Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 532.595:534

ВОЗБУЖДЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОМЕМБРАННОЙ КАМЕРЕ

Иванов В. П.

Ставится и решается задача о возбуждении заданного поля скоростей и ускорений идеальной жидкости, заполняющей малую по сравнению с длиной волны камеру. Колебательное течение возбуждается гибкими мембранами, расположенными на стенках камеры. Колебания мембран осуществляются периодическим впрыском и отводом жидкости в подмембранные отсеки.

Низкочастотное возбуждение жидкофазной среды в объемах, линейные размеры которых меньше длины волны возбуждения, используется для интенсификации ряда технологических процессов [1]. При этом важно обеспечить не только заданные энергетические характеристики колебательного течения, но и наперед заданное распределение поля скоростей и ускорений течения жидкой фазы.

1. Прямоугольная камера $D_0 = \{x, y, z: 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, 0 < z < L_3\}$ заполнена идеальной жидкостью плотности ρ_1. На стенках камеры имеются люки для загрузки и выгрузки, интерпретируемые как свободные поверхности жидкости, и смонтированы мембраны. В подмембранные объемы D_n $(n = 1, \ldots, 2N)$ периодически с периодом $2\pi/\omega$, где ω — круговая частота, впрыскивается и отводится идеальная жидкость плотности ρ_2. Переменное давление периодического течения жидкости в областях D_n возбуждает колебания гибких мембран. Эти колебания трансформируются в периодическое колебательное течение жидкости в области D_0. Предполагается, что $\omega L c^{-1} \ll 1$, где L — характерный размер камеры, c — скорость звука в жидкости плотности ρ_1, $vc_1^{-1} \ll 1$, где v и c_1 — модуль скорости жидкости и скорость звука в жидкости в подмембранных отсеках D_n.

Потенциал φ поля скоростей в области D_0 является решением следующей задачи:

$$\Delta\varphi = 0; \ \partial\varphi/\partial n = 0 \text{ на } \Gamma \tag{1.1}$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали, Γ — часть границы D_0, образованная жесткими стенками, $\partial\varphi/\partial z = -i\omega Z_j$, $Z_j = i\omega g^{-1}\varphi$ на свободных поверхностях $\Gamma_{1j} = \{x, y, z: 0 < x < L_1, l_{1j} < y < l_{2j}, j = 0, 1, l_{10} = 0, l_{21} = L_2, z = L_3\}$, где Z_j — отклонение свободной поверхности от положения равновесия, $\partial\omega/\partial n = -i\omega w_n$, $p_n = -q_n$ на срединной поверхности n-й мембраны, q_n — нагрузка на срединную поверхность мембраны, w_n — нормальная составляющая прогиба n-й мембраны, p — давление на срединной поверхности со стороны жидкости плотности ρ_1.

В подмембранных отсеках D_n потенциалы φ_n скоростей течений жидкости удовлетворяют уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi_n = \sum_{m=1}^{M_n} Q_{nm} e^{i\theta_n} \delta(x - \xi_{0m}^n, \ y - \eta_{0m}^n, z - \zeta_{0m}^n) e^{-i\omega t} \tag{1.2}$$

$$n = 1, \ldots, 2N$$

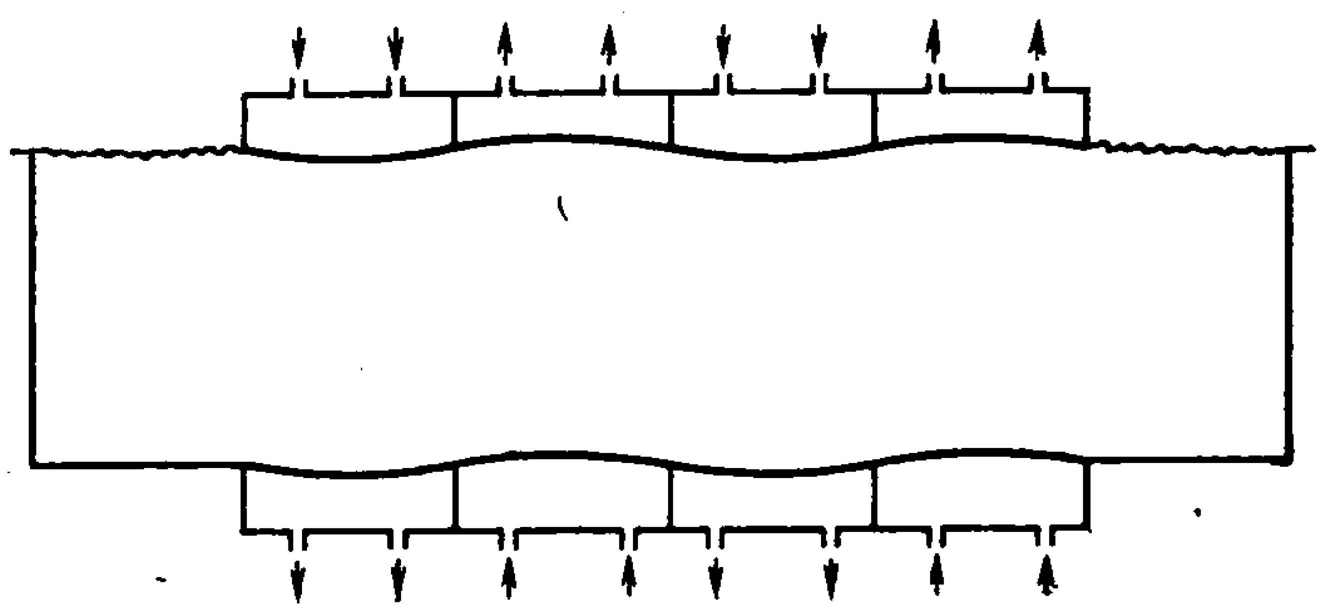
где $(\xi_{0m}^n,\ \eta_{0m}^n,\ \zeta_{0m}^n)$ — координаты источников с расходами Q_{nm} и фазами запаздывания θ_n, $\delta(x)$ — дельта-функция, t — время, являющееся параметром задачи. На жестких стенках выполняется условие непротекания, на мембранах — условие сшивания: $\partial\varphi_n/\partial n = -i\omega w_n$, $p_n = -q_n^1$, где p_n и q_n^1 — давление и нагрузка на срединную поверхность мембраны со стороны второй жидкости.

