Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 532.517.4

ЯВЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА И МЕТОД РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

Теодорович Э. В.

Метод ренормализационной группы (РГ) применяется для исследования переноса скалярной пассивной примеси турбулентными пульсациями скорости. Получено решение для турбулентного числа Прандтля, стремящееся в случае крупномасштабных долгопериодных процессов (инфракрасный предел) к универсальной постоянной, зависящей только от размерности пространства. Используемый вариант метода РГ дает возможность определить поведение коэффициента диффузии и числа Прандтля при выходе на асимптотический режим и показать, что асимптотические методы РГ применимы для описания развитой турбулентности в инерционном интервале спектра волновых чисел (ИИС).

Идеи метода РГ, появившиеся первоначально в квантовой теории поля [1, 2], нашли широкое применение в других областях физики. Особенно яркие достижения метода РГ имеются в теории критических явлений, закономерности которых определяются крупномасштабными и долгопериодными флуктуациями параметра порядка. В соответствии с этим техника РГ развивалась как некоторый асимптотический подход с использованием представлений о неподвижных точках РГ-преобразования и определением показателей масштабного подобия (критических индексов) при помощи исследования линеаризованного вблизи неподвижных точек оператора РГ-преобразования [3, 4]. Подобная процедура была сформулирована как в рамках вилсоновского подхода с последовательным исключением мелкомасштабных мод [4], так и в рамках теоретико-полевого подхода [5, 6].

Крупномасштабные и долгопериодные свойства турбулизованной жидкости исследовались при помощи вилсоновской РГ-процедуры [7] или на основе методов полевой теории [8, 9]. В дальнейшем результаты, полученные асимптотическими методами РГ в инфракрасном пределе, стали применяться для объяснения свойств развитой турбулентности в ИИС, однако оставалось неясным, какое отношение имеют найденные в инфракрасном пределе результаты к свойствам турбулентности в ИИС. В частности, утверждалось [10, 11], что полученные методом РГ результаты нельзя применять к ИИС, поскольку он характеризуется обеспечивающим каскадный механизм переноса энергии сильным взаимодействием между модами, тогда как использование теории возмущений для нахождения оператора РГ-преобразования предполагает слабую связь между модами и не описывает каскадный процесс с локальными в **k**-пространстве межмодовыми взаимодействиями.

Однако, с другой стороны, согласно Вилсону [12] метод РГ является именно способом описания локальных в пространстве волновых чисел межмодовых связей и каскадного механизма взаимодействия мод с существенно различающимися масштабами. При этом теория возмущений используется только для описания единичного акта взаимодействия мод, а каскадный процесс учитывается методом РГ, осуществляющим суммирование подпоследовательности единичных актов взаимодействия мод близких масштабов. Успехи в применении метода РГ для описания критических явлений можно рассматривать как подтверждение этой точки зрения, однако в случае турбулентности остается открытым вопрос о том, относится ли ИИС к области применимости асимптотических методов.

В связи с этим представляет интерес вычисление физических характеристик турбулентности методом РГ, не основывающемся на асимптотическом подходе. Такой подход был сформулирован Боголюбовым и Ширковым в квантовой теории поля [2]. Свойство РГ-инвариантности связывается с наличием произвола в выборе точки нормировки, и метод РГ представляет собой способ перестройки ряда формальной теории возмущений и суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности этого ряда. При такой процедуре в принципе возникает возможность найти не только показатели масштабного подобия, но также определить амплитудные числовые множители и получить зависимости в области неполной автомодельности, отличные от степенных.

В теории турбулентности также предпринимались попытки вычислить амплитудные числовые множители в рамках вилсоновского РГ-подхода, основанного на итерационном частичном усреднении по мелкомасштабным модам. Метод применялся для вычисления эффективной вязкости, описывающей усредненный отклик поля скорости на внешние возмущения [13]. При этом вводилось обрезание в пространстве волновых чисел $k \leqslant \Lambda$ и определялась зависимость эффективной вязкости от параметра обрезания Λ, т. е. предполагалось, что мелкомасштабные моды с $k > \Lambda$ действуют на крупномасштабные ($k \ll \Lambda$) как эффективная вязкость $\nu^*(\mathbf{k}, \Lambda)$.

