Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Красинский А. Я.

Исследуется устойчивость и возможность стабилизации по линейному приближению положений равновесия неголономных систем. Число корней характеристического уравнения на мнимой оси в окрестности исследуемого равновесия больше числа неинтегрируемых связей. Среди этих корней могут быть чисто мнимые. Состояние системы описывается переменными Рауса [1, 2]. Управляющие силы предполагаются зависящими от импульсов, лагранжевых координат и их скоростей.

В работах [3—8] рассматривались вопросы устойчивости и стабилизации стационарных движений механических систем. Стабилизирующие силы прикладывались по циклическим координатам. В настоящей работе дается развитие этого метода стабилизации. Координаты, соответствующие импульсам, не предполагаются, вообще говоря, циклическими и не игнорируются. Достаточные условия устойчивости получены при помощи теорем Ляпунова [9], Малкина [10], Каменкова [11] об устойчивости в особенных (существенно особенных) случаях. Использование переменных Рауса позволило сохранить исходную структуру сил.

1. Рассмотрим склерономную неголономную систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, а обобщенные скорости $q_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, q_n^{\boldsymbol{\cdot}}$ связаны m неинтегрируемыми соотношениями

$$q_\mu^{\boldsymbol{\cdot}} = B_{\mu\rho}(q) q_\rho^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$; $\rho, s = 1, 2, \ldots, n-m$; $\mu, \sigma = n-m+1, \ldots, n$; $\xi, \eta = 1, 2, \ldots, l$; $\varkappa$, $\delta = l+1, \ldots, n-m$. По дважды повторяющимся индексам проводится суммирование.

Пусть $T^{(1)} = {}^1/_2 a_{is}^{(1)}(q) q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_j^{\boldsymbol{\cdot}}$ — кинетическая энергия, а $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы. Допустим, что кроме потенциальных сил действуют отнесенные к координатам q_ρ непотенциальные обобщенные силы $Y_\rho(q, q^{\boldsymbol{\cdot}})$. Предположим, что в некоторой открытой области фазового пространства коэффициенты в выражении для кинетической энергии $a_{ij}^{(1)}(q)$, коэффициенты в уравнениях связей $B_{\mu\rho}(q)$ и потенциальная энергия $\Pi(q)$ по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы по q_i, а обобщенные силы $Y_\rho(q, q^{\boldsymbol{\cdot}})$ непрерывно дифференцируемы по q_i, $q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$, причем кинетическая энергия — определенно-положительная функция скоростей.

Исследуем вопрос об устойчивости положений равновесия неголономных систем со связями (1.1) по отношению ко всем координатам и независимым скоростям. Несмотря на то что эта задача рассматривалась многими авторами [12], большая часть полученных результатов относится к устойчивости таких положений равновесия, в окрестности которых на мнимой оси лежат только нулевые корни характеристического уравнения системы первого приближения, причем число их равно числу связей. Если, кроме m нулевых, все остальные корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости, имеет место особенный случай m нулевых корней [13]. При этом сведение исследуемого случая к особенному при данном расположении корней возможно при любой зависимости уравнений возмущенного движения от критических переменных.

В рассматриваемых здесь задачах, когда на мнимой оси имеются дополнительные по сравнению с числом связей корни характеристического уравнения, применение теории сведения существенно осложняется. Во-первых, замена [13] уже недостаточна для решения вопроса о том, каким переменным или их комбинациям отвечают корни характеристического уравнения с нулевыми действительными частями, т. е. для выделения критических переменных в общем случае необходимы некоторые линейные преобразования переменных. Во-вторых, в таких задачах возможны любые критические случаи как особенные, так и неособенные. Поэтому усложняется и анализ зависимости уравнений возмущенного движения от критических переменных.

При исследовании некоторых из таких более сложных задач об устойчивости положений равновесия были получены [1] достаточные условия устойчивости и неустойчивости. Но использование лагранжевых переменных для описания состояния системы привело к громоздким преобразованиям, изменяющим, вообще говоря, исходную структуру сил уже на этапе выделения критических переменных. В этой связи очень удобно использование переменных Рауса, позволяющих во многих случаях сразу получить так называемый специальный вид [10, 11] уравнений возмущенного движения благодаря тому, что уравнения для гамильтоновых переменных разрешены относительно производных.

