Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 531.384

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Мощук Н. К.

Рассматривается движение без скольжения строго выпуклого тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Наличие трех первых интегралов (явный вид двух из которых не известен) позволяет провести качественный анализ движения. Изучается характер изменения угла нутации, дан анализ движения точки касания на поверхности тела и на опорной плоскости. Показано, что в фазовом пространстве имеются трехмерные торы с условно-периодическими движениями. Рассматривается задача о движении тела, близкого по форме и расположению масс к динамически и геометрически симметричному телу. При помощи обобщений КАМ-теории на обратимые системы устанавливается сохранение большинства инвариантных торов.

Впервые задача о качении тяжелого тела вращения была рассмотрена Чаплыгиным [1]. Исследование этой задачи было продолжено в [2]. К настоящему времени достаточно подробно изучен вопрос о существовании и устойчивости стационарных движений тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости [3—8]. Проведен [9] качественный анализ движения без скольжения тяжелого однородного трехосного эллипсоида на горизонтальной плоскости в предположении его близости к шару, а также исследованы [10] периодические движения эллипсоида.

1. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат с началом в точке O горизонтальной плоскости $O\xi\eta$, по которой движется тело (ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх), а $Gxyz$ — жестко связанная с телом система координат. Начало связанной системы координат находится в центре тяжести, а оси направлены по его главным центральным осям инерции. Взаимную ориентацию связанной и неподвижной систем координат зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Введем также подвижную систему координат $Q\xi_1\eta_1\zeta_1$, оси которой параллельны, соответственно, осям ξ, η, ζ, а точка Q — проекция центра тяжести тела G на горизонтальную плоскость.

В качестве координат, задающих положение тела, примем три угла Эйлера и две координаты ξ, η центра тяжести G в системе координат $O\xi\eta\zeta$. Третья координата ζ — высота центра тяжести над опорной плоскостью — будет при заданной форме поверхности, ограничивающей тело, функцией углов θ, φ.

На систему наложено две неинтегрируемых связи: горизонтальная составляющая абсолютной скорости точки P тела, совпадающей с точкой касания, равна нулю, и рассматриваемая механическая система является консервативной неголономной системой Чаплыгина [1] с тремя степенями свободы. Ее динамические уравнения (описывающие вращение твердого тела вокруг центра тяжести G) отделяются, и их можно рассматривать независимо от уравнений связей.

Запишем эти уравнения в каноническом виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q} + \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{q}^T = (\theta, \psi, \varphi), \quad \mathbf{p}^T = (p_\theta, p_\psi, p_\varphi) \tag{1.1}$$

Функция H в (1.1) — результат преобразования Лежандра функции Лагранжа L, составленной с учетом наложенных на систему связей, $\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}$, а $\mathbf{\Gamma}$ — члены неголономности.

Уравнения (1.1) задают обратимый поток на T^*M, где $M = SO(3)$ — множество положений редуцированной системы. Они достаточно сложны для исследования и могут обладать эффектами, которые отсутствуют в гамильтоновых системах. Например, в общем случае уравнения (1.1) не имеют инвариантной меры [11]. Кроме того, эти уравнения имеют стационарные решения, которые могут быть асимптотически устойчивы по части переменных [8].

Будем использовать следующие обозначения: m — масса тела, g — ускорение свободного падения, A, B и C — моменты инерции тела относительно осей x, y и z соответственно.

2. Пусть ограничивающая тело поверхность является поверхностью вращения с осью z, а тело динамически симметрично, т. е. $A = B$, $\zeta = f(\theta)$. Предполагаем, что f — трижды непрерывно-дифференцируемая функция θ. Заметим, что $f(\theta)$ можно считать четной, 2π-периодической функцией своего аргумента, причем $r(\theta) \equiv f(\theta) + f''(\theta) > 0$. Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование по θ. Ясно, что $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Функция H имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}\mathbf{p}\rangle + mgf(\theta); \quad \boldsymbol{\omega}(\theta) = \begin{Vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \Delta^{-1}\boldsymbol{\omega}_2 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2(\theta) = \begin{Vmatrix} C + m\mu^2 & -C\cos\theta - mf'\mu \\ -C\cos\theta - mf'\mu & A\sin^2\theta + C\cos^2\theta + mf'^2 \end{Vmatrix}$$

