Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 532.51 + 532.59

ДИФФУЗИОННОЕ РАСПЛЫВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Городцов В. А.

Задача о влиянии случайной силы, зависящей от времени, на течения жидкостей решается с использованием перехода в неинерциальную систему координат. Показано, что под действием случайной гауссовой силы первоначально локализованные возмущения расплываются диффузионным образом. Приведены явные аналитические решения для солитона внутренних волн при наличии случайной силы. Продемонстрировано, что в присутствии солитона рост пульсаций скорости может как усиливаться, так и замедляться.

1. Эволюция широкого класса одномерных возмущений поля скоростей течения $u(x, t)$ в гидродинамике описывается нелинейным уравнением общего вида [1]

$$u_t + uu_x + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dyF(y-x)\,u_{yy}(y,t) = f \tag{1.1}$$

В отсутствие внешней силы ($f = 0$) в ряде случаев задача Коши для однородного уравнения может быть решена при помощи сведения к решению линейных задач, и за счет баланса нелинейности, дисперсии и диссипации возможно существование самосохраняющихся нелинейных волн (солитонов, ударных волн). В частности, при $F(x) = -\mu\delta(x)$ получаем уравнение Бюргерса, сводящееся к линейному уравнению диффузии при замене Хопфа — Коула. При

$$F(x) \sim -\delta'(x), \quad P\frac{1}{x}, \quad P\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2h} - \operatorname{sgn} x\right)$$

уравнения оказываются вполне интегрируемыми уравнениями Кортевега — де Вриза, Бенджамина — Оно и уравнением внутренних волн в бассейне конечной глубины соответственно (символ P указывает на то, что сингулярные интегралы следут брать в смысле главного значения). Приводимость задачи к линейной в этих случаях также хорошо известна [2].

Что касается неоднородного уравнения (1.1), то, воспользовавшись эквивалентностью действия пространственно однородной силы $f(t)$ и подходящего ускорения системы координат, заменой переменных

$$\begin{aligned} &x - x_0(t) = \xi, \quad u(x, t) - u_0(t) = v(\xi, t) \\ &\partial x_0/\partial t = u_0, \quad \partial u_0/\partial t = f(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

решение неоднородного уравнения (1.1) для $u(x, t)$ можно свести к решению точно такого же однородного уравнения для $v(\xi, t)$ (решение однородного уравнения будем далее обозначать буквой v в отличие от решения неоднородного уравнения u).

При помощи известных решений однородного уравнения и указанной замены переменных можно оценить влияние внешних сил. Под действием детерминированной внешней силы $f(t)$ наводится однородное «фоновое» течение $u_0(t) = \int dtf$ и переменное движение «центра тяжести» решения однородного уравнения $x_0(t) = \int dtu_0$. В частности, при осциллирующей внешней силе фон и центр тяжести также осциллируют. Под действием случайной силы возникнут флуктуации того и другого.

Ограничимся сначала анализом среднего течения, вызываемого гауссовой случайной силой с нулевым средним значением $\langle f \rangle = 0$. В соответствии с преобразованием (1.2) будем иметь

$$\text{(1.3)} \qquad \langle u(x,t)\rangle = \langle v(x - x_0(t), t)\rangle = \left\langle \exp\left(-x_0(t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\rangle v(x,t) = \\ = \exp(\tau\partial^2/\partial x^2)\, v(x,t), \qquad \tau \equiv \langle x_0{}^2(t)\rangle/2$$

Последнее важное равенство доказывается разложением экспоненты в ряд, его почленным осреднением и обратным сворачиванием полученного ряда в экспоненту. При этом благодаря гауссовости случайной силы все нечетные моменты обращаются в нуль, а четные сводятся к целым степеням второго момента.

