

УДК 62-50

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

Розыев И., Субботин А. И.

Исследуются уравнения Гамильтона — Якоби и Беллмана — Айзекса, в которых обобщенное (вязкое) решение определяется при помощи пары дифференциальных неравенств. При таком определении решение существует, единственно и для уравнения Беллмана — Айзекса совпадает с функцией цены соответствующей дифференциальной игры. В отличие от опубликованных работ ([1—8] и др.), где исследовались непрерывные решения, рассматриваются дифференциальные игры с полунепрерывными функционалами платы и соответствующие полунепрерывные решения. Вводятся определения этих решений и доказываются теоремы существования и единственности.

Задачи, в которых условие непрерывности функции цены (функции Беллмана) может нарушаться, хорошо известны. Например, в дифференциальной игре преследования — уклонения функционал платы, определенный как время до встречи, полунепрерывен снизу и соответствующая функция цены также оказывается полунепрерывной снизу. В частности, в задаче оптимального быстрогодействия функция Беллмана полунепрерывна снизу; ее свойства изучались многими авторами, получены в [9, 10] дифференциальные соотношения, выражающие принцип оптимальности в задаче быстрогодействия.

В рамках теории дифференциальных игр можно изучать многие вопросы общей теории уравнений Гамильтона — Якоби. Цель данной работы — развить аппарат дифференциальных неравенств и определить обобщенные (вязкие) решения для случая, когда эти решения полунепрерывны. Для определенности рассматривается дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания. Затем формулируются результаты для игры преследования — уклонения.

1. Дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, v \in Q; \quad f: T \times R^n \times P \times Q \rightarrow R^n$$

где P и Q — компакты в пространствах R^p и R^q соответственно. Функция f непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по переменной x . Предполагаем, что игра начинается в момент времени $t_0 \in T = [0, \theta]$ и оканчивается в момент времени $t = \theta$. Функция f удовлетворяет условиям, обеспечивающим продолжимость решений до момента $t = \theta$. Выполнено также условие

$$(1.2) \quad \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \\ = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle, \quad (t, x, s) \in T \times R^n \times R^n$$

($\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов a и b).

Дифференциальная игра рассматривается в классе позиционных стратегий. Функционал платы определен равенством

$$(1.3) \quad \gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta)); \quad x(\cdot): [t_0, \theta] \rightarrow R^n, \quad \sigma: R^n \rightarrow R$$

где $x(\cdot)$ — реализовавшееся движение системы (1.1), σ — заданная функция. Формализация позиционной дифференциальной игры приведена, например, в [11—13]. Если функция σ полунепрерывна (снизу или сверху), то для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ существует цена игры $\omega(t_0, x_0)$. Если функция цены $(t, x) \rightarrow \omega(t, x)$ диф-

ференцируема в некоторой области, то в этой области она удовлетворяет уравнению Беллмана—Айзекса

$$(1.4) \quad \partial\omega/\partial t + H(t, x, \partial\omega/\partial x) = 0$$

Функция цены удовлетворяет краевому условию

$$(1.5) \quad \omega(\theta, x) = \sigma(x)$$

В уравнении (1.4) $H(t, x, s)$ — гамильтониан системы (1.1), определяемый равенством

$$(1.6) \quad H(t, x, s) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle$$

Ниже будет определено понятие обобщенного решения задачи (1.4), (1.5) в случае, когда функция платы и, соответственно, функция цены полунепрерывны. Предлагаемые конструкции являются развитием результатов, полученных [1—8] для непрерывных либо удовлетворяющих условию Липшица функций σ и ω .

Пусть $\omega: T \times R^n \rightarrow R$ — некоторая функция. Выберем точку $(t, x) \in T^\circ \times R^n$ ($T^\circ = [0, \theta)$) и вектор $h \in R^n$. Введем обозначения:

$$(1.7) \quad \partial_- \omega(t, x) | (1, h) = \lim_{\delta \downarrow 0, \|g\| \downarrow 0} \Omega \partial_+ \omega(t, x) | (1, h) = \overline{\lim}_{\delta \downarrow 0, \|g\| \downarrow 0} \Omega$$

$$(\Omega = [\omega(t + \delta, x + \delta h + \delta g) - \omega(t, x)] \delta^{-1})$$

$$(1.8) \quad G_\omega^-(t, x) = \{h \in R^n: \partial_- \omega(t, x) | (1, h) \leq 0\}$$

$$G_\omega^+(t, x) = \{h \in R^n: \partial_+ \omega(t, x) | (1, h) \geq 0\}$$

$$(1.9) \quad \rho_\omega^-(t, x | l) = \sup_h \langle h, l \rangle, \quad h \in G_\omega^-(t, x)$$

$$\rho_\omega^+(t, x | l) = \inf_h \langle h, l \rangle, \quad h \in G_\omega^+(t, x)$$

Рассмотрим дифференциальные включения

$$(1.10) \quad \dot{x}(t) \in F_1(t, x(t), v), \quad \dot{x}(t) \in F_2(t, x(t), u)$$

$$(1.11) \quad F_1(t, x, v) = \text{co} \{f(t, x, u, v): u \in P\}$$

$$F_2(t, x, u) = \text{co} \{f(t, x, u, v): v \in Q\}$$

(co $\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества).