Давление в областях D_0 и D_n ($n = 1, \ldots, 2N$) определим из линеаризованных уравнений движения

$$
\begin{gathered}
p - p_0 - \rho_1 g(L_3 - z) = i\omega\rho_1\varphi(x, y, z)e^{-i\omega t} \\
p_n - p_{n0} - \rho_2 g(L_n - z) = i\omega\rho_2\varphi_n(x, y, z)e^{-i\omega t},\ L_n = \max_{(x,y,z)\in D_n} z
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

(p_0, p_{n0} — давление в рабочей камере и n-м отсеке при нулевом прогибе мембран, g — вертикальная составляющая ускорения свободного падения).

Рассмотрим задачу о возбуждении в некоторой подобласти области D_0 колебательного течения с заданной вертикальной скоростью и ускорением, по модулю не меньшим наперед заданной величины. Для воз-



Фиг. 1

буждения такого течения расположим мембраны на нижней и верхней стенках рабочей камеры строго одну под другой, причем свободные поверхности Γ_{1j} расположены над жесткой частью нижней стенки (фиг. 1).

Известно, что при малых перемещениях мембран отлична от нуля только вертикальная составляющая прогиба w_n, которая в области Γ_n, образованной недеформированной срединной поверхностью n-й мембраны и ограниченной кусочно-гладкой замкнутой кривой γ_n, удовлетворяет уравнениям [2]

$$
\begin{gathered}
(D\nabla^4 - \omega^2\rho\delta)w_n = p_n - p,\quad n = 1, \ldots, N \\
(D\nabla^4 - \omega^2\rho\delta)w_n = p - p_n,\quad n = N + 1, \ldots, 2N \\
\nabla^4 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2,\quad D = E\delta^3/[12(1-\nu^2)]
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

где N — число мембран на нижней (верхней) стенке рабочей камеры, δ, ρ, E, ν — толщина мембраны, плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала мембраны соответственно. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

Краевое условие на кривых γ_n запишем в виде

$$
w_n = 0,\ \mu_n = 0 \text{ на } \gamma_n
\tag{1.5}
$$

где μ_n — изгибающий момент в направлении нормали.

Будем считать далее, что области Γ_n ($n = 2, \ldots, N$) при $z = 0$ являются трансляцией области Γ_1 на n шагов длины l вдоль оси y, а область Γ_n ($n = N + 2, \ldots, 2N$) при $z = L_3$ — трансляцией области Γ_{N+1} на n шагов длины l вдоль оси y.

2. Пусть $\mathbf{V}^*(x, y, z)e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{a}^*(x, y, z)e^{-i\omega t}$ — наперед заданные поля скоростей и ускорений колебательного течения жидкости внутри рабочей камеры, которые реализуются некоторыми прогибами мембран w_n^* и удовлетворяют условиям

(2.1) $$|V_z(x, y, z)| \geqslant V^*, \quad |a_z^*(x, y, z)| \geqslant A^*; \, (x, y, z) \in D^* \subset D_0$$

Здесь D^* — объединение цилиндров $D^* = U_n D_n^*$ с основаниями Γ_n^*, являющимися подобластями Γ_n верхних и нижних мембран, а V^* и A^* — постоянные.

Поставим следующую задачу: выбрать координаты центров источников, их число и объемные расходы Q_{nm} так, чтобы в области D_0 поле распределения скорости V_z удовлетворяло условию

(2.2) $$\max_{x, y, z} |V_z(x, y, z) - V_z^*(x, y, z)| \leqslant \varepsilon, \quad (x, y, z) \in D^*$$

Поставленная задача служит примером обратной задачи колебательного течения жидкости в ограниченном объеме. Общая теория такого типа задач изложена в [3].