$$\omega_1(\theta) = [A + m(f^2 + f'^2)]^{-1}, \quad \Delta(\theta) = AC\delta^2\sin^2\theta,$$

$$\delta(\theta) = \left(1 + \frac{m\mu^2}{C} + \frac{m\varkappa^2}{A}\right)^{1/2} > 0$$

$$\mu(\theta) = f\sin\theta + f'\cos\theta, \quad \varkappa(\theta) = -f\cos\theta + f'\sin\theta$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — симметрическая (3×3) матрица, угловые скобки означают скалярное произведение, μ и $\varkappa$ — координаты точки касания P в системе координат Gx_1z, где ось x_1 направлена в плоскости вертикального меридиана тела перпендикулярно оси z.

Дифференциальные уравнения (1.1) будут обладать инвариантной мерой, задаваемой плотностью $\delta^{-1}(\theta)$.

Выпишем уравнения для p_ψ и p_φ, положив для краткости $\mathbf{p}_*^T = (p_\psi, p_\varphi)$:

$$p_*^{\boldsymbol{\cdot}} = \theta^{\boldsymbol{\cdot}}\mathrm{S}(\theta)\sin\theta\,\mathbf{p}_*; \quad \mathrm{S} = \| s_{jk} \| \ (j, k = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

$$s_{11} = e_1(Ce_2 + m\mu^2 ff'), \quad s_{12} = e_1(A\mu f''\sin^2\theta - Ce_2\cos\theta - m\mu ff'^2)$$

$$s_{21} = e_1(Ce_3 + m\mu^3 f), \quad s_{22} = e_1(A\mu r\sin^2\theta\cos\theta - Ce_3\cos\theta - m\mu^2 ff')$$

$$e_1(\theta) = m\Delta^{-1}\sin^{-1}(\theta), \quad e_2(\theta) = ff' + f''\varkappa\sin\theta, \quad e_3(\theta) = \mu f + r\varkappa\sin\theta\cos\theta$$

Элементы матрицы S — 2π-периодические, непрерывно-дифференцируемые четные функции θ.

Перейдем в (2.2) к новой независимой переменной θ. Получим линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами

$$\mathbf{p}_*' = \mathrm{S}(\theta)\sin\theta\,\mathbf{p}_* \tag{2.3}$$

обладающие свойством θ-инвариантности [12]. Пусть $X(\theta)$ — матрицант системы (2.3). Он существует, его элементы — непрерывно-дифференцируемые функции θ. Заметим, что $\det \mathbf{X} = \delta(\theta)/\delta(0) > 0$ (формула Лиувилля — Якоби). Система (2.3) инвариантна относительно обращения θ, поэтому спектр матрицы монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$ будет симметричен относительно единичной окружности и вещественной оси.

По теореме Флоке — Ляпунова матрицант системы (2.3) можно представить в виде

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{F}(\theta) \exp(\theta \mathbf{K}) \tag{2.4}$$

где $\mathbf{F}(\theta)$ — 2π-периодическая (или антипериодическая) вещественная, непрерывно-дифференцируемая неособая матрица, $\mathbf{K}$ — вещественная постоянная матрица. Каждый из элементов матрицы $\exp(\theta\mathbf{K})$ есть линейная комбинация либо $\cos\alpha\theta$, $\sin\alpha\theta$, либо $e^{\alpha\theta}$, $e^{-\alpha\theta}$, либо θ, 1.

