Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 532.517.4

АНИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Бабкин В. А.

Решается задача о развитом турбулентном течении несжимаемой вязкой жидкости между соосными круговыми цилиндрами (течение Куэтта). Внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью, а внешний неподвижен. Область течения разбивается на две пристеночные области, прилегающие к цилиндрам, и ядро течения.

Экспериментальные и теоретические исследования [1—4] показали, что турбулентный поток ньютоновской жидкости вблизи твердой стенки структурирован. Его структуру создает упорядоченная система пристеночных вихрей, которые в каждой точке потока выделяют характерное направление, причем непосредственно у твердой стенки вихри направлены вдоль линий тока. По этой причине турбулизованная жидкость в пристеночной области должна рассматриваться как анизотропная [5, 6], причем высказано предположение [6] о том, что вязкостная анизотропия турбулизованной жидкости аналогична анизотропии жидких кристаллов. Было показано [7], что вблизи плоской стенки турбулентное течение ньютоновской жидкости действительно можно описать в рамках модели Эриксена — Лесли [8, 9] ориентированной жидкости, если на определяющие константы модели наложить некоторые дополнительные условия.

В данной работе турбулизованная жидкость в пристеночных областях рассматривается как ориентированная жидкость [7], в в ядре — как вязкая жидкость с постоянной по сечению турбулентной вязкостью. В отличие от известных решений [1] при переходе от течения между параллельными стенками к течению между вращающимися соосными цилиндрами модель остается неизменной. Полученное решение хорошо согласуется с опытными данными [10].

Пусть пространство между двумя бесконечными соосными гладкими цилиндрами заполнено несжимаемой ньютоновской жидкостью. Для удобства сопоставления с экспериментальными результатами [10] примем, что внутренний цилиндр (радиусом R_1) вращается с постоянной угловой скоростью ω_1, а внешний (радиусом R_2) неподвижен.

Возьмем цилиндрическую систему координат r, φ, x: ось x направлена по общей оси цилиндров; угол φ отсчитывается по направлению вращения внутреннего цилиндра.

Пусть скорость этого вращения такова, что течение жидкости между цилиндрами развитое турбулентное. В соответствии с данными работ [1—4] область течения $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ разобьем на три подобласти: 1 — ($R_1 \leqslant r \leqslant r_1$), 2 — ($r_2 \leqslant r \leqslant R_2$) — области пристеночной турбулентности; 3 — ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$) — ядро течения. В областях 1 и 2 турбулизованная жидкость имеет структуру, образованную пристеночными вихрями. Область 3 рассматривается как зона свободной турбулентности. Поскольку в данной работе понятие ламинарного подслоя не используется, границы областей 1 и 2 указаны без учета толщины ламинарного подслоя у твердых стенок.

[1] *Дорфман Л. А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз. 1960. 260 с.; *Новожилов В. В.* О расчете развитого турбулентного течения между двумя соосными вращающимися цилиндрами: Препринт № 178. Ин-т проблем механики АН СССР. 1981. 64 с.

Распределение скоростей будем искать раздельно в каждой области. В пристеночных областях 1 и 2 турбулизованную жидкость будем рассматривать как ориентированную жидкость, кинематическое состояние которой в каждой точке характеризуется осредненной скоростью $\mathbf{v}$ (v_r, v_φ, v_x) и единичным вектором-ориентиром $\mathbf{n}$ (n_r, n_φ, n_x).

Если пренебречь силами тяжести, то при учете симметрии течения имеем $p = p\,(r)$ и

$$v_r = v_x = 0,\ v_\varphi = v\,(r) = r\omega\,(r) \tag{1}$$

$$n_r = \sin\theta\,(r),\ n_\varphi = \cos\theta\,(r),\ n_x = 0$$

где p — осредненное давление, θ — угол между вектором-ориентиром и линией тока, $\omega\,(r)$ — искомая функция.