Обозначим $\varphi^*(x, y, z)$ потенциал скорости $V^*(x, y, z)$, а G — функцию Неймана для области D_0. Воспользовавшись формулой Грина и условиями сшивания на мембранах Γ_n, получим представление для потенциала φ^* через прогибы мембран w_n^*

(2.3) $$\varphi^* = -i\omega I^* + i\omega J^*$$

$$I^* = \sum_{n=1}^{N} \int_{\Gamma_n} w_n^* G\, ds - \sum_{n=N+1}^{2N} \int_{\Gamma_n} w_n^* G\, ds, \quad J^* = \sum_{j=0}^{1} \int_{\Gamma_{1j}} Z_j^* G\, ds$$

Поскольку на мембранах Γ_n $(n = 1, \ldots, 2N)$ выполняются условия $-i\omega w_n^* = V_{zn}^*$, то далее прогибы w_n^* будем считать известными, а потенциал φ^* определим по формуле

$$\varphi^* = \sum_{n=1}^{N} \int_{\Gamma_n} V_{zn}^* G\, ds - \sum_{n=N+1}^{2N} \int_{\Gamma_n} V_{zn}^* G\, ds + i\omega J^*$$

При этом отклонение свободной поверхности Z_j^* можно считать заданным, либо определять Z_j^* из системы интегральных уравнений

(2.4) $$Z_j^* + \omega^2 g^{-1} J^* = \omega^2 g^{-1} I^*, \quad j = 0, 1$$

Если $\{R_{ij}\}_{i,j}$ — разрешающее ядро системы интегральных уравнений (2.4), то отклонение свободной поверхности Z_j^* можно выписать в виде

(2.5) $$Z_j^* = -\omega^4 g^{-2} \sum_{i=0}^{1} \int_{\Gamma_{1i}} R_{ij} I^*\, ds + \omega^2 g^{-1} I^*$$

Пусть G_n — функция Неймана для области D_n. Потенциал скорости течения φ_n в области D_n вычислим по формуле

(2.6) $$\varphi_n(x, y, z) = \sum_{m=1}^{M_n} \exp(i\theta_n) Q_{nm} G_n(x, y, z, \xi_{0m}^n, \eta_{0m}^n, \zeta_{0m}^n) \pm$$

$$\pm i\omega I_n, \quad I_n = \int_{\Gamma_n} w_n G_n d_s$$

где верхний знак берется для $n = 1, \ldots, N$, нижний — для $n = N + 1, \ldots, 2N$.

Определим потенциал φ, возбуждаемый прогибами w_n, по формуле, аналогичной формуле (2.3), в которой w_n^* заменены на w_n. Подставив в систему (1.4) значения давлений, определенных по формулам (2.3) и (2.6) получим систему интегродифференциальных соотношений, связывающих прогибы мембран и отклонения свободных поверхностей Z_j с расходами Q_{nm}

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & (D\nabla^4 - \omega^2\rho\delta)w_k \mp \omega^2\rho_1 [J - I] + \omega^2\rho_2 I_k = \\
& = \pm i\omega\rho_2 \exp(i\theta_k) \sum_{m=1}^{M_k} Q_{km} G_k (\xi_k, \eta_k, \zeta_k, \xi_{0m}^k, \eta_{0m}^k, \zeta_{0m}^k) \\
& Z_j + \omega^2 g^{-1} (J - I) = 0, \ j = 0, 1 \\
& \zeta_k = 0, \ k = 1, \ldots, N; \ \zeta_k = L_3, \ k = N + 1, \ldots, 2N \\
& J = J^*, \ I = I^* \text{ при } w = w^*, \ z = z^*
\end{aligned}
$$

(верхний знак берется для $k = 1, \ldots, N$, нижний — для $k = N + 1, \ldots, 2N$). При известных расходах (2.7) — система интегродифференциальных и интегральных уравнений для определения прогибов w_k и отклонений Z_j. Однако в рассматриваемой задаче расходы Q_{km} неизвестны и подлежат определению.

Потребуем, чтобы искомые прогибы w_k равнялись прогибам $w_k{}^*$, тогда из последних уравнений системы (2.7) для значений $j = 0{,}1$ и из системы (2.4) следует, что $Z_j{}^* = Z_j$, и потенциал течения φ будет совпадать с наперед заданным потенциалом φ^* [4]. Подставим в систему соотношений (2.7) вместо прогибов w_n значения, равные $w_n{}^*$. Систему соотношений (2.7) в этом случае можно интерпретировать как приближение известной функции, стоящей в левой части (2.7), последовательностью известных функций

$$
\begin{aligned}
& G_{km} (\xi_k, \eta_k) = G_k (\xi_k, \eta_k, \zeta_k, \xi_{0m}^k, \eta_{0m}^k, \zeta_{0m}^k) \\
& m = 1, \ldots, M_k
\end{aligned}
$$

с неизвестными коэффициентами Q_{km}. Поскольку система функций G_{km} линейно независима на Γ_k [5], то данная задача разрешима и коэффициенты наилучшего приближения Q_{km} определяются из уравнения

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & \sum_{m=1}^{M_k} Q_{km} \int_{\Gamma_k} G_{km} G_{kq}\, ds = b_{kq}, \quad q = 1, \ldots, M_k \\
& b_{kq} = \mp \omega^{-1}\rho_2^{-1} \exp(-i\theta_k) \int_{\Gamma_k} G_{kq} [(D\nabla^4 - \omega^2\rho\delta) w_k{}^* \mp \\
& \mp \omega^2\rho_1 (J^* - I^*) + \omega^2\rho_2 I^*{}_k]\, ds
\end{aligned}
$$

(верхний знак берется для $k = 1, \ldots, N$, нижний — для $k = N + 1, \ldots, 2N$).