Операторную связь (1.3) можно представить также в виде следующего разложения Фурье или интегральной свертки:

$$\text{(1.4)} \qquad \langle u(x,t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dkv(k,t)\exp(-k^2\tau + ikx) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dyg(y-x,t)\,v(y,t), \qquad g(x,t) = (4\pi\tau)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)$$

Если теперь поставить вопрос о влиянии случайной гауссовой силы на нелинейные волны типа солитонов (или ударных волн), распространяющихся в отсутствие сил без изменения своей формы $V(x - ct)$, то из (1.3) получим

$$\text{(1.5)} \qquad \langle u(x,t)\rangle = \exp(\tau\partial^2/\partial\eta^2)V(\eta), \quad \eta = x - ct$$

т. е. под действием случайных сил такие волны должны расплываться диффузионным образом

$$\text{(1.6)} \qquad \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial\tau} = \frac{1}{D(t)}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} = \frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial\eta^2}, \qquad D(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle x_0{}^2(t)\rangle$$

Из интегрального представления (1.4) при больших временах, когда τ велико и основной вклад в разложение Фурье дают малые k, следует упрощенная формула

$$\text{(1.7)} \qquad \langle u(x,t)\rangle \approx v(k=0,t)g(x,t), \quad t \to \infty$$

которая приемлема при достижении той асимптотической стадии, когда диффузионная ширина $\sim\tau^{1/2}$ станет гораздо больше исходной ширины возмущения.

Для случайных сил типа «белого шума» имеем

$$\text{(1.8)} \qquad \langle f(t_1)f(t_2)\rangle = f_0{}^2\delta(t_1 - t_2), \quad \tau = {}^1/_2\langle x_0{}^2(t)\rangle = {}^1/_6 f_0{}^2 t^3$$

и на далекой стадии расплывания солитона ($t \to \infty$) его ширина (в среднем) будет расти как $\tau^{1/2} \sim t^{3/2}$, в то время как высота — убывать как $\tau^{-1/2} \sim t^{-3/2}$. При этом осредненная «площадь солитона» со временем не меняется

$$\text{(1.9)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle u(x,t)\rangle = V \qquad (k=0)$$

что является следствием исходного уравнения (1.1) при $\langle f \rangle = 0$.

Примером вполне интегрируемого однородного уравнения типа (1.1) служит уравнение внутренних волн [2]

$$v_t + vv_x + \frac{1+h}{2h^2} \int d\xi \left[\operatorname{cth} \frac{\pi(\xi - x)}{2h} - \operatorname{sgn}(\xi - x) \right] v_{\xi\xi}(\xi, t) = 0 \tag{1.10}$$

которое допускает решение в виде солитона (при $0 < \varkappa h < \pi$)

$$V(\eta) = \left(1 + \frac{1}{h}\right) \frac{2\varkappa \sin \varkappa h}{\cos \varkappa h + \operatorname{ch} \varkappa\eta} = \tag{1.11}$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{h}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh} kh}{\operatorname{sh} k\pi\varkappa^{-1}} \exp(ik\eta)$$

Расплывание такого солитона после включения (в момент $t = 0$) случайных сил будет описываться разложением Фурье типа (1.4)

$$\langle u(x, t)\rangle = 2\left(1 + \frac{1}{h}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh} kh}{\operatorname{sh} k\pi\varkappa^{-1}} \exp(-k^2\tau + ik\eta) \tag{1.12}$$

Для больших времен ($\tau \to \infty$) высота солитона, определяемая как величина $\langle u \rangle$ при $\eta = 0$, составляет $2\varkappa(1 + h)(\pi\tau)^{-1/2}$. Поскольку площадь солитона равна постоянной $V(k = 0) = 4\varkappa(1 + h)$, то его ширина (отношение площади к высоте) растет как $2(\pi\tau)^{1/2}$.

В пределе «мелкой воды» ($h \to 0$, $\varkappa h \to 0$) свободный солитон внутренних волн (1.11) принимает классическую форму $\varkappa^2/\operatorname{ch}^2(\varkappa\eta/2)$ и удовлетворяет уравнению Кортевега — де Вриза $v_t + vv_x + {}^1/_3 v_{xxx} = 0$. Поведение такого солитона в поле случайных сил анализировалось ранее [3], и решение было представлено в виде (1.12) с k вместо $(1 + 1/h)\operatorname{sh} kh$.

