Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 2, 1988

УДК 531.36

УСЛОВИЯ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ СУММЫ ФОРМ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.

Полученное Ляпуновым следствие из теоремы об устойчивости [1], частный случай которого — теорема Рауса об устойчивости стационарного движения системы с циклическими координатами, послужило отправным моментом для развития в данной работе исследований по устойчивости движения на многообразиях, в частности, определяемых интегралами уравнений возмущенного движения. Получены достаточные условия знакоопределенности суммы форм и устойчивости движения полиномиальных систем на этих многообразиях.

1. Пусть заданы сумма форм

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{s=2}^{2q} X^{(s)}(\mathbf{x}, A_{i_1\ldots i_s}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R_x{}^n \tag{1.1}$$

и многообразие M равенствами

$$F_r(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{p} X_r^{(s)}(\mathbf{x}, B_{ri_1\ldots i_s}) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, m; m < n, p < q \tag{1.2}$$

где $X^{(s)}(\mathbf{x}, A_{i_1\ldots i_s})$, $X_r^{(s)}(\mathbf{x}, B_{ri_1\ldots i_s})$ — полилинейные формы степени s вида

$$X^{(s)}(x, A_{i_1\ldots i_s}) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_s=i_{s-1}}^{n} A_{i_1\ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

$A_{i_1,\ldots,i_s}$, $B_{ri_1,\ldots,i_s}$ — вещественные числа, p, q, s, m, n — целые положительные числа, $R_x{}^n$ — n-мерное евклидово пространство. В формах подобные члены приведены и принято лексикографическое упорядочение членов.

Найдем достаточные условия знакоопределенности функции (1.1) при связях (1.2).

Введем евклидово пространство $R^N{}_y$ векторов $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ и отображение $\Phi : R_x{}^n \to R_y{}^N$

$$\begin{gathered} y_1 = x_1{}^q, \quad y_2 = x_1{}^{q-1}x_2, \quad \ldots, \quad y_n = x_1{}^{q-1}x_n \\ y_{n+1} = x_1^{q-2}x_2{}^2, \quad y_{n+2} = x_1^{q-2}x_2x_3, \ldots, y_{N-n+1} = x_1, \\ y_{N-n+2} = x_2, \ldots, y_N = x_n \end{gathered} \tag{1.3}$$

т. е. $y_j = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_s}$ и $j \rightleftarrows i_1i_2\ldots i_s$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_s$, $i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, N$.

Лемма 1.1. Сумма форм $F(\mathbf{x})$ (1.1), определенная в пространстве $R_x{}^n$, отображением Φ (1.3) преобразуется в некоторую квадратичную форму (КФ)

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{j_1, j_2}^{N} c_{j_1j_2} y_{j_1} y_{j_2}, \quad c_{j_1j_2} = c_{j_2j_1} \tag{1.4}$$

определенную в пространстве $R_y{}^N$.

Доказательство. Пусть в сумме форм $F(\mathbf{x})$ (1.1) формы следуют одна за другой в порядке убывания степеней этих форм, начиная с формы степени $2q$ и кончая формой второй степени. Покажем, что каждый член суммы форм $F(\mathbf{x})$ (1.1) при помощи отображения Ф (1.3) может быть преобразован в некоторый одночлен второго порядка КФ $f(\mathbf{y})$ (1.4).

Начнем с формы второй степени функции $F(\mathbf{x})$ (1.1). Используя равенства

$$x_1 = y_{N-n+1},\ x_2 = y_{N-n+2}, \ldots, x_n = y_N$$

входящие в отображение (1.3), убедимся, что КФ из суммы форм $F(\mathbf{x})$ (1.1) преобразуется в КФ относительно переменных $y_{N-n+1}, y_{N-n+2}, \ldots, y_N$ единственным образом.