Обозначим B оператор, определяемый интегродифференциальным выражением левой части системы (2.7) при $k = 1, \ldots, 2N$, в котором Z_j определены по формулам (2.5), заданный на множестве достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.5). Число источников M_k определим из условия

$$
\left\| Bw^* - \sum_{m=1}^{M_k} [\pm i\omega\rho_2 \exp(i\theta_k) Q_{km} G_{km}] \right\| \leqslant \| B \| \, \| w^* - w_* \|
$$

где w_* — прогиб, реализуемый заданным распределением источников с расходами Q_{km}. Предположим, что параметр ω не является собственной частотой колебаний системы мембраны — жидкость. Тогда выполняется оценка $\| w^* - w_* \| \leqslant \varepsilon_1 \| B \|^{-1} = \varepsilon$. Чтобы удовлетворить условию (2.1), необходимо знать распределение вертикальной составляющей поля скоростей построенного решения по координате z.

3. В качестве примера рассмотрим задачу о возбуждении заданного поля скоростей и ускорений жидкости в области $D_0 = \{0 < x < L,\ 0 < y < 6L,\ 0 < z < L/2\}$ для восьмимембранной камеры с размером мембран $L \times L$ и толщиной δ, расположенными одна над другой на нижней и верхней стенке камеры, и загрузочным и разгрузочным люками размером $L \times L$, расположенными на верхней стенке.

Для того чтобы определить класс функций $\mathbf{V}^*(x, y, z)$ и $\mathbf{a}^*(x, y, z)$, для которых существует решение задачи о возбуждении заданного поля, удовлетворяющего условиям (2.1), определим структуру поля скоростей и ускорений в зависимости от вида прогиба мембран w_n. Другими словами, решим сначала прямую задачу, когда в уравнении (1.2) параметр $M_n = 1$, т. е. имеется один источник с расходом $Q_n = Q$ и $\xi_{0m}^n = L/2$, $\eta_{0m}^n = L/2 + nL$, $\zeta_{0m}^n = -h$, $n = 1, \ldots, 4$, $\zeta_{0m}^n = L/2 + h$, $n = 5, \ldots, 8$. Краевые условия (1.5) перепишем для данного случая в форме

(3.1) $$w_n = \partial^2 w_n/\partial x^2 = 0 \text{ при } x = 0,\ L$$

$$w_n = \partial^2 w_n/\partial y^2 = 0 \text{ при } y = nL,\ (n+1)L \text{ для } n = 1, \ldots, 4$$

$$y = (n-4)L,\ (n-3)L \text{ для } n = 5, \ldots, 8$$

Сделаем в системе (2.7) замену переменных $x_1 = x/L$, $y_1 = y/L$, $z_1 = z/L$ и введем обозначения $w_{n1} = w_n/\delta$, $Z_{j1} = Z_j/\delta$, $G^1 = LG$, $G_n{}^1 = LG_n$, $K^4 = L^4\omega^2\rho\delta/D$. В целях упрощения обозначений далее индекс единица опустим.

Будем искать решение системы интегродифференциальных уравнений (2.7) методом Бубнова — Галеркина. В силу краевых условий (3.1) прогибы нижних и верхних мембран представим в виде

(3.2) $$w_n = \sum_{q,\, m=1}^{N_n} A_{qm}^n \sin \pi q\xi \sin \pi m\eta_n$$

$(\eta_n = \eta - n$ для $n = 1, \ldots, 4$, $\eta_n = \eta - (n-4)$ для $n = 5, \ldots, 8)$

а отклонение свободной поверхности — в виде [6]

(3.3) $$Z_j = \sum_{q,\, m=1}^{N} C_{qm}^j \cos \pi q\xi \cos \pi m\eta_j, \quad \eta_j = \eta - 5j, \quad j = 0, 1$$

Подставим (3.2) и (3.3) в систему (2.7). Из условий ортогональности получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_{qm}^n и C_{qm}^n, решение которой существует по крайней мере для низкочастотного возбуждения.

Рассмотрим случай низкочастотного возбуждения, когда $\omega < \omega_1$. Пусть основной вклад в распределение поля скоростей вносит первая гармоника прогиба w_n. В этом случае амплитуду $A_{11}{}^n$ можно определить из условия разрешимости внутренней задачи Неймана для области D_n:

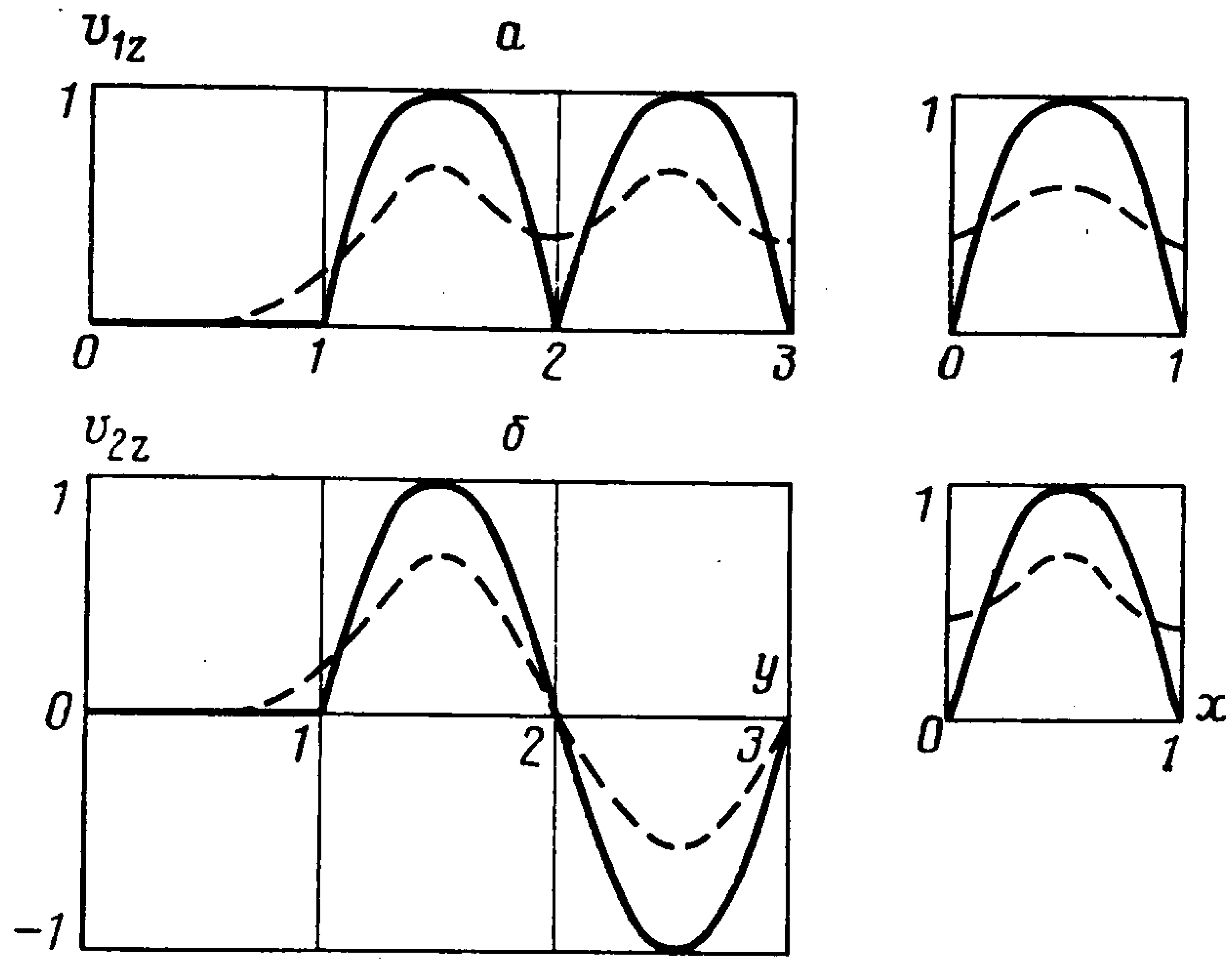
$$A_{11}{}^n = A_{11}^{n+4},\ A_{11}{}^n = i\pi^2 \exp(i\theta_n)\, Q\, [4\omega L^2\delta]^{-1},\ n = 1, \ldots, 4$$

$$C_{11}{}^j = 0,\ j = 0{,}1$$

Первая собственная частота колебаний жидкости в области D_0 определяется методом Бубнова—Галеркина по формуле

$$\omega_1 = \frac{2\pi^2}{L^2}\left(\frac{D}{\rho\delta}\right)^{1/2}\left\{1 - \frac{16^2\rho_1 L}{\pi^5\rho\delta}\sum_{n,\, m=0}^{\infty}(2n+1)^2(-1)^m\cos^2 \times\right.$$

$$\times \frac{\pi(2m+1)}{12}\cos\frac{\pi(2m+1)}{4}\,[(2n+1)^2 - 4]^{-2}\,[1 - (2m + {}^1/_6)^2]^{-1} \times$$



Фиг. 2

$$\times \sin^2\frac{\pi(2m+1)}{6}\left[(2n+1)^2+(2m+{}^1/_6)^2\right]^{-1/2}\mathrm{th}\left\{\frac{\pi}{4}\left[(2n+1)^2+(2m+{}^1/_6)^2\right]^{1/2}\right\}^{-1/2}$$

Потенциал поля скоростей вычисляется по формулам (2.2), (2.3), в которых положено $m,\ q = 1$

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{16i\omega L\delta}{\pi^3}\sum_{q=1}^{4} A_{11}{}^{q}\sum_{n,\,m=0}^{\infty}{}^{*}\cos 2\pi nx\cos\frac{\pi my}{6}\times$$
$$\times\cos\frac{\pi m(2q+1)}{12}\left\{(1+\delta_{0n})(1+\delta_{0m})(4n^2-1)\left[1-\left(\frac{m}{6}\right)^2\right]\right\}^{-1}\times$$
$$\times\cos\frac{\pi m}{12}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\pi(1-4z)}{2}\left\{n^2+\left(\frac{m}{12}\right)^2\right\}^{1/2}\right]\times$$
$$\times\left[(12n)^2+m^2\right]^{-1/2}\mathrm{ch}\left[\frac{\pi}{2}\left\{n^2+\left(\frac{m}{12}\right)^2\right\}^{1/2}\right]$$
$$\delta_{00}=1,\ \delta_{0n}=0$$

Символ Σ^* означает, что член суммы при $m = 6$ равен нулю.