В пределе «глубокой воды» ($h \to \infty$, $\varkappa \to 0$, $\varkappa h = \pi - \varkappa/c$) свободный солитон удовлетворяет уравнению Бенджамина — Оно и имеет лоренцеву форму

$$v_t + vv_x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{v_{\xi\xi}(\xi, t)}{\xi - x} = 0, \quad V(\eta) = \frac{4c}{1 + c^2\eta^2} \tag{1.13}$$

Гауссов белый шум приводит к расплыванию солитона, описываемому формулой типа (1.12) с заменой $(1 + 1/h)\operatorname{sh} kh/\operatorname{sh} k\pi\varkappa^{-1}$ на $\exp(-|k|/c)$. Результат можно выразить через функцию ошибок

$$\langle u(x, t)\rangle = (\pi/\tau)^{1/2} \exp \zeta^2 \operatorname{erfc} \zeta + \text{c.c.}, \quad 2\zeta\tau^{1/2} \equiv i\eta + 1/c \tag{1.14}$$

Для высоты, ширины и площади такого солитона имеем соответственно $2(\pi/\tau)^{1/2}$, $2(\pi\tau)^{1/2}$ и 4π.

Что касается взаимодействия нескольких солитонов, то по прошествии большого времени решение задачи, как известно [1, 2], будет близко к сумме свободных равномерно движущихся солитонов. Под действием случайных сил при больших временах t расширение солитонов ($\sim t^{3/2}$) происходит быстрее их «разбегания» ($\sim t$) и на далекой стадии эволюции все солитоны «сливаются» в одно слабое возмущение [4].

2. Предыдущий анализ непосредственно обобщается на многомерный случай. Так, трехмерные неоднородные уравнения Навье — Стокса, описывающие течение однородной несжимаемой жидкости (плотности $\rho = 1$) при действии сил $\mathbf{f}(t)$ заменой переменных (ср. (1.2))

$$x_i - x_{i0}(t) = \xi_i, \quad u_i(\mathbf{x}, t) - u_{i0}(t) = v_i(\boldsymbol{\xi}, t)$$
$$\partial x_{0i}/\partial t = u_{i0}, \quad \partial u_{i0}/\partial t = f_i(t)$$

можно привести к таким же однородным уравнениям для $v_i(\boldsymbol{\xi}, t)$.

Отсюда (вполне аналогично тому, как в одномерном случае) находим

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t)\rangle = \langle v_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t), t)\rangle = \exp(\tau\Delta) v_i(\mathbf{x}, t) = = (2\pi)^{-3}\int d^3k v_i(\mathbf{k}, t)\exp(-k^2\tau + i\mathbf{k}\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

если предполагать векторную случайную силовую функцию гауссовой и изотропной. При этом влияние случайных сил на среднее течение сказывается через одну скалярную характеристику τ, через которую выражается корреляция $\langle x_{i0}(t) x_{j0}(t)\rangle = 2\tau\delta_{ij}$.

Из (2.1) при $\tau \to \infty$ следует простая асимптотическая оценка (ср. с (1.7))

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t)\rangle \approx (4\pi\tau)^{-3/2} v_i(k = 0, t)\exp[-\mathbf{x}^2/(4\tau)]$$

Таким образом, и в трехмерном случае влияние гауссовой случайной силы, зависящей от времени, сводится к диффузионному расширению первоначально локализованных возмущений. Под действием силового белого шума диффузионное расплывание ранее сохранявшего свою форму возмущения происходит так же, как в одномерном случае ($\sim t^{3/2}$), а амплитуда спадает быстрее из-за геометрической расходимости ($\sim t^{-9/2}$). При этом интеграл

$$\int d^3x \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rangle = \mathbf{V}\ (\mathbf{k} = 0)$$

не меняется со временем.