Для описания движения системы ниже используются уравнения Воронца в переменных Рауса. С целью составления этих уравнений введем векторы и матрицы

$$
\begin{aligned}
&q' = (q_1, \ldots, q_n),\ r' = (q_1, \ldots, q_{n-m}),\ s' = (q_{n-m+1}, \ldots, q_n)\\
&\alpha' = (q_1, \ldots, q_l),\ \beta' = (q_{l+1}, \ldots, q_{n-m}),\ A_1 = \| a^{(1)}_{\xi\eta}(q) \|\\
&A_{12} = \| a^{(1)}_{\xi\varkappa}(q) \|,\ A_{13} = \| a^{(1)}_{\xi\mu}(q) \|,\ A_2 = \| a^{(1)}_{\varkappa\delta}(q) \|\\
&A_{23} = \| a^{(1)}_{\varkappa\mu}(q) \|,\ A_3 = \| a^{(1)}_{\mu\sigma}(q) \|,\ A'_{\omega\varepsilon} = A_{\varepsilon\omega}\\
&Y^{(1)} = (Y_1(q, \dot q), \ldots, Y_l(q, \dot q)),\quad Y^{(2)} = (Y_{l+1}(q, \dot q), \ldots\\
&\ldots, Y_{n-m}(q, \dot q))\\
&B_\alpha = \| B_{\mu\xi}(q) \|,\ B_\beta = \| B_{\mu\varkappa}(q) \|,\quad a(q) = \begin{Vmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_2 \end{Vmatrix}\\
&a_1 = A_1 + A_{13}B_\alpha + B_\alpha' A_{31} + B_\alpha' A_3 B_\alpha',\ a_{21} = a_{12}'\\
&a_{12} = A_{12} + A_{13}B_\beta + B_\alpha' A_{32} + B_\alpha' A_3 B_\beta\\
&a_2 = A_2 + A_{23}B_\beta + B_\beta' A_{32} + B_\beta' A_3 B_\beta
\end{aligned}
$$

(штрих означает транспонирование). Разбиение вектора r на векторы α и β в конкретных системах производится в соответствии с различным характером зависимости от этих переменных потенциальной энергии, обобщенных сил, матрицы коэффициентов в уравнениях связей и, возможно, матрицы коэффициентов кинетической энергии. Сейчас эти уравнения составляются в общем случае, поэтому разбиение вектора r на векторы α и β пока произвольно.

Введем импульсы $p = \partial T/\partial \dot\beta$, где $T = 1/2\dot r' a(q)\dot r$ — кинетическая энергия системы, выраженная через независимые скорости. Уравнения Воронца в переменных Рауса запишем в векторно-матричном виде

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad &\dot\alpha = \alpha_1,\quad a^*\dot\alpha_1 = -\Pi_\alpha - \gamma\dot p - \alpha_1'[\overset{*}{a}_{(\alpha)} + \overset{*}{a}_{(\beta)}\gamma + \overset{*}{a}_{(s)}(B_\alpha - B_\beta\gamma') +\\
&+ {}^1/_2\overset{*}{a}_{[\alpha]} + {}^1/_2\overset{*}{a}_{[s]}B_\alpha]\alpha_1 - \alpha_1'[\overset{*}{a}_{(\beta)}b_2 + \overset{*}{a}_{(s)}B_\beta b_2 + \gamma_{(\alpha)} - \gamma_{(\beta)}\gamma +\\
&+ \gamma_{(s)}(B_\alpha - B_\beta\gamma') - \gamma_{[\alpha]} - \gamma_{[s]}B_\alpha]p - p'[\gamma_{(\beta)}b_2 + \gamma_{(s)}B_\beta b_2 +\\
&+ {}^1/_2 b_{2(\alpha)} + {}^1/_2 b_{2(\alpha)} + {}^1/_2 b_{2(s)}B_\alpha]p + \theta'\Omega_1 + Y^{(1)}(q, \alpha_1, p) - B_\alpha\Pi_s\\
&\dot\beta = -\gamma'\alpha_1 + b_2 p,\quad \dot p = \alpha_1'({}^1/_2\overset{*}{a}_{[\beta]} + {}^1/_2\overset{*}{a}_{[s]}B_\beta)\alpha_1 +\\
&+ \alpha_1'(\gamma_{[\beta]} + \gamma_{[s]}B_\beta)p - {}^1/_2 p'(b_{2[\beta]} + b_{2[s]}B_\beta)p - \Pi_\beta - B_\beta\Pi_s + \theta'\Omega_2 +\\
&+ Y^{(2)}(q, \alpha_1, p),\quad \dot s = (B_\alpha - B_\beta\gamma')\alpha_1 + B_\beta b_2 p
\end{aligned}
$$

---

[1] *Красинский А. Я.* О влиянии структуры сил на устойчивость состояний равновесия неголономных систем в некоторых критических случаях. Ташкент, 1979, 16 с.— Деп. в ВИНИТИ 30.07.80, № 27.07-80.

