Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 532.59:534

О ДЛИННЫХ ВОЛНАХ В МЕЛКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

Марченко А. В.

Изучаются длинные волны в мелкой жидкости под ледяным покровом, находящимся в условиях сжатия или растяжения. Впервые получено уравнение, описывающее распространение таких волн. Найдены и исследованы точные решения уравнения в виде кноидальных волн и солитонов. Показано, что при достаточно малом растяжении и при всех сжатиях периодические волны в мелкой жидкости распадно неустойчивы.

Волны в жидкости конечной глубины, находящейся под ледяным покровом, исследовались во многих работах в линейном приближении (см., например, [1, 2]). Влияние нелинейности на распространение периодических волн и волновых пакетов конечной интенсивности впервые было рассмотрено в [3, 4]. Было показано, что в глубокой жидкости периодические волны распадно неустойчивы при любых, встречающихся в действительности нагрузках сжатия — растяжения, действующих на ледяной покров.

1. Рассмотрим движение тяжелой жидкости под ледяным покровом, который будем моделировать тонкой упругой пластиной. Поведение пластины под действием внешних нагрузок описывается уравнением [5]

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\eta_{xxxx} - h\sigma_{xx}\eta_{xx} = P - \rho_i h\eta_{tt}$$

где η — отклонение срединной плоскости пластины от положения равновесия, P — внешняя нагрузка, ρ_i и h — плотность и толщина льда, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пауссона льда. Предполагается, что ледяной покров может находиться в условиях сжатия — растяжения вдоль горизонтальной оси x, которые характеризуются компонентой тензора напряжений $\sigma_{xx} = \mathrm{const}$.

Уравнения движения жидкости с граничными условиями на дне и под упругой пластиной записываются следующим образом [3, 4]:

$$-H < z < \eta,\ \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0;\ z = -H,\ \varphi_z = 0 \tag{1.1}$$

$$z = \eta,\quad \eta_t + \varphi_x\eta_x = \varphi_z,\quad \varphi_t + {}^1/_2(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta + M\eta_{xxxx} - K\eta_{xx} + L\eta_{tt} = 0$$

Здесь φ — потенциал скоростей жидкости, H — глубина жидкости.

Из (1.1) в линейном приближении следует дисперсионное соотношение, связывающее частоту ω и длину волны $2\pi\lambda$ (ρ_ω — плотность воды)

$$\omega^2(L + (k\,\mathrm{th}\,kH)^{-1}) = g + Mk^4 + Kk^2,\ k \equiv \lambda^{-1} \tag{1.2}$$

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho_w},\quad L = \frac{\rho_i}{\rho_w}h,\quad K = \frac{h\sigma_{xx}}{\rho_w}$$

Будем рассматривать движения, при которых

$$\lambda \approx 100 \text{ м},\ H \approx 10 \text{ м},\ h \simeq 3 \text{ м},\ E \approx 3\cdot 10^9 \text{ Нм}^{-2}$$
$$\sigma_{xx} = 10^4 - 10^5 \text{ Нм}^{-2}$$

При таких масштабах величины

$$\gamma \equiv \frac{M}{g\lambda^4},\quad \beta \equiv \frac{K}{g\lambda^2},\quad \delta \equiv \frac{LH}{\lambda^2},\quad \mu \equiv \frac{H^2}{\lambda^2}$$

имеют порядок 10^{-3}, поэтому дисперсионное соотношение (1.2) с точностью до $O(10^{-3})$ можно представить в виде

(1.3) $$\omega = k\sqrt{H}\left(\sqrt{g} - \sqrt{g}\frac{k^2H^2}{6} - \sqrt{g}\frac{LHk^2}{2} + \frac{Mk^4}{2\sqrt{g}} + \frac{Kk^2}{2\sqrt{g}}\right)$$

Уравнение, следствием которого является закон дисперсии (1.3), должно выглядеть следующим образом:

(1.4) $$\eta_t + \sqrt{gH}\,\eta_x + \frac{\sqrt{H}}{2}\left(\sqrt{g}\frac{H^2}{3} + \sqrt{g}LH - \frac{K}{\sqrt{g}}\right)\eta_x^{(3)} + \frac{M\sqrt{H}}{2\sqrt{g}}\eta_x^{(5)} = 0$$

Представляется интересным учесть нелинейные поправки к уравнению (1.4), которые могут существенно изменять решение за достаточно большой промежуток времени и на больших расстояниях. Для получения нелинейного аналога (1.4) введем малый параметр ε, характеризующий нелинейность задачи: $\varepsilon = aH^{-1}$, где a — характерная амплитуда колебаний ледяного покрова. Таким образом, в данной нелинейной задаче возникает пять малых безразмерных параметров: ε, β, γ, δ, μ, которые в зависимости от характерных масштабов могут иметь различную величину и в разной степени влиять на свойства распространяющихся волн. Будем считать, что ε^2 много меньше остальных параметров, т. е. характерная амплитуда $a < 0{,}1$ м.