При сделанных предположениях не обращающиеся в тождество уравнения модели Эриксена — Лесли имеют вид [9]

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{dp}{dr} + \rho r\omega^2 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d\sigma_{\varphi r}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{\varphi r} + \sigma_{r\varphi}) = 0$$

$$\frac{d\mu_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\mu_{rr} - \mu_{\varphi\varphi}) + g_r + \rho_1\omega^2 \sin\theta = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\mu_{\varphi r}}{dr} + \frac{1}{r}(\mu_{\varphi r} + \mu_{r\varphi}) + g_\varphi + \rho_1\omega^2\cos\theta = 0$$

Здесь ρ — плотность, σ_{kl} — напряжения, ρ_1 — постоянная, характеризующая инерционность при повороте вектора-ориентира, μ_{kl}, $\mathbf{g}$ (g_r, g_φ, g_x) — напряжения и внутренняя объемная сила, вызывающие изменение ориентации вектор-ориентира.

При учете равенств (1) и условий, наложенных на константы модели Эриксена — Лесли в работе [7], определяющие уравнения для величин, входящих в уравнения (2), (3), запишутся в виде

$$\sigma_{rr} = (\mu_1 \sin^2\theta + \mu_5)r\omega' \sin\theta\cos\theta \tag{4}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\mu_1 \cos^2\theta + \mu_5)r\omega' \sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = (\mu_1 \sin^2\theta\cos^2\theta + \mu_0)r\omega'$$

$$\mu_{rr} = -\mu_{\varphi\varphi} = \Phi\sin\theta\cos\theta \tag{5}$$

$$\mu_{r\varphi} = -\Phi\sin^2\theta,\ \mu_{\varphi r} = \Phi\cos^2\theta$$

$$\mu_0 = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2},\quad \Phi = k_{22}\left(\frac{\cos\theta}{r} - \sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$g_r = g_\varphi = 0$$

где μ_1, μ_4, μ_5, k_{22} — константы модели Эриксена — Лесли, ω' — производная по r.

Если формулы (5) подставить в уравнения (3), то последние переходят в одно уравнение для определения угла θ

$$\sin\theta\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2} + (\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \tag{6}$$

$$+ \frac{5\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{d\theta}{dr} - \frac{\cos^2\theta}{r^2} - \frac{\rho_1}{k_{22}}\omega^2 = 0$$

Уравнение (6), довольно сложное само по себе, к тому же связано с уравнениями (2). Для упрощения задачи сделаем следующие предположения: инерционные эффекты, связанные с поворотом вектора-ориентира, малы, поэтому $\rho_1\omega^2 = 0$; угол θ мал, так что $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$.

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$\theta \frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \frac{5\theta}{r}\frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{r^2} = 0 \tag{7}$$

Граничные условия формулируются раздельно для областей 1 и 2:

$$\theta(R_i) = 0, \ \theta(r_i) = \theta_i, \ i = 1, 2 \tag{8}$$

где θ_1 и θ_2 — значения угла θ на границах ядра течения.

Решения уравнения (7) с граничными условиями (8) соответственно таковы:

$$2\theta^2 = (-1)^{i+1} A_i \left(1 - \frac{R_i^4}{r^4}\right) + \ln\frac{r}{R_i} \tag{9}$$

$$A_i = (-1)^{i+1} \frac{r_i^4 [2\theta_i^2 - \ln(r_i/R_i)]}{r_i^4 - R_i^4}$$

Вблизи твердых стенок, когда $|1 - r/R_i| \ll 1$, решения (9) принимают более простой вид

$$\theta^2 = (-1)^{i+1} a_i \left(\frac{r}{R_i} - 1\right), \quad a_i = 2A_i + \frac{(-1)^{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2 \tag{10}$$

Постоянные a_1 и a_2, очевидно, должны быть положительными. Первое уравнение (2) служит для определения $p = p(r)$. Интегрирование второго уравнения (2) при условии $\sigma_{\varphi r} = \sigma_{r\varphi}$ (см. формулы (4)) дает распределение касательных напряжений в областях 1 и 2

$$\sigma_{\varphi r} = -\tau_{wi} R_i^2/r^2, \ i = 1, 2 \tag{11}$$

где τ_{wi} — модуль касательного напряжения на стенке.