Заметим, что если тело ограничено сферической поверхностью, т. е. $f(\theta) = r + d\cos\theta$ ($|d| < r$; r, $d = \mathrm{const}$), то $X(\theta)$ — 2π-периодическая известная [1] матрица. Таким образом, справедливо

Утверждение 1. Система (1.1) в рассматриваемом случае допускает два линейных по импульсам p_ψ и p_φ, независимых интеграла P_1, P_2

$$\mathbf{P}_* = \mathbf{X}^{-1}(\theta)\,\mathbf{p}_*, \quad \mathbf{P}_*^T = (P_1,\ P_2) \tag{2.5}$$

Наличие трех первых интегралов H, P_1, P_2 уравнений (1.1) позволяет провести качественный анализ движения.

Перейдем в (1.1) от p_ψ и p_φ к новым «импульсам» P_1 и P_2. Функция H в новых переменных будет иметь вид

$$H_0 = {}^1/_2\omega_1 p_\theta^2 + \Pi(\theta,\ P_1,\ P_2) \tag{2.6}$$

$$\Pi(\theta,\ P_1,\ P_2) = {}^1/_2\Delta^{-1}(d_{11}P_1^2 + d_{12}P_1P_2 + d_{22}P_2^2) + mgf$$

$$d_{ij}(\theta) = \langle x_i,\ \boldsymbol{\omega}_2 x_j\rangle, \quad \mathbf{x}_1^T = (x_{11},\ x_{21}), \quad \mathbf{x}_2^T = (x_{12},\ x_{22})$$

Отметим, что уравнения для θ и p_θ теперь принимают следующий вид:

$$\theta^\cdot = \partial H_0/\partial p_\theta, \quad p_\theta^\cdot = -\,\partial H_0/\partial\theta$$

Обобщенные скорости $\psi^\cdot$ и $\varphi^\cdot$ и новые импульсы P_1, P_2 связаны соотношениями

$$\psi^\cdot = \Delta^{-1}(\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2), \quad \varphi^\cdot = \Delta^{-1}(\rho_3 P_1 + \rho_4 P_2) \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\rho}(\theta) = \begin{Vmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{X}$$

Исследование движения сводится теперь к рассмотрению приведенной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, у которой H_0 — функция Гамильтона, Π — потенциальная энергия, $T = 1/2\omega_1^{-1}\theta^{\cdot 2}$ — кинетическая энергия. Дальнейший анализ движения имеет много общего с проведенным в [13] анализом движения динамически и геометрически симметричного тела на абсолютно гладкой плоскости. Поэтому кратко сформулируем основные результаты.

Изменение угла $\theta = \theta(t)$ находится при помощи интеграла энергии $T + \Pi = h = \mathrm{const}$. Обозначая θ_0 начальное значение угла θ и исключая движения, при которых $\theta = \theta_0$, получаем

$$\pm\int_{\theta_0}^{\theta} [2\omega_1(h - \Pi)]^{-1/2}\,d\theta = t$$

Во множестве уровней первых интегралов $H_0 = h$, $P_1 = c_1$, $P_2 = c_2$ выделим три подмножества

$$\Sigma = \{h = \Pi(\theta,\ c_1,\ c_2),\ \Pi'(\theta,\ c_1,\ c_2) = 0\}, \quad \Sigma_1 = \{c_1 - c_2 = 0\}$$

$$\Sigma_2 = \{c_1[x_{11}(\pi) + x_{21}(\pi)] + c_2[x_{12}(\pi) + x_{22}(\pi)] = 0\}$$

Σ — множество критических значений интегрального отображения (бифуркационное множество), условие $\mathbf{c} \equiv (h,\ c_1,\ c_2) \in \Sigma_1$ ($\mathbf{c} \in \Sigma_2$) — необходимое условие того, чтобы во время движения угол θ мог стать равным 0 (π).

Очевидно, что $h - \Pi \geqslant 0$. Это неравенство выделяет область возможности движения приведенной одномерной системы.