Перейдем в (1.1) к безразмерным переменным

$$x' = \frac{x}{\lambda},\quad z' = \frac{z}{H},\quad t' = \frac{\sqrt{gH}}{\lambda}t,\quad \varphi' = \frac{\sqrt{gH}}{ga\lambda}\varphi,\quad \eta' = \frac{\eta}{a}$$

В результате получим следующую систему уравнений с граничными условиями (далее штрихи опустим):

(1.5) $$-1 < z < \varepsilon\eta,\quad \mu\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0;\quad z = -1,\quad \varphi_z = 0$$
$$z = \varepsilon\eta,\quad \eta_t + \varepsilon\eta_x\varphi_x = \mu^{-1}\varphi_z$$
$$\varphi_t + \eta + {}^1\!/_2\varepsilon(\varphi_x{}^2 + \mu^{-1}\varphi_z{}^2) + \gamma\eta_{xxxx} - \beta\eta_{xx} + \delta\eta_{tt} = 0$$

Разлагая $\varphi(x, t, z)$ в ряд Тейлора по степеням z, из уравнения Лапласа и граничного условия при $z = -1$ методом последовательных приближений получаем

(1.6) $$\varphi_z{}^\circ = -\mu\varphi_{xx}^\circ - {}^1\!/_3\mu^2\varphi_{xxxx}^\circ$$

Градус означает, что значение функции или ее производных берется при $z = 0$.

Подстановка (1.6) в граничные условия при $z=\varepsilon\eta$ приводит с точностью до членов $O(\varepsilon, \mu)$ к системе уравнений

(1.7) $$\varphi_t{}^\circ + \eta + {}^1\!/_2\varepsilon\varphi_x{}^{\circ 2} + \gamma\eta_{xxxx} - \beta\eta_{xx} + \delta\eta_{tt} = 0$$
$$\eta_t + \varepsilon\eta_x\varphi_x{}^\circ + \varphi_{xx}^\circ + {}^1\!/_3\mu\varphi_{xxxx}^\circ + \varepsilon\eta\varphi_{xx}^\circ = 0$$

В нулевом приближении по ε, μ, γ, β, δ из (1.7) следует

(1.8) $$\varphi_t{}^\circ + \eta = 0,\quad \eta_t + \varphi_{xx}^\circ = 0$$

Далее будем рассматривать только волны, бегущие вправо, т. е. предполагать, что $\partial/\partial t = -\partial/\partial x + O(\varepsilon, \mu)$. Тогда из (1.7) можно исключить φ° и получить уравнение относительно η

(1.9) $$\eta_t + \eta_x + {}^3\!/_2\varepsilon\eta\eta_x + {}^1\!/_2\varkappa\eta_{xxx} + {}^1\!/_2\gamma\eta_{xxxxx} = 0$$
$$\varkappa = {}^1\!/_3\mu + \delta - \beta = h(\sigma_0 - \sigma_{xx})[\rho_w g\lambda^2]^{-1}$$

(1.10) $$\sigma_0 = gH[\rho_w H/(3h) + \rho_i]$$

Пусть $h = 3$ м, тогда $H = 5$ м получаем $\sigma_0 \approx {}^2/_3 \cdot 10^5$ Нм$^{-2}$, а при $H = 10$ м — $\sigma \approx 2 \cdot 10^5$ Нм$^{-2}$. Из этих оценок и из (1.10) видно, что σ_{xx} может быть как больше, так и меньше σ_0 и $\varkappa$ может менять знак. Как будет показано далее, это существенным образом отражается на свойствах решения уравнения (1.12). Отметим, что при $H \gg 10$ м выполняется неравенство $\sigma_0 \gg 10^5$ Нм$^{-2}$, а характерная прочность льда на сжатие или растяжение имеет порядок 10^6 Нм$^{-2}$ [6], поэтому для длинных волн в жидкости глубиной много большей 10 м можно считать, что $\sigma_{xx} \ll \sigma_0$ и $\varkappa > 0$. При увеличении глубины растет характерный горизонтальный масштаб волн, при котором выполняется условие $\mu \ll 1$, а величина параметра γ уменьшается. На этом основании при рассмотрении длинных волн на глубинах больших десятков метров упругость льда можно не учитывать. Распространение таких волн будет описываться уравнением Кортевега—де Вриза (КдВ).