Здесь

$$a^* = a_1(q) - a_{12}(q)\, b_2(q)\, a_{21}(q),\ b_2 = a_2^{-1}(q)$$
$$\gamma = a_{12}(q)\, b_2(q),\quad \theta = [A_{31} + A_3 B_\alpha - (A_{32} + A_3 B_\beta)\gamma']\,\alpha_1 +$$
$$+ (A_{32} + A_3 B_\beta)\, b_2 p,\quad \Omega_\nu = \left[\frac{\partial B_\nu}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial s} B_\alpha - \right.$$
$$- \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial \zeta} B_\beta\right)\gamma' - B_\nu (B_{\alpha[s]} - B_{\beta[s]}\gamma')]\,\alpha_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial s} B_\beta - B_\nu B_{\beta[s]}\right) b_2 p,\quad \Omega_1 = \| \Omega_\xi \|$$
$$\Omega_2 = \| \Omega_\delta \|,\quad \Pi_\alpha = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha},\quad \Pi_\beta = \frac{\partial \Pi}{\partial \beta},\quad \Pi_s = \frac{\partial \Pi}{\partial s}$$

B_ν — столбец матрицы $B(q)$ с номером ν, $W_{(q)}$, $W_{[q]}$ для произвольной матрицы $W(q) = \|w_{ij}(q)\|$ означают соответственно «векторы» с матричными компонентами $\| \partial w_{i\nu}/\partial q_k \|$, $\| \partial w_{ij}/\partial q_\nu \|$, где ν — номер компоненты «вектора».

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости некоторой точки многообразия положений равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} + B'(q)\frac{\partial \Pi}{\partial s} + Y(q, 0, 0) = 0 \tag{2.1}$$

При этом без уменьшения общности [12] будем считать исследуемое положение равновесия началом координат

$$q = 0 \tag{2.2}$$

Для любой матрицы $W(q)$ введем представление

$$W(q) = W^\circ + W'^1,\ W^\circ = W(0)$$

Здесь и далее верхний индекс после запятой означает порядок младших членов в разложении соответствующего выражения. Выполним в уравнениях (1.2) замену [13], которая в принятых здесь обозначениях получит форму

$$s = z + B_\alpha{}^\circ \alpha + B_\beta{}^\circ \beta \tag{2.3}$$

и выделим линейное приближение. Будем иметь

$$\begin{aligned} &\alpha^{\cdot} = \alpha_1,\ a^{*\circ}\alpha_1^{\cdot} = -\gamma^\circ p^{\cdot} - (C_1^* + P_1)\,\alpha - P_{12}\beta - Z_1 z + Q_1 + \\ &+ R,\ \beta^{\cdot} = -\gamma^{\circ\prime}\alpha_1 + b_2{}^\circ \rho + N \\ &p^{\cdot} = -P_{21}\alpha - (C_2^* + P_2)\,\beta - Z_2 z + Q_2 + K \\ &z^{\cdot} = [(B_\alpha{}'^1 - B_\beta{}'^1 b_2)\, a_{21} - B_\beta{}^\circ b_2{}'^1 a_{21}]\,\alpha_1 + (B_\beta b_2{}'^1 + B_\beta{}'^1 b_2{}^\circ)\, p \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь Q_1, Q_2 — линейные члены в разложении соответственно векторов $Y^{(1)}(q, \alpha_1, p)$, $Y^{(2)}(q, \alpha_1, p)$, а смысл других обозначений следующий:

$$R = M + a^{*0} b'^1 [-\gamma^\circ p^{\cdot} - (C_1^* + P_1)\,\alpha - P_{12}\beta - Z_1 z + Q_1 + M$$
$$M = -(a_{12}{}'^1 b_2 + a_{12}{}^\circ b_2{}'^1)\, p - \Pi_\alpha{}'^2 - B_\alpha \Pi_s{}'^2 - [C_{31}\alpha + C_{32}\beta +$$
$$+ C_3(z + B_\alpha{}^\circ\alpha + B_\beta{}^\circ\beta)]\,[B_{\alpha(\alpha)}\alpha + B_{\alpha(\beta)}\beta + B_{\alpha(s)}(z + B_\alpha{}^\circ\alpha + B_\beta{}^\circ\beta)] +$$
$$+ Y^{(1)'2} - {}^1/_2\alpha_1{}' a^*_{(\alpha)}\alpha_1 - (-\gamma'\alpha_1 + b_2 p)'\, a^*_{(\beta)}\alpha_1 -$$
$$- [(B_\alpha - B_\beta\gamma')\,\alpha_1 + b_2 p]'\,\gamma_{(s)} p - {}^1/_2\alpha_1{}' b_{2(\alpha)} p + \theta'\Omega_1 +$$
$$+ {}^1/_2\alpha_1{}'\gamma_{(s)} B_\alpha p + {}^1/_2\alpha_1{}' a^*_{(s)} B_\alpha \alpha_1 - {}^1/_2 p' b_{2(s)} B_\alpha p$$
$$b(q) = (a^*(q))^{-1},\quad N = -(a_{12}{}'^1 b_2 + a_{12}{}^\circ b_2{}'^1)\,\alpha_1 + b_2{}'^1 p$$
$$K = {}^1/_2\alpha_1{}' a^*_{(\beta)}\alpha_1 + \alpha_1{}' a^*_{(3)} p - {}^1/_2 p' b_{2(\beta)} p - \Pi_\beta{}'^2 - B_\beta \Pi_s{}'^2 -$$
$$- [C_{31}\alpha + C_{32}\beta + C_3(z + B_\alpha{}^\circ\alpha + B_\beta{}^\circ\beta)]\,[B_{\beta(\alpha)}\alpha + B_{\beta(\beta)}\beta +$$
$$+ B_{\beta(s)}(z + B_\alpha{}^\circ\alpha + B_\beta{}^\circ\beta)] + Y^{(2),2} + {}^1/_2\alpha_1{}' a^*_{(s)} B_\beta \alpha_1 +$$
$$+ \alpha_1{}'\gamma_{(s)} B_\beta p - {}^1/_2 p' b_{2(s)} B_\beta p + \theta'\Omega_2$$