1°. Пусть $\mathbf{c} \notin \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$. Тогда величина $h - \Pi(\theta, c_1, c_2)$ делается отрицательной, если $\theta \to 0$ или π. Следовательно, угол θ заключен между двумя вещественными корнями уравнения $h - \Pi = 0$, лежащими между 0 и π. Если $\mathbf{c} \notin \Sigma$, то все корни этого уравнения простые. Пусть $\theta_1(\mathbf{c})$ и $\theta_2(\mathbf{c})$ — два различных корня уравнения $h - \Pi = 0$ и в промежутке между ними $h > \Pi$. Тогда угол θ колеблется между θ_1 и θ_2, а период этих колебаний

$$\tau = 2\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} [2\omega_1(h - \Pi)]^{-1/2}\, d\theta \tag{2.8}$$

2°. Пусть $\mathbf{c} \in \Sigma_1$, $\mathbf{c} \notin \Sigma_2$, $\mathbf{c} \notin \Sigma$. Тогда ось симметрии может проходить через вертикальное положение. Угол θ также колеблется между некоторыми θ_1 и θ_2, причем $\pi > \theta_2 > \theta_1 > -\pi$.

3°. Пусть $\mathbf{c} \in \Sigma_2$, $\mathbf{c} \notin \Sigma_1$, $\mathbf{c} \notin \Sigma$. Ось симметрии может пройти через положение $\theta = \pi$ (переворот). Угол θ колеблется между θ_1 и θ_2, причем $2\pi > \theta_2 > \theta_1 > 0$.

4°. Если $\mathbf{c} \in \Sigma_1 \bigcap \Sigma_2$, $\mathbf{c} \notin \Sigma$, т. е. $c_1 = c_2 = 0$, то при движении тела его ось симметрии может проходить оба особых положения $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Из (2.7) получаем, что в этом случае $\psi = \psi_0 = \mathrm{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, т. е. тело движется так, что его ось симметрии все время находится в фиксированной вертикальной плоскости подвижной системы координат $Q\xi_1\eta_1\zeta_1$. Возможны либо колебания по углу θ, либо вращения. Из уравнений связей

$$\xi^{\boldsymbol\cdot} = -(f'\psi^{\boldsymbol\cdot} + \mu\varphi^{\boldsymbol\cdot})\cos\psi + f\theta^{\boldsymbol\cdot}\sin\psi$$
$$\eta^{\boldsymbol\cdot} = -(f'\psi^{\boldsymbol\cdot} + \mu\varphi^{\boldsymbol\cdot})\sin\psi - f\theta^{\boldsymbol\cdot}\cos\psi$$

следует, что на этом уровне первых интегралов

$$\xi^{\boldsymbol\cdot} = f\theta^{\boldsymbol\cdot}\sin\psi_0, \quad \eta^{\boldsymbol\cdot} = -f\theta^{\boldsymbol\cdot}\cos\psi_0 \tag{2.9}$$

Отсюда

$$\xi\cos\psi_0 + \eta\sin\psi_0 = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

$$\xi = \sin\psi_0\int\limits_{\theta_0}^{\theta} f\, d\theta + \xi_0, \quad \eta = -\cos\psi_0\int\limits_{\theta_0}^{\theta} f d\theta + \eta_0 \tag{2.11}$$

Следовательно, точка Q совершает либо колебания вдоль прямой (2.10), либо уходит вдоль этой прямой на бесконечность. Аналогичное утверждение справедливо и для точки P, только в (2.9), (2.11) надо заменить f на r.

5°. Если же $\mathbf{c} \in \Sigma$, то это особый уровень первых интегралов и возможны либо движения с постоянным углом θ (на этих движениях интегралы H, P_1, P_2 зависимы), либо асимптотические к ним движения. Движения с $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$ — это либо регулярные прецессии, либо качения вдоль прямой, либо положения равновесия.

При известном $\theta = \theta(t)$ изменение углов $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ находится из (2.7) квадратурами. На любом неособом уровне первых интегралов $\theta(t)$ — периодическая (периода τ) функция времени. Пусть

$$\lambda_1 = 2\pi/\tau \tag{2.12}$$

За время τ углы ψ и φ получают некоторые постоянные приращения λ_2 и λ_3, и справедливы представления

$$\psi = \lambda_2 t + \psi_*(t), \quad \varphi = \lambda_3 t + \varphi_*(t)$$

Постоянные λ_1, λ_2, λ_3 (частоты движения) зависят от констант первых интегралов, а функции $\psi_*(t)$, $\varphi_*(t)$ — периодические с одним и тем же периодом τ.