Рассмотрим форму третьей степени в функции $F(\mathbf{x})$ (1.1). Наряду с переменными $y_{N-n+1}, y_{N-n+2}, \ldots, y_N$ используем переменные вида

$$y_j = x_{i_1}x_{i_2} \ (i_1 \leqslant i_2;\ i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, n)$$

При этом каждый член третьего порядка функции $F(\mathbf{x})$ (1.1) преобразуется в член второго порядка КФ $f(\mathbf{y})$ (1.4). Например, выражение $x_{n-1}x_n^2$ преобразуется в произведение координат $y_{N-1}y_{N-n}$. Но это преобразование неоднозначно, так как выражение $x_{n-1}x_n^2 = x_{n-1}x_nx_n$ преобразуется еще и в произведение $y_{N-n-1}y_N$.

Заметим, что члены третьего порядка функции $F(\mathbf{x})$ (1.1) могут быть преобразованы и в члены первого порядка, если использовать компоненты отображения Ф (1.3) вида $y_j = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$ $(i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3,\ i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \ldots, n)$. Однако представляет интерес преобразование только в квадратичную форму.

Рассмотрим теперь в функции $F(\mathbf{x})$ (1.1) произвольный член порядка s

$$A_{i_1i_2\ldots i_s}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_s} \ (i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_s;\ i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, \ldots, n,$$
$$s = 2q, 2q-1, \ldots, 2)$$

Мультииндекс $i_1i_2\ldots i_s$ разделим на две части: $i_1i_2\ldots i_k$ и $i_{k+1}i_{k+2}\ldots i_s$ $(1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n,\ 1 \leqslant i_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant i_s \leqslant n)$ таким образом, чтобы согласно отображению Ф (1.3) сохранить взаимно однозначное соответствие

$$i_1i_2\ldots i_k \rightleftarrows j_1, \quad i_{k+1}i_{k+2}\ldots i_s \rightleftarrows j_2$$

Если взять $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $(s-k) \in \{1, 2, \ldots, q\}$, то такое разделение всегда выполнимо, так как $s \in \{2, 3, \ldots, 2q\}$. Тогда любой член s-го порядка функции $F(\mathbf{x})$ (1.1) преобразуется в соответствующий член $c_{j_1j_2}y_{j_1}y_{j_2}$ КФ $f(\mathbf{y})$ (1.4), а следовательно, сумма форм $F(\mathbf{x})$ — в КФ $f(\mathbf{y})$.

Вообще говоря, такое преобразование неединственное.

Чтобы получить зависимость между коэффициентами $c_{j_1j_2}$ и $A_{i_1\ldots s}$ суммы форм $F(\mathbf{x})$, приравняем КФ $f(y)$ сумме форм $F(\mathbf{x})$

$$\sum_{j_1j_2}^{N} c_{j_1j_2}y_{j_1}y_{j_2} = \sum_{s=2}^{2q} X^{(s)}(\mathbf{x}, A_{i_1\ldots i_s}) \tag{1.5}$$

и подставим сюда значения $y_1, \ldots, y_N$ из равенства (1.3). Сравнивая коэффициенты при одинаковых членах левой и правой частей равенства (1.5), получим следующую систему линейных соотношений между $c_{j_1j_2}$ и $A_{i_1\ldots i_s}$:

$$c_{11} = A_{\underbrace{11\ldots 11}_{2q}},\quad c_{12} = A_{\underbrace{11\ldots 12}_{2q}}, \ldots, \sum_k \sum_P (2 - \delta_{j_1j_2})c_{j_1j_2} =$$
$$= A_{i_1\ldots i_s}, \ldots, c_{NN} = A_{nn} \tag{1.6}$$

где $\sum_k$ — знак суммы по всем разбиениям мультииндекса $i_1\ldots i_s$ на субиндексы $i_1\ldots i_k$ и $i_{k+1}\ldots i_s$; $\sum_P$ — знак суммы по всем перестановкам $i_1, \ldots, i_s$, не нарушающим условий $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, $i_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant i_s$, $\delta_{j_1j_2}$ — символ Кронекера. Соотношение (1.6) служит для определения $c_{j_1j_2}$ при заданных $A_{i_1\ldots i_s}$ и, наоборот, для вычисления $A_{i_1\ldots i_s}$, если известны $c_{j_1j_2}$.