2. Изучим стационарные решения уравнения (1.9)

$$\eta(x, t) = -\zeta(\xi), \quad \xi = x - ct \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.9), два раза интегрируя и вводя новые переменные

$$\zeta \equiv X, \quad \zeta'^2(\xi) \equiv Y(X) \tag{2.2}$$

получаем

$$\tfrac{1}{4}\gamma\left(YY'' - \tfrac{1}{4}Y'^2\right) + \tfrac{1}{4}\varkappa Y - \tfrac{1}{4}\varepsilon X^3 + \tfrac{1}{2}(1-c)X^2 + AX + B = 0, \quad A = \mathrm{const}, \quad B = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) будем искать в виде

$$Y = \alpha_1 X^{5/2} + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^{3/2} + \alpha_4 X + \alpha_5, \quad X > 0, \quad Y > 0 \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), находим точные решения в виде

$$Y_{1,2} = \pm 2K_0 X^{5/2} - K_1 X^2 - 52B/(5\varkappa) \tag{2.5}$$

$$c \equiv c_0 = 1 - \frac{18}{169}\frac{\varkappa^2}{\gamma}, \quad A = 0, \quad K_0 = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{35\gamma}}, \quad K_1 = \frac{4\varkappa}{\gamma}$$

$$Y_{3,4} = \pm 2K_0 X^{5/2} - K_1 X^2 \pm \frac{c - c_0}{21\gamma\sqrt{K_0}} X^{3/2} + K_2 X, \tag{2.6}$$

$$K_2 = \frac{7\varkappa(c - c_0)}{624\gamma\varepsilon}. \quad B = \frac{1}{8\gamma}K_2^2$$

Определив $Y(X)$, можно найти стационарные решения (2.1). Из (2.2) имеем

$$\zeta'^2 = Y_i(\zeta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) имеет решения типа волн, если уравнение $Y_i(\tau) = 0$ ($\tau^2 = X$) имеет не менее трех действительных корней $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$. Пусть $Y_i(\tau) > 0$ при $\tau_2 < \tau < \tau_1$. Тогда ζ будет изменяться между τ_1^2 и τ_2^2.

Пусть $Y_i(\varepsilon) > 0$ при $\tau_3 < \tau < \tau_2$. Тогда ζ будет изменяться между τ_2^2 и τ_3^2. При $i = 3,4$ решение (2.7) можно выразить через эллиптические функции Якоби:

$$\zeta_{3,4} = \left[\tau_2 + (\tau_{3,1} - \tau_2)\,\mathrm{cn}^2\left(\xi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\tau_1 - \tau_3}{K_3}}, s_{3,4}\right)\right]^2 \tag{2.8}$$

$$s_3^2 = \frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_3}, \quad s_4^2 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 - \tau_3}$$

Период $\zeta(\xi)$ вычисляется по формуле

$$P = 3\sqrt{\frac{K_0}{\tau_1 - \tau_0}}\,K(s)$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Для того чтобы уравнение (2.7) содержало решения типа уединенных волн, необходимо, чтобы при $i = 1,2$ выполнялись условия $B = 0$, $\varkappa < 0$. При $i = 3$ должно выполняться условие $\tau_1 = \tau_2 \neq \tau_3$, а при $i = 4$ — условие $\tau_3 = \tau_2 \neq \tau_1$.

Представим $Y_{3,4}(\tau)$ в виде

$$Y_3(\tau) = 2K_0(\tau - \tau_1)^2(\tau - \tau_3) \tag{2.9}$$

$$Y_4(\tau) = 2K_0(\tau - \tau_3)^2(\tau_1 - \tau)$$

Подставляя (2.9) в (2.6), находим, что τ_1 и τ_3 удовлетворяют квадратным уравнениям, дискриминант которых меньше нуля. Поэтому решения типа уединенных волн возможны только при выполнении условий $c = c_0$, $B = 0$, $\varkappa < 0$. Подставляя (2.5), (2.6) в (2.7), с учетом данного условия после интегрирования получаем

$$\zeta = \frac{35}{169}\frac{\varkappa^2}{\gamma\varepsilon}\operatorname{sech}^4\left(\sqrt{-\frac{\varkappa}{52\gamma}}\,\xi\right) \tag{2.10}$$

Отметим, что солитон (2.10) существует только при $\varkappa < 0$. При этом в отличие от солитонов уравнения КдВ его амплитуда и скорость строго определены. Периодические решения (2.8) существуют при любом знаке $\varkappa$.