$$C_1^*+P_1=C_1+C_{13}B_\alpha{}^\circ+B_\alpha{}^{\circ\prime}C_{31}+B_\alpha{}^{\circ\prime}C_3B_\alpha{}^\circ+L'(B_{\alpha(\alpha)}+B_{\alpha(s)}B_\alpha{}^\circ)$$
$$P_1'=-P_1,\ C_1^{*\prime}=C_1^*,\ Z_1=C_{13}+B_\alpha{}^{\circ\prime}C_3+L'\overset{\circ}{B}_{\alpha(s)}$$
$$P_{12}=C_{12}+C_{13}B_\alpha{}^\circ+B_\alpha{}^{\circ\prime}C_{32}+B_\beta{}^{\circ\prime}C_3B_\beta{}^\circ+L'(\overset{\circ}{B}_{\alpha(s)}B_\beta{}^\circ+\overset{\circ}{B}_{\alpha(\beta)})$$
$$C_2^*+P_2=C_2+C_{23}B_\beta{}^\circ+B_\beta{}^{\circ\prime}C_{32}+B_\beta{}^{\circ\prime}C_3B_\beta{}^\circ+$$
$$+L'(\overset{\circ}{B}_{\beta(s)}B_\beta{}^\circ+\overset{\circ}{B}_{\beta(\beta)})$$
$$P_2'=-P_2,\quad C_2^{*\prime}=C_2^*,\quad Z_2=C_{23}+B_\beta{}^{\circ\prime}C_3+L'\overset{\circ}{B}_{\beta(s)}$$
$$P_{21}=C_{21}+C_{23}B_\alpha{}^\circ+B_\beta{}^{\circ\prime}C_{31}+B_\beta{}^{\circ\prime}C_3B_\alpha{}^\circ+L'(\overset{\circ}{B}_{\beta(s)}B_\alpha{}^\circ+\overset{\circ}{B}_{\beta(\alpha)})$$
$$C_1=\|\overset{\circ}{\Pi}{}_{\cdot\xi\eta}\|,\ C_{12}=\|\overset{\circ}{\Pi}{}_{\cdot\xi\delta}\|,\ C_{13}=\|\overset{\circ}{\Pi}{}_{\cdot\xi\mu}\|$$
$$C_2=\|\overset{\circ}{\Pi}{}_{\cdot\varkappa\delta}\|,\quad C_{23}=\|\overset{\circ}{\Pi}{}_{\cdot\varkappa\mu}\|,\quad C_3=\|\overset{\circ}{\Pi}{}_{\cdot\mu\sigma}\|$$
$$\Pi_{\cdot ij}=\partial^2\Pi/\partial q_i\partial q_s,\quad L=\|(\partial\Pi/\partial q_\mu)^\circ\|,\quad C'_{\omega\varepsilon}=C_{\varepsilon\omega}$$

Характеристическое уравнение первого приближения системы (2.4) без учета членов, возникающих при разложении векторов Q_1, Q_2 по фазовым переменным, можно записать в виде

$$(2.5)\qquad \begin{vmatrix} E_l\lambda & -E_l & 0 & 0 & 0 \\ C_1^*+P_1 & a^{*\circ}\lambda & P_{12} & \gamma^\circ\lambda & Z_1 \\ 0 & \gamma^{\circ\prime} & E_t\lambda & -b_2{}^\circ & 0 \\ P_{21} & 0 & C_2^*+P_2 & E_t\lambda & Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m\lambda \end{vmatrix}=0$$

Переменной z соответствует m нулевых корней этого уравнения. Исследуя остальные его корни, а в случае дополнительных корней с нулевыми действительными частями и отсутствии корней в правой полуплоскости — также и характер зависимости уравнений движения от критических переменных, можно получить некоторые утверждения об устойчивости положений равновесия.