В рассматриваемом приближении третье уравнение (4) имеет вид

$$\sigma_{\varphi r} = (\mu_1\theta^2 + \mu_0) r\omega' \tag{12}$$

Приравнивание правых частей в формулах (11) и (12) приводит к уравнениям для определения $\omega(r)$ в пристеночных областях

$$(\mu_1\theta^2 + \mu_0) r \frac{d\omega}{dr} = -\frac{\tau_{wi} R_i}{r^2}, \quad i = 1, 2 \tag{13}$$

Интегрирование уравнения (13), в котором θ^2 определено формулами (10), позволяет найти профили скорости $v = \omega r$ в областях 1 и 2

$$v = B_1 r - K_1 \left[\frac{r}{(\alpha_1 - 1)^3} \ln\frac{r}{r + (\alpha_1 - 1) R_1} + \frac{R_1}{(\alpha_1 - 1)^2} - \frac{R_1^2}{2(\alpha_1 - 1) r}\right] \tag{14}$$

$$v = B_2 r + K_2 \left[\frac{r}{(\alpha_2 + 1)^3} \ln\frac{(\alpha_2 + 1) R_2 - r}{r} + \frac{R_2}{(\alpha_2 + 1)^2} + \frac{R_2^2}{2(\alpha_2 + 1) r}\right]$$

$$K_i = \frac{\tau_{wi}}{\mu_1 a_i}, \quad \alpha_i = \frac{\mu_0}{\mu_1 a_i}$$

Здесь B_1 и B_2 — постоянные интегрирования уравнения (13), которые определяются соответственно из граничных условий $\omega(R_1) = \omega_1$, $\omega(R_2) = 0$:

$$B_1 = \omega_1 - K_1 \left[\frac{\ln\alpha_1}{(\alpha_1 - 1)^3} - \frac{1}{(\alpha_1 - 1)^2} + \frac{1}{2(\alpha_1 - 1)}\right] \tag{15}$$

$$B_2 = -K_2 \left[\frac{\ln\alpha_2}{(\alpha_2 + 1)^3} + \frac{1}{(\alpha_2 + 1)^2} + \frac{2}{2(\alpha_2 + 1)}\right]$$

В формуле (12) произведение $\mu_1\theta^2$ характеризует вязкие свойства турбулизованной жидкости, определяемые ее вихревой структурой, и поэтому величина $\mu_1\theta^2$ может рассматриваться как турбулентная вязкость. Тогда не зависящую от наклона пристеночных вихрей постоянную μ_0 следует считать молекулярной вязкостью. Если положить, как это принято в теории пристеночной турбулентности [11], $\mu_0 = 0$, то из формул (14) при $\alpha_i = 0$ получаются следующие профили скоростей в областях 1 и 2:

$$(16) \qquad v = B_i r + (-1)^i K_i \left[r \ln \left| 1 - \frac{R_i}{r} \right| + R_i \left(1 + \frac{R_i}{2r} \right) \right], \quad i = 1, 2$$

При $\alpha_i = 0$ формулы (15) теряют смысл и для определения постоянных B_1 и B_2 следует сформулировать иные граничные условия, либо же считать B_1 и B_2 эмпирическими постоянными.

Если рассматривать ядро течения $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ как область свободной турбулентности с постоянной турбулентной вязкостью, то в этом случае профиль скорости имеет вид [11]

$$(17) \qquad v = Mr + N/r$$

где M и N — не зависящие от турбулентной вязкости постоянные, определяемые из условия непрерывности скорости при $r = r_1$ и $r = r_2$.

Ниже дано сравнение значений скорости v, вычисленных по формулам (16) и (17), с теми экспериментальными значениями скорости, которые приведены в [10] в виде таблицы (исследуемая жидкость — воздух, радиусы цилиндров $R_1 = 106$ мм, $R_2 = 155$ мм):

$r - R_1$, мм	1	3	5	10	25	40	45	47
$\omega_1 = 178$ с$^{-1}$								
v, м/с расчет	10,15	9,08	8,69	8,29	7,47	6,83	6,66	6,45
эксперимент	10,13	9,10	8,70	8,24	7,56	6,90	6,67	6,50
$\omega_1 = 283$ с$^{-1}$								
v, м/с расчет	16,10	14,61	14,08	13,44	11,96	10,80	10,51	10,12
эксперимент	16,05	14,60	14,05	13,27	11,95	10,87	10,50	10,10

Расчеты по формулам (16), (17) проведены при $B_1 = 59{,}6$ с$^{-1}$, $B_2 = 49{,}7$ с$^{-1}$, $K_1 = 11{,}0$ с$^{-1}$, $K_2 = 2{,}71$ с$^{-1}$, $M = 4{,}58$ с$^{-1}$, $N = 0{,}90$ м^2/с, для $\omega_1 = 178$ с$^{-1}$ и при $B_1 = 100$ с$^{-1}$, $B_2 = 79{,}3$ с$^{-1}$, $K_1 = 15{,}7$ с$^{-1}$, $K_2 = 4{,}71$ с$^{-1}$, $M = 2{,}17$ с$^{-1}$, $N = 1{,}53$ м^2/с для $\omega_1 = 283$ с$^{-1}$. В обоих случаях принято $r_1 - R_1 = R_2 - r_2 = 7$ мм. Совпадение расчетных и экспериментальных результатов хорошее.