Лемма 1.2. Функция $F_r(\mathbf{x})$ (1.2), определенная в R_x^n, отображением

Ф (1.3) преобразуется в линейную форму

$$(1.7)\qquad f_r(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{N} b_{rj}y_j,\quad r=1,\ldots,m$$

определенную в пространстве $R_y{}^N$

Доказательство. Наивысший порядок членов в суммах форм (1.2), равный числу p, не превышает числа q $(p\leqslant q)$. Поэтому с точностью до коэффициентов каждый член функций $F_r(\mathbf{x})$ (1.2) равен некоторый единственной координате y_j в отображении (1.3). Следовательно, всегда суммы форм $F_r(\mathbf{x})$ (1.2) отображением Ф (1.3) преобразуются в линейную форму (1.7).

Приравнивая линейную форму f_r (у) (1.7) к функции F_r (х) (1.2)

$$(1.8)\qquad \sum_{j=1}^{N} b_{rj}y_j=\sum_{s=1}^{p} X_r^{(s)}(x, B_{rj_1\ldots i_s}),\quad r=1,\ldots,m$$

и подставляя значения $y_1,\ldots,y_N$ из равенств (1.3), получим

$$(1.9)\qquad b_{r1}=B_{r11\ldots11},\quad b_{r2}=B_{r11\ldots12},\ldots,\quad B_{rj}=B_{ri_1\ldots i_s},\ldots,\quad b_{rN}=B_{rn}$$

Теорема 1.1. Для положительной определенности КФ f (у) (1.4) на линейных многообразиях M_r

$$(1.10)\qquad f_r(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{N} b_{rj}y_j=0,\quad r=1,\ldots,m;\quad m<n$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлись вещественные числа a_{ij}, λ, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$(1.11)\qquad a_{ij}=\frac{1}{a_{ii}}\Big(c_{ij}+\lambda^2\sum_{r=1}^{m} b_{ri}b_{rj}-\sum_{k=1}^{i=1} a_{ki}a_{kj}\Big)$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ j=i,\ i+1,\ \ldots,\ N;\ i\geqslant k\geqslant 1,\ m<N$$

и неравенствам

$$(1.12)\qquad a_{ii}\neq 0,\ \forall i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

Доказательство. Необходимость. Пусть КФ f (у) (1.4) положительно определена при тех значениях переменных $y_1,\ldots,y_N$, которые удовлетворяют соотношениям (1.10). Тогда согласно теореме Финслера [2] найдется число λ, при котором КФ

$$(1.13)\qquad P(\mathbf{y})=f(\mathbf{y})+\lambda^2\sum_{r=1}^{m} f_r^2(\mathbf{y})$$

будет положительно-определенной.

Применим к КФ P (у) (1.13) критерий знакоопределенности, полученный в работе [3]. Приравняем КФ P (у) к положительно-определенной КФ с неопределенными коэффициентами

$$(1.14)\qquad f(\mathbf{y})+\lambda^2\sum_{r=1}^{m} f_r(\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=i}^{N} a_{ij}y_j\Big)^2$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых членах левой и правой частей равенства (1.14), находим вещественные числа a_{ij}, удовлетворяющие рекуррентной формуле (1.14) и неравенствам (1.12).

Достаточность. Пусть существуют вещественные числа λ, a_{ij}, удовлетворяющие формуле (1.11) и неравенствам (1.12). Тогда согласно упомянутому критерию знакоопределенности [3] КФ P (у) (1.13) будет положительно-определенной. Отсюда следует, что на линейных многообразиях M_r (1.10), где $P(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$, КФ $f(\mathbf{y})$ (1.4) будет положительно-определенной.