Исследование характера следов точки касания на поверхности тела и на подвижной плоскости $Q\xi_1\eta_1$ полностью аналогично [13]. Существенное отличие от случая, рассмотренного в [13], появляется при исследовании характера следа точки касания на опорной неподвижной плоскости.

Будем исследовать движение точки касания на опорной плоскости, следуя [14]. Обозначим ξ_P и η_P кооординаты точки касания на плоскости $O\xi\eta$. Из кинематических соотношений можно получить, что

$$\xi_P^{\cdot} = (r\theta^{\cdot}) \sin\psi - \mu\varphi^{\cdot} \cos\psi, \quad \eta_P^{\cdot} = -\mu\varphi^{\cdot} \sin\psi - r\theta^{\cdot} \cos\psi \tag{2.13}$$

Пусть $\zeta_P = \xi_P + i\eta_P$. Тогда из (2.13) получаем

$$\zeta_P^{\cdot} = -(\mu\varphi^{\cdot} + ir\theta^{\cdot})\, e^{i\psi} \tag{2.14}$$

Функция $-(\mu\varphi^{\cdot} + ir\theta^{\cdot})\, e^{i\psi_*(t)}$ периодическая с периодом τ. Разлагая ее в ряд Фурье $\Sigma a_n e^{i\lambda_1 nt}$, из (2.14) находим, что (ζ_0 — некоторая постоянная)

$$\zeta_P = \zeta_0 + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{i(n\lambda_1 + \lambda_2)}\, e^{i(n\lambda_1+\lambda_2)t} \tag{2.15}$$

Если $n\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ при целых n, то $\zeta_P = \zeta_0 + \chi(t)\, e^{i\lambda_2 t}$, где $\chi(t)$ — периодическая функция с периодом τ. Если ввести подвижную систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью $-\lambda_2$ вокруг точки ζ_0, то в подвижной системе точка $\zeta_P(t)$ будет двигаться периодически по замкнутой кривой $\zeta_P = \chi(t)$. Таким образом, в неподвижной плоскости $O\xi\eta$ точка касания будет совершать сложное движение: она движется периодически по некоторой кривой, которая вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки.

Если же выполнены резонансные соотношения $n\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, то ξ_P и η_P обладают средним движением, вообще говоря, отличным от нуля (вопрос о независимости частот будет рассмотрен ниже), т. е. возможен уход тела вращения на бесконечность.

Обсудим поведение траекторий движения в фазовом пространстве T^*M. Если $\mathbf{c} \notin \Sigma$, то любая связная компонента множества уровня первых интегралов диффеоморфна трехмерному тору [15]. Действительно, это множество — компактное, ориентированное трехмерное многообразие. Оно допускает три касательных попарно коммутирующих линейно независимых векторных поля. Первое задается правыми частями уравнений (1.1), а координатные линии, соответствующие координатам ψ и φ, служат интегральными для двух других. Отсюда следует, что это — тор (или несколько торов). Траектории движения являются прямолинейными равномерными обмотками этих торов.

Вернемся к уравнениям движения и кратко рассмотрим вопрос об их гамильтоновости. В [16] указан способ построения координат

$$\pi_1 = \theta,\ \pi_2 = \psi + \Psi(h, P_1, P_2, \theta),\ \pi_3 = \varphi + \Phi(h, P_1, P_2, \theta)$$

(с последующей заменой h, P_1, P_2 на соответствующие выражения от $\mathbf{p}, \mathbf{q}$), которые вместе с преобразованием импульсов (2.5) приводят уравнения (1.1) к виду обычных уравнений Гамильтона с функцией H. Здесь исключается инвариантное множество движений с постоянным углом θ, на котором $\Gamma_\psi = \Gamma_\varphi = 0$, $p_\theta = 0$ и уравнения уже имеют гамильтонов вид с функцией $H = H(p_\psi, p_\varphi, \psi, \varphi)$. К сожалению, при помощи таких координат нельзя построить канонического атласа, т. е. ввести канонические координаты глобально. Этому препятствует тот факт, что координаты π_2 и π_3, вообще говоря, уже не угловые, так как

$$\oint \Psi d\theta \neq 0 \pmod{2\pi}, \ \oint \Phi d\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$$