В работе [10] получено также, что значения безразмерной скорости $\bar{v} = v/\omega_1 R_1$ для любых ω_1 ложатся на один график $\bar{v} = \bar{v}(\xi)$, где $\xi = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$. Покажем, что и с этим выводом могут быть согласованы результаты этой работы.

Представим B_i и K_i в виде

$$(18) \qquad B_i = \beta_i \omega_1, \quad K_i = \varkappa_i \omega_1$$

где β_i и $\varkappa_i$ $(i = 1, 2)$ — безразмерные величины.

Перепишем формулы (16) при помощи безразмерных величин $\bar{v}$ и ξ

$$(19) \qquad \bar{v} = \beta_1 (1 + \xi h) - \varkappa_1 \left[(1 + \xi h) \ln \frac{\xi h}{1 + \xi h} + \frac{1}{2(1 + \xi h)} + 1 \right]$$

$$\bar{v} = \beta_2 (1 + \xi h) + \varkappa_2 \left[(1 + \xi h) \ln \frac{(1 - \xi) h}{1 + \xi h} + (1 + h) \left(1 + \frac{(1 - \xi) h}{2(1 + \xi h)} \right) \right]$$

$$h = (R_2 - R_1)/R_1$$

Значения β_i и $\varkappa_i$, найденные по указанным выше значениям B_i и K_i, приведены в таблице. Величины β_i и $\varkappa_i$, очевидно, можно рассматривать как постоянные, и тогда формулы (19) представляют собой не зависящие от ω_1 функции $\bar{v} = \bar{v}(\xi)$.

ω_1, с$^{-1}$	β_1	$\varkappa_1$	β_2	$\varkappa_2$
178	0,33	0,062	0,28	0,015
283	0,35	0,055	0,28	0,017

Поскольку постоянные M, N в формуле (17) выражаются через B_i и K_i линейно, то формула (17), записанная через $\bar{v}$ и ξ, также представляет собой не зависящую от ω_1 функцию $\bar{v} = \bar{v}$ (ξ). Но тогда $\bar{v}$ не зависит от ω_1 во всем промежутке $R_1 < r < R_2$.

Автор благодарит В. Н. Николаевского за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Head M. R., Bandyopadhyay P.* New aspects of turbulent boundary — layer structure // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 297—338.
2. *Perry A. E., Chong M. S.* On the mechanism of wall turbulence // J. Fluid Mech. 1982. V. 119. P. 173—217.
3. *Moin P., Kim J.* The structure or the vorticity field in turbulent channel flow. Pt. I. Analysis of instantaneous field and statistical correlations // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 441—464.
4. *Perry A. E., Henbest S., Chong M. S.* A theoretical and experimental study of wall turbulence // J. Fluid Mech. 1986. V. 165. P. 163—199.
5. *Дмитриев Н. М., Лурье М. В.* О реологической модели анизотропной турбулентности // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т. 225. № 4. С. 775—777.
6. *Николаевский В. Н.* Пространственное осреднение и теория турбулентности // Вихри и волны. М.: Мир. 1984. С. 266—335.
7. *Бабкин В. А.* Анизотропная турбулентность при течении несжимаемой жидкости между параллельными плоскими стенками // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 401—405.
8. *Ericksen J. L.*, Anisotropic fluids // Arch. Ration. Mech. and Analysis 1960. V. 4. No. 3. P. 231—237.
9. *Leslie F. M.* Some constitutive equations for liquid crystals // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1968. V. 28. No. 4. P. 265—283.
10. *Змейков В. Н., Устименко Б. П.* Исследование аэродинамики и теплообмена в кольцевом канале с внутренним вращающимся цилиндром // Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики: Прикладная теплофизика. Алма-Ата: Изд-во АН КазССР. 1964. Вып. 1. С. 148—172.
11. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 727 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
11.VI.1987