3. Рассмотрим нулевое приближение уравнения (1.9) по ε в системе координат, движущейся с единичной скоростью. Подставляя в это уравнение $\eta = a\exp i(kx - \omega t)$, получаем дисперсионное соотношение

$$\omega = {}^1/_2\varkappa k^3 - {}^1/_2\gamma k^5 \tag{3.1}$$

которое при $\varkappa > 0$ не противоречит выполнению условия синхронизации волновых частот [3]

$$\omega(k_1 + k_2) = \omega(k_1) + \omega(k_2) \tag{3.2}$$

Для каждого k_1 при $|k_1| < \sqrt{4\lambda}$, $\lambda \equiv {}^1/_5\varkappa/\gamma$ можно найти значение

$$k_2 = -{}^1/_2 k_1 + {}^1/_2\sqrt{3}\sqrt{4\lambda - k_1^2}$$

при котором условие (3.2) выполняется тождественно. Связь между k_1 и k_2 можно определить графически. Конец вектора с координатами (k_1, k_2) в плоскости (k_1, k_2), удовлетворяющими условиям (3.2), лежит на эллипсе с центром в начале координат. Большая ось этого эллипса повернута на угол $-\pi/4$ по отношению к оси k_1. Величины большой и малой осей определяются по формулам $d_1 = 2\sqrt{6\lambda}$, $d_2 = 2\sqrt{2\lambda}$.

Зная величины волновых векторов резонансно взаимодействующих волн, можно построить описанный эллипс, а значит, определить величину сжатия или растяжения ледяного покрова.

Представим η в виде

$$\eta = \sum_{j=1}^{3} a_j(\varepsilon t)\exp i\theta_j + \text{C. C} \tag{3.3}$$

$$\theta_1 = k_j x - \omega(k_j)t, \quad k_3 = k_1 + k_2$$

где частоты $\omega(k_j)$ удовлетворяют (3.2). Подставляя (3.3) в (1.9) и затем осредняя полученное уравнение по θ_1, θ_2, θ_3, получаем систему уравнений относительно комплексных амплитуд a_j

$$ia_1^{\cdot} = {}^3/_2 k_1 a_2^* a_3, \quad ia_2^{\cdot} = {}^3/_2 k_2 a_1^* a_3 \tag{3.4}$$

$$ia_3^{\cdot} = {}^3/_2 k_3 a_1 a_2, \quad a_j^{\cdot} \equiv da_j/d(\varepsilon t)$$

Эта система уравнений встречалась ранее в других областях физики [7] и применительно к волнам подо льдом в глубокой жидкости была впервые исследована в [3]. Решения (3.4) описывают перекачку энергии между гармониками θ_1, θ_2, θ_3 с течением времени.

Можно выделить следующие особенности данного процесса.

Если при $t = 0$ энергия была сосредоточена в волнах θ_1 (θ_2), т. е. при $t = 0$ выполнено неравенство $|a_1| \gg |a_{2,3}|$ ($|a_2| \gg |a_{1,3}|$), то при любом t интенсивность волны θ_3 будет незначительной, так как $|a_3|$ не может вырасти больше чем на величину $|a_2| k_3 k_2^{-1}$ ($|a_1| k_3 k_1^{-1}$). Таким образом, энергия коротковолнового колебания вырасти за счет длинноволнового не может.

Если при $t = 0$ энергия была запасена в основном в короткой волне, т. е. $|a_3| \gg |a_{1,2}|$, то картина иная и за счет a_3 могут одновременно вырасти a_1 и a_2.

Если $k = \sqrt{\lambda}$, то с течением времени будет происходить генерация волны длиной πk^{-1} и решение (3.4) запишется в виде

$$a_1 = a_2 = \sqrt{2a}\,[3k\operatorname{ch}(a\varepsilon t)]^{-1}$$
$$a_3 = 2ia \operatorname{th}(a\varepsilon t)(3k)^{-1}, \quad a = \mathrm{const}$$

При $t = 0$ имеем $a_3 = 0$, $a_1 = a_2 = \sqrt{2}a\,(3k)^{-1}$. При $t \to \infty$ будет $a_1 = a_2 \to 0$, $a_3 \to 2ia\,(3k)^{-1}$. Таким образом, показано, что при $\varkappa > 0$ периодические решения уравнения (1.9) распадно неустойчивы.

Автор благодарит А. А. Бармина и А. Г. Куликовского за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Букатов А. Е.* Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 68—75.
2. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат. 1967. 315 с.
3. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1986. № 4. С. 94—97.
4. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* Об эволюции волновых пакетов при трехволновом взаимодействии в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 57—64.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука. 1965. 203 с.
6. *Богородский В. В., Гаврило В. П.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат. 1980. 381 с.
7. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. 1984. 432 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VIII.1986