для почти всех значений h, P_1, P_2 (интегрирование производится по замкнутым кривым $H_0 = \text{const}$). Таким образом, справедливо

Утверждение 2. В фазовом пространстве T^*M задачи, или же в любом его инвариантном подпространстве (отличном от многообразия движений с постоянным углом θ) нельзя ввести симплектическую структуру так, чтобы уравнения движения (1.1) приняли гамильтонов вид с функцией Гамильтона H.

Доказательство (*от противного*). Если бы это было возможно, то переменные $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{P}$ были бы симплектическими. Однако при помощи этих координат симплектического атласа построить нельзя.

Если же поставить задачу о приведении уравнений движения к гамильтонову виду с некоторой другой функцией Гамильтона H_*, то она решается просто (теорема о выпрямлении фазового потока). Существуют координаты $\mathbf{w} \bmod 2\pi$, $\mathbf{I}$ (ниже они будут построены), в которых уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{w}^{\cdot} = \lambda\,(\mathbf{I}),\ \mathbf{I}^{\cdot} = 0 \tag{2.16}$$

Если $|\,\partial\lambda/\partial\mathbf{I}\,| \neq 0$, то эти уравнения гамильтоновы с функцией

$$H_* = \lambda_1^2\,(\mathbf{I}) + \lambda_2^2\,(\mathbf{I}) + \lambda_3^2\,(\mathbf{I})$$

Отметим, что в случае динамически и геометрически симметричного тела уравнения (1.1) не допускают приводящего множителя Чаплыгина [1]. Действительно, если бы он существовал, то равнялся бы (с точностью до постоянного множителя) последнему множителю Якоби $\delta^{-1}\,(\theta)$ и в случае однородного шара был бы константой. Однако хорошо известно, что даже в случае однородного шара в уравнениях (1.1) $\boldsymbol{\Gamma} \neq 0$.

3. В окрестности инвариантных торов задачи введем переменные $\mathbf{w} \bmod 2\pi$, $\mathbf{I}$ (аналог переменных действие — угол в гамильтоновой механике), в которых фазовый поток выпрямляется, т. е. в этих переменных уравнения движения имеют вид (2.16).

Положим $I_2 = P_1$, $I_3 = P_2$. Переменные w_1, I_1 вводятся как обычные переменные действие — угол для одномерной гамильтоновой системы (2.6)

$$I_1\,(H_0,\ I_2,\ I_3) = (2\pi)^{-1} \oint \operatorname{sign}\ p_\theta\ [2\,(H_0 - \Pi)\ \omega_1^{-1}]^{1/2} d\theta \tag{3.1}$$

$$w_1 = \operatorname{sign} p_\theta \lambda_1 \int [2\,(H_0 - \Pi)\ \omega_1]^{-1/2}\ d\theta, \quad \lambda_1 \equiv \partial H_0\,(I)/\partial I_1 \tag{3.2}$$

В (3.1) интегрирование производится по изоэнергетическим кривым $H_0 = \text{const}$ в плоскости θ, p_θ.

Дифференцируя обе части (3.1) по H_0 и учитывая выражение (2.8) для периода движения τ, имеем

$$\partial I_1/\partial H_0 = \tau/(2\pi) > 0 \tag{3.3}$$

Так как $\partial I_1/\partial H_0 > 0$, то равенство (3.1) разрешимо относительно H_0 и формула для λ_1 опеределена корректно.