Теорема 1.2. Для положительной определенности суммы форм $F(\mathbf{x})$ (1.1) на многообразии M (1.2) достаточно, чтобы нашлись вещественные числа λ, a_{ij}, удовлетворяющие рекуррентному соотношению (1.11) и неравенствам (1.12), в которых числа c_{ij}, b_{ri} удовлетворяют уравнениям (1.6) и (1.9) соответственно.

Доказательство. Из функций $F(\mathbf{x})$ (1.1) и $F_r(\mathbf{x})$ (1.2) составим новую функцию (λ — вещественное число)

$$Q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \lambda^2 \sum_{r=1}^{m} F_r^2(\mathbf{x}) \tag{1.15}$$

Применим к функции $Q(\mathbf{x})$ (1.15) отображение Φ (1.3). При этом функции $F(\mathbf{x})$ (1.1) и $F_r(\mathbf{x})$ (1.2) преобразуются согласно леммам 1.1 и 1.2 в КФ $f(y)$ (1.4) и линейные формы $f_r(\mathbf{y})$ (1.7) соответственно, а функция $Q(\mathbf{x})$ (1.15) — в КФ $P(\mathbf{y})$ (1.13).

Пусть выполняются условия теоремы 1.2, т. е. по заданным коэффициентам функций $F(\mathbf{x})$ (1.1), $F_r(\mathbf{x})$ (1.2) определены такие числа c_{ij}, b_{ri}, что существуют числа λ, a_{ij}, удовлетворяющие формулам (1.11) и неравенствам (1.12). Тогда согласно теореме 1.1 КФ $f(\mathbf{y})$ (1.4) будет положительно-определенной на линейных многообразиях M_r (1.10), а значит, КФ $P(\mathbf{y})$ (1.13) также будет положительно-определенной. В работе [4] доказано, что при этом будет положительно-определенной функция $Q(\mathbf{x})$ (1.15). Так как на многообразии M (1.2) выполняется тождество $Q(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x})$, то сумма форм $F(\mathbf{x})$ (1.1) будет положительно-определенной на M (1.2).

2. Основные теоремы метода функций Ляпунова об устойчивости движения просто распространяются на случай движения на многообразиях. Сначала приведем необходимые определения, а потом теоремы об устойчивости.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\mathbf{x}^{\cdot} \equiv d\mathbf{x}/dt = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0 \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = (X_1(t, \mathbf{x}), \ldots, X_n(t, \mathbf{x}))$ — вектор-функция, определенная, непрерывная и удовлетворяющая условию Липшица по $\mathbf{x}$ в области

$$G(t, \mathbf{x}) = \{t, \mathbf{x} : t \in [t_0, \infty), \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant H > 0, H = \mathrm{const}\} \tag{2.2}$$

Известно, что семейство интегральных кривых уравнений (2.1) принадлежит многообразию M, заданному равенствами

$$F_r(t, \mathbf{x}) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, m, \quad F_r(t, 0) \equiv 0 \tag{2.3}$$

где $F_r(t, \mathbf{x})$ — непрерывные и непрерывно-дифференцируемые по $\mathbf{x}$ и t функции, полная производная которых по времени t в силу системы (2.1) обращается в нуль.

Предположим, что решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, x_0)$ системы (2.1) при связях (2.3) с начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ определено для всех $t \geqslant 0$, при которых $\|\mathbf{x}\| \leqslant H$. Решение $\mathbf{x} \equiv 0$ соответствует невозмущенному движению системы (2.1) и принадлежит M (2.3).

Рассмотрим вещественные функции $V(t, x)$ $(V(t, 0) \equiv 0)$, определенные, непрерывные и обладающие непрерывными частными производными $\partial V/\partial t$, $\partial V/\partial x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) в области G (2.2), а также их полные производные по времени $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x})$, взятые в силу системы (2.1)

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(t, \mathbf{x}) \tag{2.4}$$

Определение 2.1. Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется знакопостоянной на многообразии M (2.3), если принимает на M, кроме нулевых, значения только одного знака.