3. Перейдем к анализу более высоких моментов поля течений, вызываемых случайной силой в присутствии начального возмущения v. Ограничимся рассмотрением одномерной модели (1.1). Согласно (1.2), скорость таких течений $u(x, t)$ представляется суммой $u_0(t) + v(x - x_0(t), t)$ со случайными функциями $u_0(t)$, $x_0(t)$ и регулярным решением $v(x, t)$ однородного уравнения типа (1.1). Вычисление моментов поля скоростей $u(x, t)$ поэтому сводится к нахождению корреляций «фона» $u_0(t)$ и функции v от случайных перемещений $x_0(t)$

$$\Big\langle \prod_i u(x_i, t_i)\Big\rangle = \Big\langle \prod_i u_{0i}\Big\rangle + \Big\langle u_{01}\prod_{i\neq 1} v(x_i - x_{0i}, t_i)\Big\rangle + + \ldots + \Big\langle \prod_i v(x_i - x_{0i}, t_i)\Big\rangle \tag{3.1}$$

Здесь и далее используются сокращенные обозначения $x_0(t_i) \equiv x_{0i}$, $u_0(t_i) \equiv u_{0i}$.

Представив функцию $v(x - x_0(t), t)$ в виде произведения оператора случайного сдвига $\exp(-x_0(t)\partial/\partial x)$ и регулярной функции $v(x, t)$, найдем

$$\Big\langle \prod_i v(x_i - x_{0i}, t_i)\Big\rangle = \Big\langle \prod_i \exp\Big(-x_{0i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big\rangle \prod_k v(x_k, t_k) = = \exp\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\langle x_{0i}x_{0j}\rangle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big)\prod_k v(x_k, t_k) \tag{3.2}$$

если использовать обобщение формулы (1.3) для произвольного гауссового случайного поля $a(t)$ ($a_i \equiv a(t_i)$) и параметров α_i, которые могут быть как числами, так и операторами $\partial/\partial x_i$

$$\Big\langle \prod_i \exp(\alpha_i a_i)\Big\rangle = \exp\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\langle a_i a_j\rangle\Big) \tag{3.3}$$

Для одновременных корреляций (с $t_1 = \ldots = t_n = t$) из (3.2) следует

(3.4) $$\left\langle \prod_i v(x_i - x_0(t), t) \right\rangle = \exp\left(\tau \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \prod_i v(x_i, t)$$
$$\tau = \frac{1}{2} \langle x_0^2(t) \rangle, \quad x = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

так что такие корреляции удовлетворяют тому же уравнению диффузии (1.6), что и средняя скорость $\langle u(x, t) \rangle = \langle v(x - x_0(t), t \rangle$.

Для одновременных корреляций в одной и той же точке пространства ($x_1 = \ldots = x_n = x$) получаем

(3.5) $$\langle v^n (x - x_0(t), t) \rangle = \exp(\tau \partial^2/\partial x^2) v^n(x, t) = g * v^n \equiv$$
$$\equiv \int dy g(x - y, \tau) v^n(y, t), \; g(x, \tau) = \exp(\tau \partial^2/\partial x^2) \delta(x)$$

Следовательно, задача об одноточечных одновременных моментах $\langle v^n \rangle$ поля течений, вызванных гауссовой случайной силой (включаемой при $t = 0$) и первоначально стационарно движущимся возмущением $V(x - ct)$, сводится к решению простой начальной задачи

(3.6) $$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle v^n \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \langle v^n \rangle, \quad \langle v^n \rangle |_{\tau=0} = V^n(\eta)$$

При $n = 1$ имеем результат п. 1.

Чтобы найти корреляционные функции поля $u(x, t)$, нужно согласно (3.1) определить еще корреляции между фоном $u_0(t)$ и $v(x - x_0(t), t)$.

Для этого можно использовать следствия формулы (3.3)

(3.7) $$\langle \Pi \rangle = E, \quad \langle a_1 \Pi \rangle = \sum_i \alpha_i \langle a_1 a_i \rangle E$$
$$\langle a_1 a_2 \Pi \rangle = \left(\langle a_1 a_2 \rangle + \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \langle a_1 a_i \rangle \langle a_2 a_j \rangle \right) E, \ldots$$
$$\Pi \equiv \prod_i \exp(\alpha_i a_i), \quad E \equiv \exp \left\langle \left(\sum_k \alpha_k a_k \right)^2 \Big/ 2 \right\rangle$$

получаемые дифференцированием (3.3) по некоторым параметрам α_i, которые затем приравниваются нулю.