Угловые координаты w_2, w_3 вводятся следующим образом [16]:

$$w_2 = \psi + W_2\,(H_0,\ I_2,\ I_3,\ \theta),\ w_3 = \varphi + W_3\,(H_0,\ I_2,\ I_3,\ \theta) \tag{3.4}$$

Функции W_2, W_3 подберем так, чтобы $w_2^{\cdot} = \lambda_2$, $w_3^{\cdot} = \lambda_3$. Дифференцируя (3.4) по времени, получаем

$$W_2 = \int \frac{\lambda_2 - (\psi^{\cdot})^*}{(\theta^{\cdot})^*} d\theta = \operatorname{sign} p_\theta \int \frac{\lambda_2 - \Delta^{-1}(\rho_1 I_2 + \rho_2 I_3)}{\sqrt{2(H_0 - \Pi)\omega_1}} d\theta \tag{3.5}$$

$$W_3 = \int \frac{\lambda_3 - (\varphi^{\cdot})^*}{(\theta^{\cdot})^*} d\theta = \operatorname{sign} p_\theta \int \frac{\lambda_3 - \Delta^{-1}(\rho_3 I_2 + \rho_4 I_3)}{\sqrt{2(H_0 - \Pi)\omega_1}} d\theta \tag{3.6}$$

В (3.5) и (3.6) звездочка означает, что вместо рассматриваемой в скобках величины надо подставить ее выражение через H_0, I_2, I_3.

Частоты λ_2 и λ_3 подберем так, чтобы координаты w_2, w_3 были угловыми, т. е. выполнялись соотношения

$$\oint W_2 d\theta = \oint W_3 d\theta = 0 \tag{3.7}$$

Отсюда $\lambda_2 = \Delta\psi/\tau$, $\lambda_3 = \Delta\varphi/\tau$, где $\Delta\psi$ — угол, на который повернется линия узлов QE вокруг точки Q за время, равное периоду колебаний угла θ, $\Delta\varphi$ — угол, на который повернется тело вокруг оси симметрии за то же время τ. Поэтому частоты λ_1, λ_2, λ_3 здесь те же, что и в п. 2.

Ясно, что переменные $\mathbf{w}$ (так же, как и π) определяются неоднозначно (например, можно прибавлять произвольную функцию переменных H_0, I_2, I_3).

Процедура введения переменных $\mathbf{w}$, $\mathbf{I}$, по сути, взята из гамильтоновой механики. Неголономность задачи приводит к тому, что $\lambda_2 \neq \partial H_0/\partial I_2$, $\lambda_3 \neq \partial H_0/\partial I_3$.

4. Исследуем невырожденность частот λ в рассматриваемой задаче. Обозначим $J = |\partial\lambda/\partial\mathbf{I}|$. В случае произвольного динамически и геометрически симметричного тела проверка условия $J \not\equiv 0$ технически очень трудная, главным образом ввиду того, что неизвестна матрица $X(\theta)$. Ниже это условие будет проверено для случая, когда тело ограничено сферической поверхностью. По-видимому, $J \not\equiv 0$ и в самом общем случае. Исключение составляет случай, когда $f = r > 0$. Тогда движение будет одночастотным (при $A = C$) или двухчастотным при ($A \neq C$).

Утверждение 3. Пусть $f(\theta) = r + d\cos\theta$, $A \neq C$, $d \neq 0$. Тогда $J \not\equiv 0$.

Доказательство [17]

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{I}} = \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial(\tau, \Delta\psi, \Delta\varphi)} \mathrm{K}_1 \frac{\partial(u, I_3, v)}{\partial(H_0, I_2, I_3)} \frac{\partial(H_0, I_2, I_3)}{\partial(I_1, I_2, I_3)} = \frac{2\lambda_1^2}{(\tau I_3)^3}\mathrm{K}_1, \quad \mathrm{K}_1 = \frac{\partial(\tau, \Delta\psi, \Delta\varphi)}{\partial(u, I_3, v)}$$