Замечание 1. Как было отмечено, если число корней уравнения (2.5) на мнимой оси больше числа неинтегрируемых связей, возможны как особенные, так и неособенные случаи критических случаев нескольких нулевых и чисто мнимых корней. Здесь ограничимся только такими утверждениями, когда, во-первых, вопрос решается сведением исследуемых случаев к особенным; во-вторых, утверждения формулируются аналогично теоремам Томсона — Тета — Четаева и доказываются при помощи известных результатов [14] по влиянию структуры сил на устойчивость движения. Поэтому естественно наложение условий типа равенств, которые в общем случае не будут необходимыми условиями устойчивости, так как их появление вызвано рассматриваемым здесь типом критических случаев и тем, что до сих пор не получено эффективных достаточных условий устойчивости для систем с линейными непотенциальными позиционными силами.

3. Допустим, что на неголономную систему действуют потенциальные силы с энергией $\Pi(q)$ и такие непотенциальные обобщенные силы, что $Y(q, 0)=0$. Тогда векторы линейных непотенциальных сил $Q_1=-Q_{11}\alpha_1-Q_{12}p$, $Q_2=-Q_{21}\alpha_1-Q_{22}p$, где $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}\ Q_{22}$ — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Рассмотрим некоторые случаи неустойчивости и устойчивости положений равновесия, в окрестности которых число нулевых корней уравнения (2.5) больше числа связей m.

Утверждение 1. Пусть квадратичная часть потенциальной энергии не зависит от координат β, причем связи таковы, что выполнены условия

$$(3.1)\qquad B_\beta{}^\circ=0,\ \overset{\circ}{B}_{\alpha(\beta)}=0,\ \overset{\circ}{B}_{\beta(\beta}=0$$

Положение равновесия (2.2) неустойчиво, если

$$\det\begin{Vmatrix} C_1^* + P_1 & Q_{12} \\ P_{21} & Q_{22}\end{Vmatrix} < 0 \tag{3.2}$$

Доказательство. При наложенных условиях $m + t$ нулевых корней уравнения (2.5) отвечают переменным β, z, а остальные его корни находятся из уравнения, свободный член которого равен определителю (3.2).

Следствие 1. Если в системе отсутствуют не только линейные позиционные силы по β, но и линейные по скоростям $\beta^{\cdot}$ силы, то точка (2.2) неустойчива, если

$$\det \| C_1^* + P_1 - \gamma P_{21} \| < 0 \tag{3.3}$$

Теперь $m + 2t$ нулевых корней характеристического уравнения (2.4) соответствуют переменным β, p, z. Определитель (3.3) равен свободному члену уравнения, из которого находятся остальные корни. Как видим, для систем, у которых отсутствуют линейные по части координат позиционные силы, вопрос об устойчивости по первому приближению решается в зависимости не только от позиционных линейных по другим координатам обобщенных сил, но и от матриц коэффициентов линейных по скоростям сил, а также от матрицы коэффициентов кинетической энергии.

Утверждение 2. Пусть в окрестности точки (2.2) выполнены условия:

а) потенциальная энергия не зависит от координат β, а скорости этих координат не входят в уравнения связей:

б) действующие силы и матрица $B\,(q)$ таковы, что отсутствуют линейные обобщенные силы с матрицами P_1 и Q_{21}.

Если матрица C_1^* и симметричные составляющие матрицы Q_{11}, Q_{22} определенно положительны, то положение равновесия (2.2) асимптотически устойчиво относительно скоростей и устойчиво относительно координат при действии линейных обобщенных сил с произвольными матрицами Z_1, Q_{12} и любых кососимметричных составляющих матриц Q_{11}, Q_{22}.

Доказательство. Переменным β, z соответствуют $m + t$ нулевых корней уравнения (2.5), а действительные части остальных его корней отрицательны [14]. Для сведения задачи к особенному случаю $m + t$ нулевых корней в общем случае достаточно сделать замену ляпуновского типа по координатам α. Исследуемая система имеет $(m + t)$-параметрическое многообразие положений равновесия, которое при наложенных условиях асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Условие а) утверждения 2 выполнено, в частности, если координаты β — циклические в смысле [15, 16]. Обращение в нуль матрицы P_1 означает отсутствие непотенциальных позиционных линейных сил по координатам α, что всегда имеет место, если в потенциальной энергии нет линейных по s членов, а также если вектор α имеет размерность единица, т. е. является скаляром.

Замечание 3. Если второе уравнение системы (2.4) не содержит свободно входящих переменных z, то замену по координатам α проводить не нужно и по этим переменным сохранится асимптотическая устойчивость.