Определение 2.2. Функция $W(\mathbf{x})$, не зависящая явно от времени t, называется положительно-определенной на многообразии M (2.3), если в каждой точке M она неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$.

Определение 2.3. Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется положительно-определенной на многообразии M (2.3), если существует такая не зависящая явно от t положительно-определенная на M функция $W(\mathbf{x})$, что

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant W(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

Определение 2.4. Функция $V(t, \mathbf{x})$ называется функцией, допускающей бесконечно малый высший предел на многообразии (2.3), если для любого числа $\varepsilon > 0$ может быть найдено число $\delta > 0$, такое, что на M выполняется условие

$$|V(t, \mathbf{x})| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant \delta, \quad t \geqslant 0$$

Определение 2.5. Функцию $V(t, \mathbf{x})$ будем называть функцией, допускающей бесконечно большой низший предел на многообразии M (2.3), если для любого числа $A > 0$ существует число $B > 0$, такое, что на M выполняется условие

$$|V(t, \mathbf{x})| > A, \quad \text{если} \quad \|\mathbf{x}\| \geqslant B, \quad t \geqslant 0$$

Следующее утверждение принадлежит Ляпунову, сформировавшему его в качестве следствия из теоремы об устойчивости [1].

Теорема 2.1. Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, положительно-определенная на многообразии M (2.3), производная $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x})$ которой в силу системы (2.1) — знакоотрицательная на M функция, или $V^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv 0$ на M, то невозмущенное движение устойчиво на M.

Теорема 2.2. Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, положительно-определенная и допускающая бесконечно малый высший предел на многообразии M (2.3), а ее производная $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x})$ — отрицательно-определенная на M функция, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво на M.

Теорема 2.3. Если на многообразии M (2.3) выполнены условия теоремы 2.2, а функция $V(t, \mathbf{x})$ к тому же допускает бесконечно большой низший предел на M, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво в целом на M.

Это утверждение для области G принадлежит Н. Н. Красовскому [5].

Аналогично распространяются на рассматриваемый случай и другие теоремы устойчивости. При этом доказательство теорем полностью сохраняется, однако необходимо иметь в виду, что движение изображающей точки системы происходит по многообразию M (2.3).

3. Получим достаточные условия устойчивости движения полиномиальных систем на многообразии M (1.2). Пусть возмущенные движения системы описываются уравнениями вида

$$x_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{s=1}^{2h-1} X_\beta^{(s)}(\mathbf{x}, C_{\beta i_1 \ldots i_s}), \quad \beta = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

где $C_{\beta i_1 \ldots i_s}$ — вещественные числа, h, m — целые числа, причем координаты $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют соотношениям (1.2) и справедливы условия

$$\frac{dF_r}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial F_r}{\partial x_\beta} x_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv 0 \tag{3.2}$$

В дальнейшем эти условия считаются всегда выполненными.

Найдем условия, связывающие коэффициенты $C_{\beta i_1 \ldots i_s}$ и $B_{r i_1 \ldots i_s}$ (1.2), при которых обеспечивается асимптотическая устойчивость в целом рассматриваемого невозмущенного движения на многообразии M (1.2). Для этого воспользуемся теоремой 2.2.

Функцию Ляпунова будем искать во множестве отрицательно-определенных функций

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\sum_{r=1}^{k} X_\alpha^{(r)}(\mathbf{x}, d_{\alpha i_1 \ldots i_r}) \right)^2 \tag{3.3}$$

где $X_\alpha^{(r)}(\mathbf{x}, d_{\alpha i_1 \ldots i_r})$ — полилинейная форма степени r с постоянными вещественными коэффициентами $d_{\alpha i_1 \ldots i_r}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$; $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$), образующими неособую ($N \times N$)-матрицу, например верхнюю треугольную с ненулевыми диагональными элементами, k — целое число.