Зависимость эффективной вязкости от параметра обрезания Λ находилась путем решения дифференциального уравнения РГ

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\nu^*(\mathbf{k}, \Lambda(\tau)) = R(\mathbf{k}, \tau)\,\nu^*(\mathbf{k}, \Lambda(\tau)), \quad \Lambda(\tau) = \Lambda e^{-\tau}$$

Оператор эволюции $R(\mathbf{k}, \tau)$ вычислялся в низшем приближении перенормированной теории возмущений в инфракрасном пределе $\mathbf{k} \to 0$. Полученное в результате решения этого уравнения выражение $\nu^*(0, \Lambda(\tau))$ отождествлялось с эффективной (перенормированной) вязкостью при волновом числе $\Lambda(\tau)$, что представляется непоследовательным.

Автором была предложена [14] процедура вычисления эффективной вязкости, не основывающаяся на использовании асимптотических методов. Эффективная вязкость $\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)$ определялась через полную функцию Грина G соотношением

$$G_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega\delta_{ij} + \nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)k^2 \tag{1}$$

и рассматривался статический предел $\nu_{ij}^*(\mathbf{k}) = \nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)|_{\omega=0}$. Определение (1) не тождественно часто используемому определению эффективной вязкости как способа параметризации влияния на моды с волновым числом k со стороны мод более мелких масштабов с $k' > k$ (теория Гейзенберга [15]) или как способа учета в методе Вилсона [4] мод с $k' > k$, исключаемых в процессе частичного усреднения по малым масштабам.

Вычисление РГ-функции в низшем приближении теории возмущений и последующее решение компенсационного уравнения РГ [2] для эффективной вязкости приводит к выражению [14]

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}) = \delta_{ij}[\nu_0^3 + {}^3\!/_2 A_d D_0 k^{-4}]^{1/3} \tag{2}$$

$$A_d = \frac{d-1}{8(d+2)}\,\frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

(S_d — площадь поверхности d-мерной сферы единичного радиуса). Используемая для получения результата (2) корреляционная функция эффективных случайных сил имеет вид (μ — «импульс нормировки»)

$$B^*(\mathbf{k}) = D_0 k^{-d}(k^2/\mu^2)^{n+\varepsilon} \tag{3}$$

Приняв $n = 2$, получим при $\varepsilon \to 0$ теорию с логарифмическими расходимостями, которые устраняются перенормировкой вязкости (согласно [9], для устранения расходимостей других перенормировок не требуется). Теории с логарифмическими расходимостями соответствует система, обладающая свойством масштабной инвариантности (отсутствием выделенного масштаба), связанной с локальностью взаимодействия в пространстве волновых чисел и каскадным механизмом переноса энергии по спектру [12].

Аналогичная процедура может быть проведена при рассмотрении турбулентной диффузии пассивной скалярной примеси. Уравнение диффузии записывается в виде

(4) $$\partial_t\theta + \psi_i\partial_i\theta - \varkappa_0\Delta\theta = q$$

где θ ($\mathbf{r}$, t) — концентрация пассивной примеси (или температура), $\varkappa_0$ — коэффициент молекулярной диффузии (температуропроводности), q — плотность источника пассивной примеси (тепла), ψ_i — компоненты скорости турбулизованной жидкости.