При помощи (3.7) можно получить, например

(3.8) $$\langle u_0(t_1) v(x - x_0(t_2), t_2) \rangle = -\langle u_0(t_1) x_0(t_2) \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, t_2) \rangle$$

В итоге корреляционные функции поля скорости $u(x, t)$ оказываются выраженными через вторые моменты случайных функций $u_0(t)$, $x_0(t)$, которые в свою очередь выражаются через корреляционную функцию гауссовой случайной силы $\langle f(t_1) f(t_2) \rangle$. При дельта-коррелированной силе типа (1.8) имеем

(3.9) $$\langle u_0(t_1) u_0(t_2) \rangle = f_0^2 \min(t_1, t_2)$$
$$\langle u_0(t_1) x_0(t_2) \rangle = \frac{1}{2} f_0^2 \begin{cases} 2t_1 t_2 - t_1^2, & t_1 < t_2 \\ t_2^2, & t_1 > t_2 \end{cases}$$
$$\langle x_0(t_1) x_0(t_2) \rangle = \frac{1}{6} f_0^2 \begin{cases} 3t_1^2 t_2 - t_1^3 & t_1 < t_2 \\ 3t_1 t_2^2 - t_2^3 & t_1 > t_2 \end{cases}$$

и, в частности, для одновременных корреляций $\langle u_0^2(t) \rangle = f_0^2 t$, $\langle u_0(t) x_0(t) \rangle = {}^1\!/_2 f_0^2 t^2$, $2\tau \equiv \langle x_0^2(t) \rangle = {}^1\!/_3 f_0^2 t^3$.

Для дисперсии скорости $\langle u'^2(x, t) \rangle = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$ на основании предыдущего можно написать

(3.10) $$\langle u'^2 \rangle = \langle u_0^2 \rangle - 2 \langle u_0 x_0 \rangle \frac{\partial}{\partial x} g * v + g * v^2 - (g * v)^2$$
$$g * \varphi \equiv \int dy g(x - y, \tau) \varphi(y, t) = \exp\left(\tau \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \varphi(x, t)$$

Проста ее оценка при малых временах (с момента включения случайной силы). Используя разложение в ряд по τ, в случае первоначально стационарно движущегося регулярного возмущения $V(\eta)$ находим

$$\langle u'^2\rangle = \langle u_0^2\rangle - 2\langle u_0 x_0\rangle \partial V(\eta)/\partial\eta + \langle x_0^2\rangle(\partial V(\eta)/\partial\eta)^2 + o(\tau)$$

Поскольку для солитона характерна форма с одной вершиной, то впереди его (где $\partial V/\partial\eta < 0$) при малых временах среднеквадратичные пульсации скорости будут расти быстрее, а позади (где $\partial V/\partial\eta > 0$) рост их будет замедляться из-за присутствия солитона.

Для выполнения оценок при больших временах ($\tau \to \infty$) удобнее использовать разложения в ряды не исходных величин $V(\eta)$, а их фурье-образов $V(k)$ (см. (1.4), (1.7)).

Полагая, что $V(k)$ для симметричного солитонного решения разлагается в ряд в окрестности $k = 0$ (тогда в силу симметрии разложение фактически идет по целым степеням k^2), найдем (H_n — полиномы Эрмита)

$$\langle u\rangle = g * V = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} V^{(2m)} \frac{\partial^{2m} g}{\partial\eta^{2m}} = \tag{3.11}$$

$$= g \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m!}\left(-\frac{1}{4\tau}\right)^m V^{(2m)} H_{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m!} V^{(2m)} \frac{\partial^m g}{\partial\tau^m}$$

$$V^{(2m)} \equiv \left.\frac{\partial^{2m} V(k)}{\partial k^{2m}}\right|_{k=0}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) g(\eta, \tau) = 0, \quad H_n = H_n\left(\frac{\eta}{2\tau^{1/2}}\right)$$