Скорость колебательного течения жидкости определяется для первого случая возбуждения при $\theta_k = 0$ и второго случая при $\theta_k = \pi(k+1)$ по формулам

$$\frac{V_{1z}}{i\omega\delta A_{11}} = v_{1z} = \frac{32}{3\pi^2}\sum_{n,\,m=0}^{\infty}{}^{*}(-1)^m\cos 2\pi nx\cos\frac{\pi my}{3}\times$$
$$\times\cos^2\frac{\pi m}{6}\left\{(1+\delta_{0n})(1+\delta_{0m})(4n^2-1)\left[1-\left(\frac{m}{3}\right)^2\right]\right\}\times$$
$$\times\cos\frac{\pi m}{3}\,\mathrm{ch}\left\{\frac{\pi(1-4z)}{2}\left[n^2+\left(\frac{m}{6}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\mathrm{ch}^{-1}\left[\frac{\pi}{2}\left\{n^2+\left(\frac{m}{6}\right)^2\right\}^{1/2}\right]$$

причем член суммы при $m = 3$ равен нулю

$$\frac{V_{2z}}{i\omega\delta A_{11}} = v_{2z} = \frac{8}{3\pi^2}\sum_{n,\,m=0}^{\infty}{}^{*}(-1)^m\cos 2\pi nx\cos\pi(2m+1)\frac{y}{6}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi(2m+1)}{3}\left[(1+\delta_{0n})(4n^2-1)\left\{1-\left[\frac{2m+1}{6}\right]^2\right\}\right]^{-1}\times$$
$$\times\mathrm{ch}\left\{\frac{\pi(1-4z)}{2}\left[n^2+\left(\frac{2m+1}{12}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\mathrm{ch}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2}\left[n^2+\left(\frac{2m+1}{12}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

Результаты вычислений распределения вертикальной скорости v_z в области D_0 приведены на фиг. 2, *а* для первого случая возбуждения и на фиг. 2, *б* для второго случая возбуждения (в силу симметрии только для множества значений $\{0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ 0 \leqslant y \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 1/4\}$). Сплошной линией показано распределение вертикальной составляющей скорости для $z = 0$, штриховой — для $z = 1/4$.

Поле распределения вертикальной составляющей скорости характеризуется следующими свойствами. Скорость $V_z(\xi_k, \eta_k, z = 0)$, $(\xi_k, \eta_k) \in \Gamma_k$ с точностью до постоянной совпадает с прогибом мембраны. С ростом z максимальное значение $|V_z(1/2, k + 1/2, 0)|$ убывает до значения $|V_z(1/2, k + 1/2, 1/4)|$, а на границе мембраны возрастает от нуля до значения $|V_z(\xi_k, \eta_k, 1/4)|$, где $\xi_k, \eta_k \in \gamma_k$. Минимальное по z для каждой точки $(\xi_k, \eta_k) \in \Gamma_k$ значение скорости V_z равно

$$V_z^* = \min[|V_z(\xi_k, \eta_k, 0)|, |V_z(\xi_k, \eta_k, 1/4)|]$$

Для аналитического исследования удобно приближенное значение

$$V_z^* = \alpha V_z(x, y, 0),\ \alpha = \min_k |V_z(1/2, k + 1/2, 1/4)/(\omega A)|$$

Для симметричных относительно центра мембраны выпуклых прогибов w_n поле распределения вертикальной проекции скорости ведет себя аналогично рассмотренному выше случаю одномодового прогиба. Поскольку V_z^* как функция прогиба известна, то задача о построении заданного поля скоростей, удовлетворяющего условиям (2.1), сводится к задаче построения заданного прогиба мембран w_k^*, такого, что в области Γ_k

$$|w_k^*| \geqslant V^*/(\omega\delta\alpha) \tag{3.4}$$

Рассмотрим для определенности задачу формирования прогиба w_k нижних мембран. Обозначим

$$Q_{km}^* = i\omega\rho_2 \exp(i\theta_k) L^3 D^{-1}\delta^{-1} Q_{km}$$
$$f_k^* = (\nabla^4 - K^4) w_k^* - \rho_1 L K^4 \rho^{-1}\delta^{-1}[J^* - I^*] + \rho_2 L K^4 \rho^{-1}\delta^{-1} I_k^*,$$
$$I_k^* = I_k \text{ при } w_k^* = w_k$$

Подставим в k-е уравнение системы (2.7) при $k = 1, \ldots, 4$ значение

$$w_k^* = \sum_{n,q}^{N_k} A_{nq}^k \sin \pi n \xi_k \sin \pi q \eta_k$$

удовлетворяющее условию (3.4) при $(\xi_k, \eta_k) \in \Gamma_k$, и отклонение свободной поверхности Z_j^*, определенное по формуле (2.5). В результате получим

$$\sum_{m=1}^{M_k} Q_{km}^* G_k(\xi_k, \eta_k, 0, \xi_{0m}^k, \eta_{0m}^k, -hL^{-1}) = f_k^*, \quad k = 1, \ldots, N \tag{3.5}$$

Задачу приближения функции f_k^* можно решать по формулам (2.8).