Аналогично можно получить

Утверждение 3. Пусть выполнены условия:

а) потенциальная энергия не зависит от β, причем потенциальные силы не содержат свободно входящих координат s;

б) скорости $\alpha^{\cdot}$ не входят в уравнения связей и, кроме того, $B_\beta\,(q)|_{\alpha=0} = 0$.

Если действующие силы таковы, что в окрестности точки (2.2) матрица C_1 и симметричные составляющие матриц Q_{11}, Q_{22} определенно положительны и отсутствуют линейные силы с матрицами P_{21}, Q_{21}, то точка (2.2) асимптотически устойчива относительно скоростей и координат α и устойчива относительно координат β, s при действии линейных сил с произвольной матрицей Q_{12} и любых кососимметричных составляющих матриц Q_{11}, Q_{22}.

Замечание 4. При наложенных требованиях в матрице P_{21} остается только член $L'\overset{\circ}{B}_{\beta(\alpha)}$, который обращается в нуль, в частности, если в выражении для энергии $\Pi(q)$ нет линейных по s членов. Отметим еще, что в этом утверждении условия теоремы Ляпунова — Малкина выполнены сразу в исходных переменных.

Пример. Рассмотрим неоднородный шар массой m и радиусом R, центральный эллипсоид инерции которого — эллипсоид вращения, а центр масс не совпадает с геометрическим центром шара, причем ось динамической симметрии проходит через геометрический центр шара. Устойчивость равновесия такого шара на горизонтальной шероховатой плоскости рассмотрена в [17]. Здесь изучим устойчивость положений равновесия неоднородного шара, который катается и вертится из шероховатой плоскости, наклоненной под углом δ к горизонту. Состояние системы определяют пять обобщенных координат: декартовы координаты x, y точки касания шара с плоскостью, углы Резаля θ, ψ и угол φ поворота тела вокруг оси динамической симметрии. Направим ось Ox параллельно горизонту, а ось Oy — вверх по наклонной плоскости.

Функция Лагранжа, составленная без учета] связей, и уравнения связей имеют вид

$$
\begin{aligned}
L = {} & {}^1/_2 m (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + ml\,[x^{\cdot}\,(\theta^{\cdot} \sin\psi \sin\theta - \psi^{\cdot} \cos\psi \cos\theta) + \\
& + \theta^{\cdot} y^{\cdot} \cos\theta] + {}^1/_2 (A + ml^2)(\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2} \cos^2\theta) + {}^1/_2 C (\varphi^{\cdot} - \psi^{\cdot} \sin\theta)^2 - \\
& - mg\,[y \sin\delta + (R - l\cos\theta\cos\psi)\cos\delta + l \sin\theta \sin\delta] \\
x^{\cdot} = {} & R\psi^{\cdot} - R\sin\theta\varphi^{\cdot}, \quad y^{\cdot} = -R\cos\psi\theta^{\cdot} - R\sin\psi\cos\theta\varphi^{\cdot}
\end{aligned}
$$

Здесь l — расстояние между центром шара и центром масс, A — осевой момент инерции, C — центральный экваториальный момент инерции, g — ускорение силы тяжести. Очевидно, можем считать $0 \leqslant \delta < \pi/2$.

Пусть кроме силы тяжести на шар действуют диссипативные силы с функцией рассеяния энергии [17]

$$F = {}^1/_2\,[h_1 R^{-2} (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + h_2 (\varphi^{\cdot} \cos\psi \cos\theta - \theta^{\cdot} \sin\psi)^2]$$

где h_1, h_2 — соответственно коэффициенты вязкого трения качения и верчения. Многообразие положений равновесия шара определяется выражением

$$\theta^* = \arcsin(Rl^{-1}\sin\delta) - \delta, \quad \psi^* = 0 \tag{3.4}$$

так как при $\theta = \pi/2$ равновесия, вообще говоря, нет. Равновесия возможны только при $Rl^{-1}\sin\delta \leqslant 1$. Обозначая θ отклонения от θ^* и вводя векторы $q' = (\theta, \psi, \varphi, x, y)$, $\beta = \varphi$, $\alpha' = (\theta, \psi)$, $s' = (x, y)$, получим, что определитель (3.2) равен

$$
\begin{aligned}
& m^{-1} \cos(\theta^* + \delta)\, g^2 l^2 \cos\theta^* (\sin\theta^*\, h_1 d + h_2 \cos\theta^*) \qquad (3.5)\\
& d = \sin\theta^* \cos\delta - R\sin\delta
\end{aligned}
$$

