d\zeta$$

$$G^*(\zeta) = \frac{K_{1/3}({}^{2/3}\zeta^2 e^{i\pi/2})}{\zeta(\zeta + i\delta)(\zeta - \alpha) K_{2/3}({}^{2/3}\zeta^2 e^{i\pi/2})}, \quad \text{Im } \alpha < d < a$$

Дополним путь интегрирования в верхней полуплоскости дугой полуокружности C_R большого радиуса R : $|\zeta - id| = R$. Можно показать, что

$$\int_{C_R} G^* d\zeta \rightarrow 0 \text{ как } R^{-2} \text{ при } R \rightarrow \infty$$

Функция $G^*(\zeta)$ мероморфна в полуплоскости $\text{Im } \zeta \geq d$, поэтому

$$(6.2) \quad \int_{id-\infty}^{id+\infty} G^*(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}[G^*(\zeta, \zeta_k)]$$

Здесь ζ_k — простые полюсы функции $G^*(\zeta)$ или нули функции $K_{2/3}({}^{2/3}\zeta^2 e^{i\pi/2})$, так что вычеты функции G^* в этих точках конечны.

Из соотношения, вытекающего из правил дифференцирования бesselевых функций

$$\eta K_{2/3}'(\eta) + {}^{2/3} K_{2/3}(\eta) = -\eta K_{1/3}(\eta)$$

следует, что

$$(6.3) \quad \text{Res}[G^*(\zeta, \zeta_k)] = K_{1/3}(\eta_k) \left[\zeta_k(\zeta_k + i\delta)(\zeta_k - \alpha) K_{2/3}'(\eta_k) \frac{d\eta}{d\zeta}(\zeta_k) \right]^{-1} =$$

$$= 3i [4\zeta_k^2(\zeta_k + i\delta)(\zeta_k - \alpha)]^{-1}$$

На основании (6.1) — (6.3) получим

$$G_-(\alpha) = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k^2(s_k + \delta)(s_k + i\alpha)}, \quad \zeta_k = is_k, \quad s_k = \sqrt{{}^{3/2}t_k}$$

где $-it_k$ — нули бesselевой функции $K_{2/3}(\eta)$, $t_k > 0$ — действительные числа, причем $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$

Искомая функция $f(x)$ при $x < 0$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty} G_-(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad 0 < \tau' < a$$

Функция $G_-(\alpha)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в верхней полуплоскости и имеет бесконечное число простых полюсов на положительной мнимой оси в точках $\alpha_k = is_k$. Тогда

$$f(x) = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{s_k x}}{s_k^2(s_k + \delta)} < \frac{3}{4} \frac{1}{s_1^3} \sum_{k=1}^{\infty} e^{s_k x}$$

откуда при $x \rightarrow -\infty$

$$|f| < A e^{(s_1 - \varepsilon)x}, \quad A \geq \frac{3}{4s_1^3}$$

где ε — произвольная малая конечная положительная величина.

Итак, можно положить a в формуле (1.8) равным любому положительному числу, строго меньшему s_1 ($s_1 \approx 1,014$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Крупа В. Г. Об учете продольной диффузии в окрестности разрыва каталитических свойств поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 99—105.
2. Springer S. G., Pedley T. J. The solution of heat transfer problems by the Wiener — Hopf technique. I. Leading edge of a hot film // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1973. V. 333. No. 1594. P. 347—362.
3. Попов Д. А. Задача с разрывными граничными условиями и приближение диффузионного погранслоя // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 109—117.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука. 1977. 368 с.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит. 1949. 799 с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 279 с.
7. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука. 1965. 287 с.
8. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1968. V. 306. No. 1486. P. 275—290.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1986