Рассмотрим специальный случай, когда на амплитуды прогиба w_k^* наложено дополнительное условие

$$\sum_{n,q=1}^{N_k} [(-1)^n - 1][(-1)^q - 1] A_{nq} [\pi^4 (n^2 + q^2)^2 - K^4 (1 + \rho_2 L \rho^{-1}\delta^{-1})] q^{-1} h^{-1} = 0 \tag{3.6}$$

Для этого случая задачу приближения (3.5) удобно решать сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой части по системе функций

$$\cos \pi r \xi_k \cos \pi n \eta_k;\ 0 \leqslant r,\ n \leqslant R - 1,\ r^2 + n^2 \neq 0,\ M_k = R^2$$

Получим

$$\sum_{m=1}^{M_k} Q_{km}^* \cos \pi r \xi_{0m}^k \cos \pi n \eta_{0m}^k = d_{rn} \tag{3.7}$$

$$d_{rn} = -\pi (r^2+n^2)^{1/2} \operatorname{sh} [\pi h (r^2+n^2)^{1/2} L^{-1}] \times$$
$$\times \int\limits_{\Gamma_k} f_k{}^* \cos \pi r \xi_k \cos \pi n \eta_k \, ds$$

Добавим к системе (3.7) равенство, вытекающее из условия разрешимости внутренней задачи Неймана в области D_k и условия (3.6)

$$\sum_{m=1}^{M_k} Q_{km}^k = d_{00}, \quad d_{00} = \sum_{n,\, q=1}^{N_k} [(-1)^n - 1] \times$$
$$\times [(-1)^q - 1] A_{nq} [\pi^4 (n^2+q^2)^2 - K^4] q^{-1} n^{-1} \pi^{-2} \tag{3.8}$$

Выберем координаты источников ξ_{0m}^k, η_{0m}^k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\xi_{01}{}^k = \xi_{0(R+1)}^k = \ldots = \xi_{0[R(R-1)+1]}^k = 1/(R+1), \ldots$$
$$\xi_{0R}^k = \xi_{02R}^k = \ldots = \xi_{0RR}^k = R/(R+1)$$
$$\eta_{01}{}^k = \ldots = \eta_{0R}^k = 1/(R+1), \quad \eta_{0[(R(R-1)+1]}^k = \ldots$$
$$\ldots = \eta_{0RR}^k = R/(R+1)$$

т. е. центры источников образуют квадратную сетку на нижней стенке области D_k. В этом случае определитель системы (3.7), (3.8) является кронекеровским произведением определителей типа Вандермонда. Решение системы выпишем по формуле Крамера

$$Q_{km}^k = \frac{\Delta_m{}^k}{\Delta^k}, \quad \Delta^k = \left[4^{(R-1)^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant R} \sin \frac{i+j}{2(R+1)} \sin \frac{i-j}{2(R+1)} \right]^{2R}$$

($\Delta_m{}^k$ — определитель, равный определителю Δ^k, в котором m-й столбец заменен столбцом правой части $d_{rn} = (d_{00}, d_{10}, \ldots, d_{R-1,\,0}, \ldots, d_{R-1,\,R-1})^T$. Число источников $M_k = R^2$ выбирается из условия

$$\left\| \sum_{r,\, n=R}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_k} f_k{}^* \cos \pi r \xi_k \cos \pi n \eta_k \, ds \right\| \leqslant \varepsilon_1$$

В рамках линейной постановки ускорение колебательного течения определяется по формуле $\mathbf{a} = -i\omega\mathbf{V}$, поэтому решение задачи построения заданного поля ускорений аналогично задаче построения заданного поля скоростей.

4. Рассмотрим случай резонансного возбуждения колебательного течения жидкости, предполагая, что жидкость в рабочей камере и подмембранных отсеках идеальна, а энергия рассеивается только в материале мембраны. Оставаясь в рамках теории малых прогибов, в интегродифференциальные уравнения движения мембран и свободных поверхностей согласно работе [7] введем дополнительный член

$$D\nabla^4 w_n{}^* + \rho\delta \frac{\partial^2 w_n{}^*}{\partial t^2} = \tag{4.1}$$
$$= \pm \rho_2 \varepsilon \sum_{m=1}^{M_n} Q_{nm} G_n (\xi, \eta, \zeta_n, \xi_{0m}^n, \eta_{0m}^n, \zeta_n{}^0)\, \omega \sin \omega t \pm$$
$$\pm \rho_1 g Z_i{}^* + \rho_2 \int\limits_{\Gamma_n} G_n \frac{\partial^2 w_n{}^*}{\partial t^2} \, ds + \varepsilon D \Phi (w_n{}^*), \quad n = 1, \ldots, 2N$$
$$Z_i{}^* = -g^{-1} \left[\sum_{q=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_q} G \frac{\partial^2 w_q{}^*}{\partial t^2} \, ds - \right.$$
$$\left. - \sum_{q=N+1}^{2N} \int\limits_{\Gamma_q} G \frac{\partial^2 w_q{}^*}{\partial t^2} \, ds - \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_{1j}} \frac{G \partial^2 Z_j{}^*}{\partial t^2} \, ds \right], \quad i = 1, 2$$