Рассмотрим функцию Грина G_θ, описывающую усредненный линейный отклик поля пассивной примеси на внешний источник

(5) $$G_\theta(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \delta < \theta(\mathbf{r}_2, t_2) > / \delta q(\mathbf{r}_1, t_1)$$

Эффективный коэффициент диффузии определим через фурье-образ обратной функции Грина

(6) $$G_\theta^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega + \varkappa^*(\mathbf{k}, \omega)k^2 = -i\omega + \varkappa_0 k^2 - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)$$

где Σ ($\mathbf{k}$, ω) — поправка к функции Грина, обусловленная нелинейными взаимодействиями и описывающая перенос пассивной примеси турбулентными пульсациями скорости. Следуя [2], проведем перенормировку коэффициента диффузии путем замены в (6) $\varkappa_0 \to \varkappa = Z\varkappa_0$ и добавления к Σ ($\mathbf{k}$, ω) соответствующего контрчлена $(1 - Z)\varkappa_0 k^2$. Константу перенормировки коэффициента диффузии Z определим из условия, что в точке нормировки $\mathbf{k} = \mu$, $\omega = 0$ эффективный коэффициент диффузии должен совпадать с перенормированным:

(7) $$\varkappa^*(\mathbf{k}, \omega)|_{k=\mu,\ \omega=0} = \varkappa$$

т. е. поправка к перенормированному коэффициенту диффузии в точке нормировки должна быть равна нулю.

В низшем приближении перенормированной теории возмущений имеем

(8) $$\Sigma(\mathbf{k}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{d\omega'}{2\pi} V_i(\mathbf{k})\, G_\theta^{(0)}(\mathbf{q}, \omega')\, C_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega')\, V_j(\mathbf{q})$$

(9) $$G_\theta^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = [-i\omega + \varkappa k^2]^{-1}, \quad V_j = ik_j.$$
$$C_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = P_{ij}(\mathbf{k})B^*(\mathbf{k})[\omega^2 + \nu^2 k^4]^{-1}$$
$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$$

После подстановки (9) в (8) и интегрирования по ω' получим при $\omega = 0$

$$\Sigma(\mathbf{k}, 0) = -\frac{k^2 P_{ij}(\mathbf{k})}{2\nu}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{q_i q_j B^*(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^4}\frac{1}{\nu(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 + \varkappa q^2}$$

Используя представление для B^* в виде (3) и выполняя интегрирование по $\mathbf{q}$ при помощи методов вычисления фейнмановских интегралов [2], найдем

$$\Sigma(\mathbf{k}, 0) = -\frac{k^2(d-1)D_0\Gamma(-\varepsilon)(k^2)^{-\varepsilon}}{4(4\pi)^{d/2}\nu(\nu+\varkappa)\mu^{4-2\varepsilon}\Gamma(d/2-\varepsilon)} \times$$
$$\times \int_0^1 \alpha^{d/2-1-\varepsilon}\left[\frac{\varkappa(1-\alpha)(\alpha\varkappa+\nu)}{\nu(\nu+\varkappa)}\right]^{-\varepsilon} d\alpha$$

После осуществления предельного перехода $\varepsilon \to 0$, интегрирования по α и вычитания контрчлена, обеспечивающего выполнение условия нормировки (7), найдем выражение для эффективного коэффициента диффузии в низшем приближении перенормированной теории возмущений

(10) $$\varkappa^*(\mathbf{k}, 0) = \varkappa - \frac{D_0 B_d}{\nu(\nu+\varkappa)\mu^4}\ln\frac{k^2}{\mu^2}, \quad B_d = \frac{d-1}{4d}\frac{S_d}{(2\pi)^d}$$

Определим эффективное число Прандля соотношением

(11) $\quad \mathrm{Pr}^* (\mathbf{k}) = \nu^* (\mathbf{k}, 0)/\varkappa^* (\mathbf{k}, 0)$

При вычислении эффективного числа Прандтля в рамках перенормированной теории возмущений с учетом соображений размерности и условия изотропии будем иметь

(12) $\quad [\mathrm{Pr}^* (\mathbf{k})]^{-1} = F (k^2/\mu^2,\ k_d{}^2/\mu^2,\ \varkappa/\nu), \quad k_d D_0^{1/4} \nu_0^{-3/4}$

Из условия нормировки (7) следует также

(13) $\quad F (1, y, g) = g$

Для нахождения функции $F (x, y, g)$ воспользуемся методом РГ, который дает возможность исходя из низшего приближения теории возмущений для $F (x, y, g)$ уточнить вид этой функции путем суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений.