Здесь $u = 2(H_0 - mgr)I_3^{-2}$, $v = I_2 I_3^{-1}$. Приведем явные зависимости τ, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ от u, I_3, v

$$\tau = \oint \frac{d\theta}{(\theta^{\cdot})^*}, \quad \Delta\psi = \oint \frac{(\psi^{\cdot})^*}{(\theta^{\cdot})^*} d\theta, \quad \Delta\varphi = \oint \frac{(\varphi^{\cdot})^*}{(\theta^{\cdot})^*} d\theta$$

$$(\theta^{\cdot})^* = I_3 \{\omega_1 [u - 2I_3^{-2} mgd \cos\theta - A^{-1}\sin^{-2}\theta (d_1 v^2 + d_2 v + d_3)]^{1/2}$$

$$(\psi^{\cdot})^* = I_3 A^{-1} \sin^{-2}\theta (v + \varkappa_1\alpha), \quad (\varphi^{\cdot})^* = I_3 A^{-1} [-(v + {}$$
$$+ \alpha\varkappa_1)\sin^{-2}\theta\cos\theta + \alpha\alpha_1]$$

$$\varkappa_1 = \varkappa r^{-1}, \quad \alpha = [\delta\delta(0)]^{-1}, \quad \alpha_1 = AC^{-1}, \quad d_1 = 1 + m\varkappa^2 A^{-1},$$
$$d_2 = 2\varkappa_1\alpha\delta^2, \quad d_3 = \delta^{-2}(0)(\varkappa_1^2 + \alpha_1\sin^2\theta)$$

Исследование поведения τ, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ при $I_3 \to \infty$ ($v \to 0$) [13] показывает, что $J \not\equiv 0$. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь движение тела, близкого по форме и расположению масс к динамически и геометрически симметричному. Тогда

$$\zeta = f(\theta) + \varepsilon f_1(\theta, \varphi), \quad B = A(1 + \varepsilon) \quad (0 \leqslant \varepsilon \ll 1)$$

В невозмущенной задаче ($\varepsilon = 0$) получаем условно-периодическое движение по трехмерным торам. Согласно обобщениям теоремы А. Н. Колмогорова [18—20] на обратимые системы (а таковой является система (1.1)), торы, на которых частоты «достаточно сильно несоизмеримы между собой», не исчезают, а лишь немного смещаются в фазовом пространстве, причем движение остается условно-периодическим. Эти инвариантные торы образуют множество положительной меры. Следовательно, для большинства начальных условий фазовый портрет в плоскости θ, p_θ будет мало отличаться от соответствующего фазового портрета невозмущенной задачи. В частности, для большинства начальных условий мало изменится диапазон изменения угла нутации, а также характер и место расположения следов точки касания на плоскости $Q\xi_1\eta_1$ и поверхности, ограничивающей тердое тело.

Автор благодарит В. В. Козлова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 112 с.
2. *Муштари Х. М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Мат. сб. 1932. Т. 39. № 1—2. С. 105—126.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 778—784.
4. *Дувакин А. П.* Об устойчивости движения волчка по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1962. Т. 2. Вып. 2. С. 222—230.
5. *Дувакин А. П.* Об устойчивости движения волчка с гироскопом по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 131—134.
6. *Миндлин И. М.* Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1963. Т. 4. Вып. 2. С. 225—230.
7. *Миндлин И. М., Пожарицкий Г. К.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742—745.
8. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1983. Т. 6. С. 3—128.
9. *Маркеев А. П.* О качении эллипсоида по горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 53—62.
10. *Маркеев А. П.* О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 553—567.
11. *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 3. С. 85—107.
12. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 718 с.
13. *Маркеев А. П., Мощук Н. К.* Качественный анализ движения тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 37—42.
14. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 28—33.
15. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1979. 431 с.
16. *Мощук Н. К.* О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 223—229.
17. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук (УМН). 1963. Т. 18. Вып. 5. С. 13—40.
18. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук (УМН). 1968. Т. 23. Вып. 4. С. 179—236.
19. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды // Успехи мат. наук (УМН). 1969. Т. 24. Вып. 2. С. 165—211.
20. *Sevryuk M. B.* Reversible systems // B.: Springer. 1986. 319 p.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1987