Множество абсолютно непрерывных функций $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющих первому (второму) дифференциальному включению, а также условию $x(t_0) = x_0$, обозначим $X_1(t_0, x_0, v)$ ($X_2(t_0, x_0, u)$).

Определение 1.1. Суперрешением задачи (1.4), (1.5) называется полунепрерывная снизу функция $\omega: T \times R^n \rightarrow R$, удовлетворяющая условиям

$$(1.12) \quad \rho_\omega^-(t, x | l) \geq H(t, x, l), \quad (t, x, l) \in T^\circ \times R^n \times R^n$$

$$(1.13) \quad \omega(\theta, x) \geq \sigma(x), \quad x \in R^n$$

Определение 1.2. Субрешением задачи (1.4), (1.5) называется полунепрерывная сверху функция $\omega: T \times R^n \rightarrow R$, удовлетворяющая условиям

$$(1.14) \quad \rho_\omega^+(t, x | l) \leq H(t, x, l), \quad (t, x, l) \in T^\circ \times R^n \times R^n$$

$$(1.15) \quad \omega(\theta, x) \leq \sigma(x), \quad x \in R^n$$

Определение 1.3. Функция $\omega^0: T \times R^n \rightarrow R$ называется обобщенным решением задачи (1.4), (1.5), если существуют последовательности суперрешений ω^k и субрешений ω_k ($k = 1, 2, \dots$), сходящиеся поточечно к функции ω^0 .

Неравенство (1.12) выражает свойство u -стабильности функции ω [6, 11, 13]. Это свойство можно также определить следующими эквивалентными неравенствами:

$$(1.16) \quad \sup_{(t_1, x_1, t_2, v)} \inf_{x(\cdot) \in X_1(t_1, x_1, v)} [\omega(t_2, x(t_2)) - \omega(t_1, x_1)] \leq 0$$

$$(t_1, x_1, v) \in T^\circ \times R^n \times Q, \quad t_2 \in (t_1, \theta]$$

$$(1.17) \quad \max_{v \in Q} \min_{h \in F_1(t, x, v)} \partial_- \omega(t, x) | (1, h) \leq 0, \quad (t, x) \in T^\circ \times R^n$$

Неравенство (1.14), которое означает, что функция ω удовлетворяет условию v -стабильности, можно заменить любым из двух эквивалентных неравенств

$$(1.18) \quad \inf_{(t_1, x_1, t_2, u)} \sup_{x(\cdot) \in X_2(t_1, x_1, u)} [\omega(t_2, x(t_2)) - \omega(t_1, x_1)] \geq 0$$

$$(t_1, x_1, u) \in T^\circ \times R^n \times P, \quad t_2 \in (t_1, \theta]$$

$$1.19) \quad \min_{u \in P} \max_{h \in F_2(t, x, u)} \partial_+ \omega(t, x) | (1, h) \geq 0, \quad (t, x) \in T^\circ \times R^n$$

Для обобщенных решений справедливы следующие теоремы существования и единственности.

Теорема 1.1. Пусть гамильтониан H определен равенством (1.6), где функция f удовлетворяет указанным выше условиям. Если обобщенное решение задачи (1.4), (1.5) существует, то оно единственно и совпадает с функцией цены позиционной дифференциальной игры (1.1), (1.3).

Теорема 1.2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1.1 функция σ полунепрерывна снизу (сверху) и ограничена. Тогда обобщенное решение задачи (1.4), (1.5) существует, единственно, совпадает с функцией цены дифференциальной игры (1.1), (1.3) и является суперрешением (субрешением) задачи (1.4), (1.5).

Заметим, что из теоремы 1.2 следует, что для непрерывной функции σ обобщенное решение задачи (1.4), (1.5) является одновременно суб- и суперрешением этой задачи. Доказательство теорем 1.1 и 1.2 опирается на экстремальную конструкцию, развитую в теории позиционных дифференциальных игр [11, 13].