Условие РГ-инвариантности, отражающее наличие произвола в выборе точки нормировки μ, может быть записано в виде [14]

(14) $\quad F (k^2/\mu^2,\ k_d{}^2/\mu^2,\ \varkappa/\nu) = F (k^2/\mu_1{}^2,\ k_d{}^2/\mu_1{}^2,\ \varkappa_1/\nu_1)$

Положив в (14) $k = \mu$ и используя условие нормировки (13), найдем

(15) $\quad \varkappa_1/\nu_1 = F (\mu_1{}^2/\mu^2,\ k_d{}^2/\mu^2,\ \varkappa/\nu)$

После подстановки (15) в (14) получим функциональное уравнение РГ [2]

(16) $\quad F (x, y, g) = F (x/t,\ y/t,\ F (t, y, g))$

$\quad (k^2/\mu^2 = x,\ k^2/\mu^2 = y,\ \mu_1{}^2/\mu^2 = t,\ \varkappa/\nu = g)$

Дифференцируя (16) по t и положив затем $t = 1$, получим эквивалентное (16) дифференциальное уравнение РГ

(17) $\quad \{x\, \partial/\partial x + y\, \partial/\partial y - \beta (y, g)\partial/\partial g\} F (x, y, g) = 0$

$\quad \beta (y, g) = \partial F (x, y, g)/\partial x\, |_{x=1}$

В соответствии с методом РГ функцию $\beta (y, g)$ (так называемую РГ-функцию) определим исходя из низшего приближения перенормированной теории возмущений. Используя (3), (10) и определение (17), найдем

$$\beta (y, g) = \frac{y^2}{1 + {}^3/_2 A_d y^2} \left[A_d g - \frac{B_d}{1+g} \right]$$

При известной функции $\beta (y, g)$ решение уравнения (17) находится методом характеристик и неявно определяется соотношением

(18) $\quad [\sigma_- - F]^{a_-} [\sigma_+ + F]^{a_+} [1 + 3A_d y^2/(2x^2)] = C$

$$\sigma_\pm = {}^1/_2 \left(\sqrt{1 + 4B_d/A_d} \pm 1\right), \quad a_\pm = 3\sigma_\mp/(\sigma_+ + \sigma_-)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы в мелкомасштабной области ($k \to \infty$) эффективное число Прандтля Pr^* переходило в молекулярное $\mathrm{Pr}_0 = \nu_0/\varkappa_0$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} F (x, y, g) = \mathrm{Pr}_0{}^{-1}$$

то постоянная C в (18) может быть определена из этого дополнительного условия и уравнение (18) примет вид