Полная производная функции $V(x)$ (3.3) по времени t в силу системы (3.1) представляет собой сумму форм (1.1)

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_\beta} x_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{s=2}^{2q} X^{(s)}(\mathbf{x}, A_{i_1 \ldots i_s}) \tag{3.4}$$

где $q = k + h - 1$, а коэффициенты $A_{i_1 \ldots i_s}$ определяются в результате приведения подобных членов после скалярного умножения вектора $(\partial V/\partial x_1, \ldots, \partial V/\partial x_n)$ на вектор $(x_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, x_n^{\boldsymbol{\cdot}})$ и равны сумме соответствующих парных произведений коэффициентов $d_{\alpha i_1 \ldots i_r}$ (3.3) и $C_{\beta i_1 \ldots i_s}$ (3.1).

Запишем условия положительной определенности производной $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ (3.4) на многообразии M (1.2). Эти условия даются теоремой 1.1.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1. Для асимптотической устойчивости в целом невозмущенного движения системы (3.1) на многообразии M (1.2) достаточно, чтобы нашлись вещественные числа λ, a_{ij} из рекуррентного соотношения (1.11), удовлетворяющие условию (1.12), где коэффициенты c_{ij}, b_{ri} определяются из уравнений (1.6) и равенств (1.9) соответственно.

Рассмотрим линейную систему. Система (3.1) при $h = 1$ представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} C_{\beta i} x_i, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n \tag{3.5}$$

Равенства (1.2) при $p = 1$ представляют собой линейные многообразия M_r

$$(3.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} B_{ri}x_i = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, m; \quad m < n$$

Функция (3.3) при $k = 1$, $N = n$ представляет собой отрицательно-определенную КФ

$$(3.7) \qquad V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{\alpha i}x_i\right)^2$$

Теорема 3.2. Для асимптотической устойчивости линейной системы (3.5) на линейных многообразиях (3.6) условия теоремы 3.1 при $N = n$ являются необходимыми и достаточными.

Доказательство. Необходимость. Пусть линейная система (3.5) асимптотически устойчива при условиях (3.6). Из теоремы Ляпунова о существовании КФ Ляпунова для асимптотически устойчивой линейной системы следует, что полная производная функции (3.7) в силу системы (3.5) является положительно-определенной. Тогда на линейных многообразиях (3.6) положительно-определенной будет КФ

$$(3.8) \qquad P(\mathbf{x}) = V^{\cdot} + \lambda^2 \sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ri}x_i\right)^2$$

Критерий знакоопределенности этой КФ дается формулой (1.11) и неравенствами (1.12).

Достаточность. Пусть существуют указанные в теореме числа λ, a_{ijr} удовлетворяющие соотношениям (1.11), (1.12). Тогда [4] положительно-определенной будет КФ $P(\mathbf{x})$ (3.8). Отсюда следует, что на линейных многообразиях (3.6), где $P(\mathbf{x}) = V^{\cdot}$, полная производная КФ $V(\mathbf{x})$ (3.7) в силу системы (3.5) будет положительно определена. Из теоремы 2.2 вытекает тогда асимптотическая устойчивость системы (3.5) на линейных многообразиях (3.6).

Пример. Покажем, что решение $\mathbf{x} \equiv 0$ системы

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} x_1^{\cdot} &= -2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2^3 - 2x_1x_2^2 \\ x_2^{\cdot} &= x_1 - x_2 + x_2^2 + x_1x_2 \end{aligned}$$

асимптотически устойчиво на многообразии M

$$(3.10) \qquad F_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 = 0$$

Так как полная производная функции $F_1(x_1, x_2)$ по времени t обращается в нуль, то интегральные кривые системы (3.8) лежат на многообразии M (3.10).