В силу утверждения 1 точка $\theta = 0, \psi = 0, \varphi = 0$ многообразия (3.4) неустойчива, если выражение (3.5) отрицательно. На знак этого выражения влияют не только значения $\cos(\theta^* + \delta)$ и $\cos\theta^*$, но и соотношение величин h_1 и h_2, так как величина d в соответствии с (3.4) меняет знак в зависимости от δ, R/l. В частности, $d < 0$ при $\delta \geqslant 0{,}1$, $l \geqslant 0{,}6R$. Тогда величина (3.5) отрицательна, если $h_2 \cos\theta^* \cos\delta > h_1 \operatorname{tg}\theta^*$. Устойчивость исследуемого положения равновесия при $\cos\theta^* > 0$ имеет место при специальном выборе коэффициентов вязкого трения качения и верчения

$$h_2^* = \frac{h_1^* (Cm^{-1}\cos\theta^* + Rl\sin^2\theta^*)}{\cos\theta^* (Cm^{-1} - Rl\cos\theta^* + R^2)}$$

При отсутствии диссипативных сил исследуемая точка неустойчива, согласно следствию 1 при $\cos(\theta^* + \delta)\cos\theta^* < 0$. Сведения о структуре матрицы $a(q)$ и матрицы линейных позиционных сил позволяют уточнить полученный результат: неустойчивость имеет место при $\cos(\theta^* + \delta) < 0$.

4. Рассмотрим вопрос об устойчивости положений равновесия, в окрестности которых характеристическое уравнение (2.5) имеет не только нулевые, но и чисто мнимые корни. Структура уравнений возмущенного движения в таких задачах значительно изменяется по сравнению с исследованными выше случаями: теперь правые части укороченной [10] системы обязательно содержат линейные по критическим переменным члены, при-

чем в вектор критических переменных кроме координат входит хотя бы часть независимых скоростей. Вследствие этого невозможно сведение задачи к особенному случаю проведением замены ляпуновского типа только по некритическим координатам, без замены по соответствующим скоростям. Замену приходится делать по всему вектору некритических переменных, а это не дает, вообще говоря, обращения в нуль нелинейных членов в уравнениях связей.

Поэтому, оставаясь в рамках теории особенных случаев, будем накладывать требования, обеспечивающие выполнение условий, например теоремы Каменкова об устойчивости в существенно особенном случае ([11], § 39) сразу в исходных переменных. Отметим, что удовлетворить этим требованиям наложением условий только на матрицу коэффициентов в уравнениях связей и обобщенные силы теперь не удается, нужны еще условия на матрицу коэффициентов кинетической энергии.

Приведем один из вариантов утверждений об устойчивости положений равновесия неголономных систем, в окрестности которых уравнение (2.5) имеет чисто мнимые корни.

Утверждение 4. Пусть выполнены условия:

а) матрица коэффициентов кинетической энергии такова, что A_{12}, A_{23}, $A_{2(\alpha)}$ обращаются в нуль при $\alpha = 0$;

б) матрица коэффициентов в уравнениях связей не содержит свободно входящих переменных β, s, причем $B_\beta(q) = 0$ при $\alpha = 0$;

в) по скоростям $\alpha^\cdot$ действуют силы сопротивления с полной диссипацией, а матрица $C_1{}^* + P_1$ симметрична и определенно положительна.

При выполнении одного из требований:

г) потенциальные силы не содержат свободно входящих координат β, s и по скоростям $\beta^\cdot$ действуют только гироскопические силы, причем $\det Q_{22} > 0$, т. е. t — четное число;

д) потенциальные силы не содержат свободно входящих кординат s, а координаты β входят свободно только в линейные силы с матрицей $C_2{}^* + P_2$, причем эта матрица симметрична и определенно положительна и отсутствуют линейные по скоростям $\beta^\cdot$ силы; положение равновесия (2.2) асимптотически устойчиво относительно скоростей $\alpha^\cdot$ и координат α и устойчиво относительно скоростей $\beta^\cdot$ и координат β, s при действии по скоростям $\alpha^\cdot$ произвольных гироскопических линейных сил и произвольных нелинейных сил, не содержащих свободно входящих переменных β, $\beta^\cdot$, s.

Справедливость утверждения следует из теоремы об устойчивости в существенно особенном случае [11] $m + t$ нулевых и чисто мнимых корней при выполнении условия г) и m нулевых и $2t$ чисто мнимых при выполнении условия д). В первом случае неголономная система кроме $(m + t)$-параметрического многообразия положений равновесия имеет t-параметрическое многообразие периодических движений, во втором — m-параметрическое многообразие положений равновесия и $2t$-параметрическое многообразие периодических движений.

5. Поставим задачу о стабилизации положений равновесия неголономных систем со связями (1.1) приложением линейных сил по координатам β. Используя полученные утверждения об устойчивости, можно доказать следующие результаты по возможности такой стабилизации.