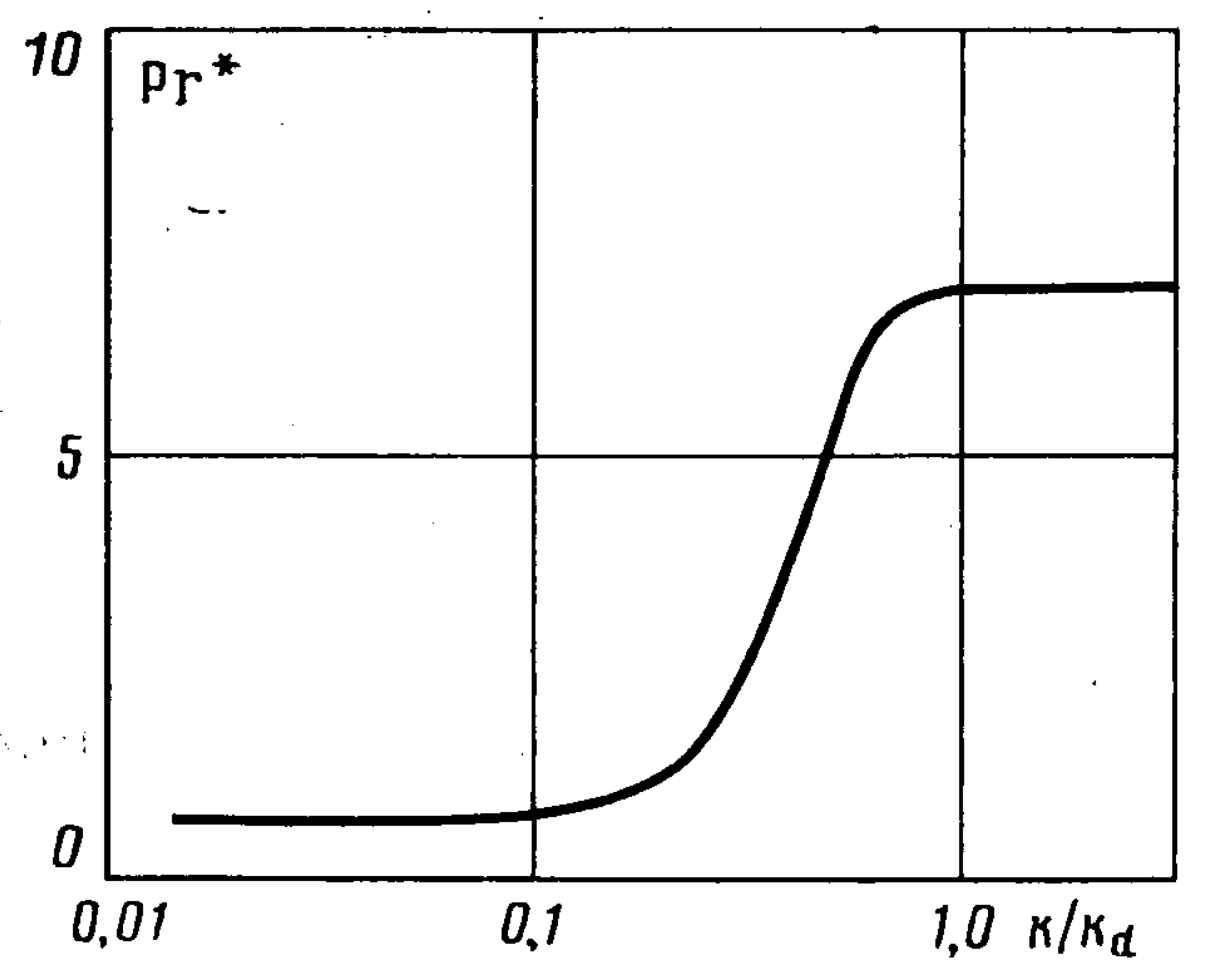
(19) $$\left[\frac{\sigma_- - F}{\sigma_- - \mathrm{Pr}_0^{-1}}\right]^{a_-} \left[\frac{\sigma_+ + F}{\sigma_+ + \mathrm{Pr}_0^{-1}}\right]^{a_+} = \left[1 + \frac{3A_d y^2}{2x^2}\right]^{-1}$$

Формула (19) представляет собой записанное в неявном виде решение дифференциального уравнения РГ (17) для определяющей эффективное число Прандтля функции $F(x, y, g)$. Согласно (3), (9), (18), эффективное число Прандтля зависит от молекулярного числа Прандтля $\nu_0/\varkappa_0$, отношения k/k_d и размерности пространства d.

Из приведенного решения следует, что в соответствующей инерционному интервалу $k/k_d \ll 1$ «крупномасштабной» области турбулентное число Прандтля имеет универсальную асимптотику

$$\lim \mathrm{Pr}^* (\mathbf{k}) = 2[\sqrt{1 + 8(d+2)/d} - 1]^{-1} \tag{20}$$

не зависящую от значения молекулярного числа Прандтля, а также от природы рассматриваемого процесса переноса (диффузия, теплопроводность и пр.). Асимптотический результат (20) был получен ранее в рамках вилсоновского подхода [16] и при помощи теоретико-полевой РГ [17]. Позднее этот результат был воспроизведен в [18], однако при этом использовался представляющийся неудовлетворительным подход, когда эффективные коэффициенты переноса $\nu^* (\mathbf{k}, \Lambda)$ и $\varkappa^* (\mathbf{k}, \Lambda)$ вычислялись при $\mathbf{k} = 0$, а разделяющая «быстрые» и «медленные» моды граница Λ затем отождествлялась с волновым числом k (см. также [13]).