Из обычного определения полиномов Бернулли $B_n(x)$ через производящую функцию $t\exp(xt)/(\exp t - 1)$ следует формула

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha k}{\operatorname{sh}\beta k} = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\beta k)^{2m}}{(2m+1)!} B_{2m+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)$$

при помощи которой находятся коэффициенты разложения около $k = 0$ фурье-образа солитона внутренних волн (1.11)

$$V^{(n)} = \delta_{n,2m} \frac{8\pi(1+h)}{2m+1}\left(\frac{2\pi}{\varkappa}\right)^{2m} B_{2m+1}\left(\frac{\pi+\varkappa h}{2\pi}\right)$$

Для солитона уравнения Кортевега — де Вриза отсюда, в частности, следует (при $h \mapsto 0$)

$$V^{(n)} = -4\varkappa\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)^{2m}(2^{2m}-2) B_{2m}\delta_{n,2m}, \quad B_n = B_n(0) \tag{3.12}$$

Подстановкой (3.12) в (3.11) получается формула, совпадающая с точностью до некоторых различий в обозначениях с формулой (В.6) из [3].

Фурье-образ солитона уравнения Бенджамина — Оно $V(k) = 4\pi\exp(-|k|/c)$ не аналитически зависит от волнового числа, но после разложения его на слагаемые $V(k) = 4\pi\operatorname{ch}(k/c) + 4\pi\operatorname{sgn} k\operatorname{sh}(-k/c)$ и здесь можно получить разложение (3.11) с заменой $V^{(2m)}$ на $4\pi c^{-2m}$ с дополнительными слагаемыми, записываемыми символически следующим образом:

$$i\left(\frac{4\pi}{\tau}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left[\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\tau}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{i\eta}{2\tau^{1/2}}\right)\right]$$

Такой же результат можно получить из (1.14).

В силу полной аналогии представлений (3.5), (3.6) для средней скорости и моментов $\langle v^n\rangle$ для последних могут быть выписаны похожие разложения. Предполагая аналитическим поведение фурье-образов $V^n(\eta)$ при малых волновых числах и ограничиваясь главными членами асимптотик, при больших временах будем иметь

$$\langle u\rangle \approx C_1 g(\eta, \tau),\ \langle v^2\rangle \approx C_2 g(\eta, \tau), \ldots$$
$$C_1 = \int d\eta V(\eta),\ C_2 = \int d\eta V^2(\eta), \ldots$$

Для солитона внутренних волн (1.11)

$$C_1 = 4\varkappa h (1 + 1/h),\ C_2 = 8\varkappa (1 + 1/h)^2 (1 - \varkappa h \operatorname{ctg} \varkappa h)$$

Эти формулы вместе с (3.10) позволяют утверждать, что в первом приближении для дисперсии скорости справедлива оценка (она остается верной и для солитона уравнения Бенджамина — Оно)

$$\langle u'^2\rangle \approx \langle u_0{}^2\rangle + \langle v^2\rangle,\ t \to \infty$$

показывающая, что при больших временах пульсации скорости несколько больше в области, занимаемой солитоном.

Таким образом, при броуновском движении солитона он диффузионно расплывается и может усиливать пульсационные движения окружающей жидкости. Однако на более ранних стадиях влияние присутствия солитона на случайные возмущения более значительно и более сложно. Так, например, непосредственно после включения случайной силы возмущения нарастают быстрее впереди бегущего солитона и медленнее позади.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.
2. *Абловиц М.*, *Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир. 1987. 478 с.
3. *Wadati M.* Stochastic Korteweg — de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. No. 8. P. 2642—2648.
4. *Wadati M.*, *Akutsu Y.* Stochastic Korteweg — de Vries equation with and without damping // J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 53. No. 10. P. 3342—3350.

Москва

Поступила в редакцию 22.VI.1987