Утверждение 5. При выполнении условий а), б) утверждения 3 и действии только потенциальных сил положение равновесия (2.2) можно стабилизировать до асимптотической устойчивости по скоростям и координатам α и устойчивости по остальным координатам приложением по координатам β управляющих сил

$$u = (-M_1 + P_{21})\,\alpha - M_2\alpha_1 - M_3 p$$

В частности, если матрица C_1 определенно положительна, такая стабилизация осуществляется силами

$$u = (-M_2 M_3 + P_{21})\,\alpha - M_2\alpha_1 - M_3 p \tag{5.1}$$

где M_3 — произвольная матрица с определенно-положительной симметричной составляющей, а симметричная составляющая матрицы γM_2 определенно отрицательна за счет выбора матрицы M_2.

Доказательство. При наложенных условиях и действии сил (5.1) система уравнений возмущенного движения (2.4) получит форму

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\cdot} = \alpha_1,\ a^{*\circ}\alpha_1^{\cdot} = -C_1\alpha + \gamma\,(P_{21} + M_1)\,\alpha + \gamma M_2\alpha_1 + \gamma M_3 p + R \\
&\beta^{\cdot} = -\gamma^{\circ\prime}\alpha_1 + b_2^{\circ}p + N \\
&p^{\cdot} = -(P_{21} + M_1)\,\alpha - M_2\alpha_1 - M_2 p + K \\
&z^{\cdot} = B_\beta{}'^1 b_2 a_{21}\alpha_1 + (B_\beta b_2{}'^1 + B_\beta{}'^1 b_2^{\circ})\,p
\end{aligned}\tag{5.2}$$

причем нелинейные члены K, N, R обращаются в нуль при $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$, $p = 0$.

После неособенной линейной замены $p = y - M_2\alpha$ вместо (5.2) будем иметь систему, для которой выполнены все условия теоремы Ляпунова — Малкина об устойчивости в особенном случае $m + t$ нулевых корней, соответствующих переменным β, z.

Пример. В переменных Рауса рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия саней Чаплыгина на наклонной плоскости, находящихся под действием только силы тяжести. Функция Лагранжа без учета неголономной связи и уравнение этой связи таковы [17]:

$$\begin{aligned}
L = {}^1/_2 m\,[(x^{\cdot} + l\varphi^{\cdot}\cos\varphi)^2 + (y^{\cdot} + l\varphi^{\cdot}\sin\varphi)^2 + k^2\varphi^{\cdot 2}] - \\
- mg\sin\delta\,(y - l\cos\varphi), \quad y^{\cdot} = x^{\cdot}\operatorname{tg}\varphi
\end{aligned}$$

Здесь m — масса саней, x, y — декартовы координаты точки касания конька и плоскости, φ — угол, который составляет линия пересечения плоскости конька и наклонной плоскости с осью Ox, l — расстояние от центра масс до оси, перпендикулярной к плоскости в точке касания, k — радиус инерции, g — ускорение силы тяжести, δ — угол наклона плоскости.

Введем переменные Рауса $\alpha = \varphi$, $\beta = x$, $p = \partial L/\partial x^{\cdot}$. Исследуем задачу стабилизации точки

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \varphi = 0 \tag{5.3}$$

многообразия $\sin\varphi^* = 0$ положений равновесия. Характеристическое уравнение системы первого приближения уравнений возмущенного движения саней

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\cdot} = \alpha_1, \quad m\,(k^2 + l^2)\,\alpha_1^{\cdot} = -\,(mgl\sin\delta)\,\alpha - lp^{\cdot} + R \\
&\beta^{\cdot} = -l\alpha_1 + m^{-1}p + N, \quad p^{\cdot} = -\,(mg\sin\delta)\,\alpha + K \\
&y^{\cdot} = \operatorname{tg}\alpha\,(-l\alpha_1 + m^{-1}p)
\end{aligned}$$

в окрестности точки (5.3) имеет пять нулевых корней. В соответствии с утверждением 5 сила (5.1) (при $P_{21} = mg\sin\delta$), приложенная по координате x, стабилизирует точку (5.3) до асимптотической устойчивости по всем скоростям и координате φ и устойчивости по x, y.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел: Пер. с англ. Т. 1. М.: Наука. 1983. 463 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
3. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966—976.
4. *Румянцев В. В.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 963—973.

5. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1982. С. 87—102.
6. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 45—52.
7. *Самсонов В. А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 512—520.
8. *Красинская Э. М.* К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 302—309.
9. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1967. 530 с.
11. *Каменков Г. В.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука. 1972. 214 с.
12. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1983. Т. 6. С. 3—128.
13. *Aiserman M. A., Gantmacher F. R.*, Stabilität der Gleichgewichtslage in einem nichtholonomen System // ZAMM. 1957. B. 37. H. 1/2. S. 74—75.
14. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.
15. *Шульгин М. Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической механики и их интегрировании // Тр. Среднеаз. ун-та. 1958. 183 с.
16. *Карапетян А. В.* Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука. 1979. С. 184—190.
17. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967. 519 с.

Ташкент

Поступила в редакцию
29.VI.1987