Для решения задачи воспользуемся теоремой 3.1. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = -{}^1/_2\,[(d_{11}x_1 + d_{12}x_2)^2 + (d_{22}x_2)^2]$$

где d_{11}, d_{12}, d_{22} — произвольные вещественные числа.

Вычислим полную производную $V^{\cdot}$ этой функции по t в силу системы (3.8) и составим функцию

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = V^{\cdot} + \lambda^2F_1 &= 2d_{11}^2x_1^2x_2^2 + 2(d_{11}^2 + d_{12}d_{11})x_1x_2^3 + (2d_{11}^2 - \\ &- d_{11}d_{12})x_1^2x_2 + (-2d_{11}^2 + d_{11}d_{12} - d_{12}^2 - d_{22}^2)x_1x_2^2 + 2d_{11}d_{12}x_2^4 - \\ &- (2d_{11}d_{12} + d_{12}^2 + d_{22}^2)x_2^3 - d_{11}d_{12}x_1^2 + (d_{11}d_{12} - d_{12}^2 - d_{22}^2)x_1x_2 + \\ &+ (d_{12}^2 + d_{22}^2)x_2^2 + \lambda^2(x_1 + x_2)^2 \end{aligned}$$

Отображение, преобразующее функцию $Q(\mathbf{x})$ (3.11) в КФ, таково:

$$(3.12) \qquad y_1 = x_1x_2, \quad y_2 = x_2^2, \quad y_3 = x_1, \quad y_4 = x_2$$

Отображение (3.12) преобразует функцию $Q(\mathbf{x})$ в КФ

$$(3.13) \qquad P(\mathbf{y}) = f(y) + \lambda^2 f_1(\mathbf{y}) = \sum_{j_1, j_2}^{4} c_{j_1j_2}y_{j_1}y_{j_2} + \lambda^2(b_{12}y_2 + b_{13}y_3)^2, \quad c_{j_1j_2} = c$$

Приравнивая функции Q (x) (3.11) и P (y) (3.13), подставляя значения y_1, y_2, y_3, y_4 (3.12) и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах, получаем

$$c_{11} = 2d_{11}^2, \quad c_{12} = c_{21} = d_{11} + d_{12}d_{11}, \quad c_{13} = c_{31} = d_{11}^2 - {}^1/_2 d_{11}d_{12}$$
$$c_{14} = c_{41} = {}^1/_2\,(-2d_{11}^2 + d_{11}d_{12} - d_{12}^2 - d_{22}^2), \quad c_{22} = 2d_{11}d_{12}$$
$$c_{23} = c_{32} = 0, \quad c_{33} = -d_{11}d_{12}, \quad c_{34} = c_{43} = {}^1/_2\,(d_{11}d_{12} - d_{12}^2 - d_{22}^2)$$
$$c_{44} = d_{12}^2 + d_{22}^2, \quad b_{12} = 1, \quad b_{13} = 1$$

Теперь по рекуррентной формуле (1.11) вычисляем числа a_{ij} и проверяем справедливость неравенств (1.12). Получим

$$a_{11} = a_{13} = 1, \quad a_{12} = a_{24} = -{}^1/_2, \quad a_{14} = {}^1/_2, \quad a_{23} = {}^3/_2$$
$$a_{22} = a_{33} = 2, \quad a_{34} = -{}^5/_4, \quad a_{44} = ({}^1/_4)\sqrt{39}, \quad \lambda = {}^5/_2.$$

Условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда решение $\mathbf{x} \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом на многообразии (3.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1956. Т. 2. С. 7—266.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
3. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Условия знакоопределенности четных форм и устойчивости в целом нелинейных однородных систем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 339—347.
4. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Функции Ляпунова для исследования устойчивости в целом нелинейных систем // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 883—893.
5. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 212 с.

Казань

Поступила в редакцию
24.VI.1987