В формулах (4.1) верхний знак берется для $n = 1, \ldots, N$, нижний — для $n = N + 1 \ldots, 2N$, $\Phi(w_n^*)$ — функционал, характеризующий гистерезисное рассеяние энергии в материале мембраны. Функция Φ определяется из эксперимента. Предполагается, что возмущающая сила мала, т. е. расходы Q_{km} должны иметь порядок $Q_{km} \sim \varepsilon A_{km}$, $A_{km} = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Потеря энергии в материале мембраны приводит к сдвигу фазы колебаний мембран и, следовательно, к сдвигу фазы колебаний жидкости, заполняющей рабочую камеру.

Будем искать решение системы (4.1) в виде

$$w_n^* = uw_n(x, y)\cos\tau + \varepsilon u_1(x, y, \tau) + \ldots, \qquad Z_j^* = uZ_j(x, y)\cos\tau \tag{4.2}$$

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon\Delta_1 + \ldots, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \ldots, \quad \tau = \omega t + \psi$$

Для определенности взята резонансная частота ω_1, вычисленная в п. 3. Требуется, чтобы функции $u_1, \ldots$ не содержали главных гармоник $\cos\tau$ и $\sin\tau$. Подставляя разложения (4.2) в систему (4.1) и сравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим систему для определения ω_1, Δ_1 и ψ_0

$$(D\nabla^4 - \omega_1^2\rho\delta)\, w_n = \pm\rho_2\omega_1^2 (I - J) + \rho_2\omega_1^2 I_n, \quad n = 1, \ldots, 2N \tag{4.3}$$

$$Z_j = \omega^2 g^{-1}[I - J], \quad j = 1, 2$$

$$D\nabla^4 u_1 + \rho\delta\left[-u\Delta_1 w_n \cos\tau + \omega_1^2\partial^2 u_1/\partial\tau^2\right] = \tag{4.4}$$

$$= \pm\rho_2 \sum_{m=1}^{M_n} Q_{nm} G_n(\xi, \eta, \zeta_n, \xi_{0m}^n, \eta_{0m}^n, \zeta_{0m}^n)\sin(\tau - \psi_0) +$$

$$+ \rho_2 \int_{\Gamma_n} \left[-uw_n\Delta_1\cos\tau + \omega_1^2\partial^2 u_1/\partial\tau^2\right] G_n\, ds + \varepsilon D\Phi(u, w_n, \tau)$$

$$\varepsilon\Phi(w_n^*) = \varepsilon\Phi(u, w_n, \tau) + \varepsilon^2, \quad n = 1, \ldots, N$$

Система (4.3) совпадает с однородной системой (2.7), поэтому ω_1 можно считать первой собственной частотой системы (2.7).

При определении неизвестных Δ_1 и ψ_0 воспользуемся методом гармонического баланса. Для этого умножим уравнения (4.4) на $w_n\cos\tau$ и $w_n\sin\tau$ и проинтегрируем по поверхности мембраны за полный временной цикл. После ряда преобразований получим систему

$$\cos\psi_0 = \frac{1}{S}\int_{\Gamma_n}\int_0^{2\pi} \varepsilon D\Phi(u, w_n, \tau)\, w_n \sin\tau\, d\tau\, ds \tag{4.5}$$

$$\Delta = \left[S\sin\psi_0 - \int_{\Gamma_n}\int_0^{2\pi} \varepsilon D\Phi(u, w_n, \tau)\, w_n\cos\tau\, d\tau\, ds\right]\left[\pi\rho\delta\int_{\Gamma_n} uw_n^2\, ds - \right.$$

$$\left. - \pi D\int_{\Gamma_n} w_n\, ds \int_{\Gamma_n} uw_n G_n(\xi, \eta, \zeta_n, \xi_1, \eta_1, \zeta_{1n})\, ds\right]^{-1}$$

$$S = \pi\rho_2 \sum_{m=1}^{M_n} Q_{nm}\omega_1 \int_{\Gamma_n} G_n(\xi, \eta, \zeta_n, \xi_{0m}^n, \eta_{0m}^n, \zeta_n^\circ)\, w_n\, ds$$

В формулах (4.5) в качестве w_n берется собственная функция, отвечающая собственному значению ω_1. Решая совместно систему (4.5) с учетом известного выражения для $\Phi(u, w_n, \tau)$, можно построить резонансную кривую $u = f(w)$. Для уточнения прогиба функция u_1 определяется из (4.4). После определения прогибов w_n поле скоростей вычисляется по формуле (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Римский-Корсаков А. В., Ямщиков В. С.* Инфразвуковая техника и технология — новое направление интенсификации жидкофазных технологических процессов // Вестн. АН СССР. 1980. № 7. С. 11—18.
2. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1970. 288 с.
5. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука. 1978. 351 с.
6. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 439 с.
7. *Писаренко Г. С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев: Наук. думка. 1970. 379 с.

Москва

Поступила в редакцию 19.VII.1984