Вид зависимости эффективного (турбулентного) числа Прандтля от волнового числа k при $d = 3$ для модельного примера $\mathrm{Pr}_0 = 7$ (молекулярная диффузия для воды при 20° С) представлен на фигуре. Видно, что переход от одного асимптотического режима, при котором $k/k_d \ll 1$ и турбулентное число Прандтля не зависит от молекулярного (инерционный интервал), к другому асимптотическому режиму $k/k_d \gg 1$, где перенос осуществляется молекулярным движением (интервал диссипации), происходит довольно быстро (в пределах одного десятичного порядка). Отсюда можно сделать предположение, что инфракрасная асимптотическая техника РГ применима для исследования свойств развитой турбулентности в инерционном интервале спектра, при этом амплитудные числовые множители определяются положением неподвижных точек РГ-преобразования, а показатели степенного поведения находятся из свойств преобразования, линеаризованного вблизи этих точек.

В последнее время предметом обсуждения стал вопрос о связи метода РГ с перенормированной теорией возмущений при описании турбулентности, а также о роли локальных и нелокальных межмодовых взаимодействий [10, 19]. Следует отметить, что в этих дискуссиях под методом РГ подразумевается только вилсоновский подход, заключающийся в последовательном уменьшении числа рассматриваемых мод в многомодовой системе путем усреднения по узкой полосе спектра мелкомасштабных и быстропеременных мод [12] и нахождения методами теории возмущений усредненного влияния исключенных мод на оставшиеся. Именно эта формулировка метода РГ используется при теоретическом анализе турбулентности [1]. В качестве группового параметра при этом выступает параметр обрезания в пространстве волновых чисел (граница между быстрыми и медленными модами). С помощью подобной процедуры удается определить показатели степенного поведения на основе использования асимптоти-

[1] *Теодорович Э. В.* Методы теории поля и ренормализационной группы в статистической гидродинамике: Препринт № 302. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1987. 69 с.

ческих методов нелинейной механики — анализа поведения вблизи неподвижной точки РГ-преобразования [3, 4]. Как справедливо было отмечено Крейчнаном [10], такой подход дает возможность определить показатели степенного поведения, но не амплитудные числовые множители. Однако степенные показатели могут быть найдены из простых физических соображений, использующих понятие вихревой вязкости, и в этом смысле применение метода РГ ничего нового не дает. Крейчнан подчеркнул также, что использование низших приближений теории возмущений непригодно для описания каскадных процессов в инерционном интервале и поэтому метод РГ не прибавляет строгости при обосновании показателей масштабного подобия. Утверждение, что метод РГ с использованием низших приближений теории возмущений не описывает энергетического каскада, приводится также и другими авторами [11, 18].

В применяемой автором формулировке метода РГ, предложенной еще в 1855 г. Боголюбовым и Ширковым в квантовой теории поля [2], свойство РГ-инвариантности используется для улучшения результатов теории возмущений и дает возможность осуществить суммирование некоторой бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений. При полевой формулировке объектами рассмотрения с самого начала являются усредненные характеристики гидродинамических полей, такие, как функции Грина и статистические моменты различных порядков, и операции частичного усреднения не существует. РГ-инвариантность связана с наличием произвола в процедуре перенормировки при построении перенормированной теории. Эта неоднозначность имеет под собой физическое основание и не связана с наличием расходимостей, она отражает свойство независимости физических результатов от способа задания начальных и граничных условий (функциональная автомодельность [20]).

Метод РГ представляет собой способ рассмотрения многомодовых систем с сильным межмодовым взаимодействием, которые согласно предположению [21] проявляют тенденцию к самоподобию, являющемуся следствием локальности взаимодействия и каскадного механизма переноса энергии по спектру. В применении к таким системам метод РГ в формулировке [2] означает, что по теории возмущений рассчитывается отдельное звено каскадного процесса, а каскадная цепочка получается в результате суммирования отдельных звеньев при помощи РГ. Эта процедура аналогична тому, как в теории непрерывных групп Ли конечные преобразования строятся по образующим алгебру Ли генераторам инфинитезимальных преобразований. В соответствии с этой аналогией роль генераторов выполняют РГ-функции $\beta(y, g)$. Хотя в низшем приближении теории возмущений функция $F(x, y, g)$ определяется взаимодействием моды с волновым вектором μ со всеми остальными модами, т. е. учитывает локальные и нелокальные в k-пространстве взаимодействия, производная этой функции в точке нормировки (РГ-функция) определяется только взаимодействием с модами близких масштабов. Решение дифференциального уравнения РГ (17) соответствует суммированию бесконечно большого числа отдельных бесконечно малых звеньев каскадной цепочки.

Изложенная выше и примененная автором для описания турбулентности в данной работе (а также в [14]) полевая формулировка метода РГ является способом математического описания каскадных процессов. Она дает возможность находить поведение физических величин не только в асимптотической области $k \to 0$, но и в более широкой области пространства волновых чисел, где реализуется каскадный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gell-Mann M.*, *Low P. E.* Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. 1954. V. 95. No. 5. P. 1300—1312.
2. *Боголюбов Н. Н.*, *Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука. 1984. 597 с.
3. *Wilson K.* Renormalization group and strong interactions // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. No. 8. P. 1818—1846.
4. *Ма Ш. К.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
5. *Brezin E.*, *Le Guillou J. C.*, *Zinn-Justin J.* Field theoretical approach to critical phenomena // Phase transitions and critical phenomena. Ed By C. Domb, McGreen. N.Y.: Acad. Press. 1975. V. 6. P. 125—247.
6. *DeDominicis C.*, *Peliti L.* Field-theory renormalizaion and critical dynamics above T_c: Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems // Phys. Rev. B. 1978. V. 18. No. 1. P. 353—376.
7. *Forster D.*, *Nelson D. R.*, *Stephen M. J.* Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. 1977. V. 16. No. 2. P. 732—749.

8. *DeDominicis C., Martin P. C.* Energy spectra of certain randomly-stirred fluids // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. No. 1. P. 419—422.
9. *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Письмак Ю. М.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: Размерности составных операторов // Теорет. и мат. физика. 1983. Т. 57. № 2. С. 268—281.
10. *Kraichnan R. H.* Hydrodynamic turbulence and the renormalization group // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. No. 6. P. 3281—3289.
11. *McComb W. D.* Renormalisation group methods applied to the numerical simulation of fluid turbulence // Theoretical Approaches to Turbulence. N.Y.: Springer Verlag. 1985. P. 187—207.
12. *Wilson K. G.* The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem // Revs. Modern Phys. 1975. V. 47. No. 4. P. 773—840.
13. *Fournier J.-D., Frisch U.* Remarks on the renormalization group in statistical fluid dynamics // Phys. Rev. A. 1983. V. 28. No. 2. P. 1000—1002.
14. *Теодорович Э. В.* К вычислению турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 29—36.
15. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
16. *Fournier J.-D., Sulem P.-L., Pouquet J.* Infrared properties of forced magnetohydrodynamic turbulence // J. Phys. A: Math. and Gen. 1982. V. 15. No. 4. P. 1393—1420.
17. *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Гнатич М.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: Включение пассивной примеси // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 58. № 1. С. 72—78.
18. *Yakhot V., Orszag S. A.* Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // J. Scient. Computing. 1986. V. 1. No. 1. P. 3—51.
19. *Kraichnan R. H.* An interpretation of the Yakhot — Orszag turbulence theory // Phys. Fluids. 1987. V. 30. No. 8. P. 2400—2405.
20. *Ширков Д. В.* Ренормализационная группа, принцип инвариантности и функциональная автомодельность // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1982. Т. 263. № 1. С. 64—67.
21. *Кузьмин Г. А., Паташинский А. З.* Гипотеза подобия и гидродинамическое описание турбулентности // Ж. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1972. Т. 62. № 3. С. 1175—1184.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1987