2. Свойства стабильности и экстремальная конструкция. Как отмечалось выше, свойства u - и v -стабильности можно определять разными способами. Сформулируем это положение.

Лемма 2.1. Если функция ω полунепрерывна снизу (сверху), то условия (1.12), (1.16), (1.17) ((1.14), (1.18), (1.19)) эквивалентны.

Доказательство леммы 2.1 совпадает в основном с доказательствами аналогичных утверждений из работ [6, 8, 14]¹. В нем используется лемма 2 из [15].

Теорему 1.1 можно доказать, следуя схеме доказательства теоремы 5.3 из [6].

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим случай, когда функция σ полунепрерывна снизу. Полагаем

$$E = \text{epi } \sigma = \{(r, x) \in R \times R^n: r \geq \sigma(x)\}$$

$$R_\alpha(x) = \{r \in R: \text{dist}[(r, x), E] \geq \alpha\}$$

¹ См. также Гусейнов Х. Г. Об одном определении свойства стабильности функции цены дифференциальной игры неравенствами. Баку, 1986. 18 с. — Деп. в ВИНТИ 04.04.86, № 2408-В.

$$\sigma^\alpha(x) = \max R_\alpha(x), \quad \alpha \in (0, 1]$$

$$\text{dist}[(r, x), E] = \min [(r - r_*)^2 + \|x - x_*\|^2]^{1/2}, \quad (r_*, x_*) \in E$$

Отметим свойства функции σ^α для любых $\alpha \in (0, 1]$ и $x \in R^n$

$$(2.1) \quad \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \sigma^\alpha(y) \leq \sigma^\alpha(x), \quad \lim_{\alpha \downarrow 0, y \rightarrow x} \sigma^\alpha(y) = \sigma(x)$$

$$\sigma^\alpha(x) \leq \sigma(x) - \alpha$$

$$\sup_{\alpha, x} |\sigma^\alpha(x)| \leq l < \infty; \quad \sigma^{\alpha_1}(x) \geq \sigma^{\alpha_2}(x), \quad \alpha_1 \leq \alpha_2$$

Обозначим Ω_1^α (Ω_2^α) совокупность функций $\omega: T \times R^n \rightarrow [-l, l]$, удовлетворяющих условию (1.16) ((1.18)) и неравенству $\omega(\theta, x) \geq \sigma^\alpha(x)$ ($\omega(\theta, x) \leq \sigma^\alpha(x)$) при $x \in R^n$.

Рассмотрим функцию

$$\omega^\alpha(t, x) = \inf \omega(t, x), \quad \omega \in \Omega_1^\alpha$$

Как показано в [16], $\omega^\alpha \in \Omega_1^\alpha \cap \Omega_2^\alpha$. Заметим, что из последнего свойства (2.1) следует

$$(2.2) \quad \Omega_1^{\alpha_1} \subset \Omega_2^{\alpha_2}, \quad \omega^{\alpha_2}(t, x) \leq \omega^{\alpha_1}(t, x) \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2$$

Можно показать ([16]), что функция ω° , определенная равенством

$$(2.3) \quad \omega^\circ(t, x) = \lim_{\alpha \downarrow 0, (\tau, y) \rightarrow (t, x)} \omega^\alpha(\tau, y)$$

удовлетворяет определению 1.1, т. е. является суперрешением задачи (1.4), (1.5).

Определим функцию

$$(2.4) \quad \omega_+^\alpha(t, x) = \overline{\lim}_{(\tau, y) \rightarrow (t, x)} \omega^\alpha(\tau, y)$$

Непосредственно из определения следует, что эта функция полунепрерывна сверху. Она удовлетворяет неравенству (1.18) (см. аналогичное утверждение в [16]). Используя первое и третье свойства (2.1), можно получить оценку $\omega_+^\alpha(\theta, x) \leq \sigma(x)$, $x \in R^n$. Итак, функция ω_+^α — субрешение задачи (1.4), (1.5).

Рассмотрим последовательность функций $\omega_k = \omega_+^{\alpha_k}$, $k = 1, 2, \dots$, \dots , $\alpha_{k+1} < \alpha_k$, $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Из (2.2) следует, что $\omega_k(t, x)$ — возрастающая последовательность, поэтому существуют предел $\lim \omega_k(t, x) = \omega_+(t, x)$ при $k \rightarrow \infty$. Используя, что ω° и ω_+^α — супер- и субрешения задач (1.4), (1.5), можно показать, что $\omega^\circ(t, x) \geq \omega_+^\alpha(t, x)$ [6, 16]. Поэтому $\omega^\circ(t, x) \geq \omega_+(t, x)$. С другой стороны, из (2.3) и (2.4) имеем $\omega^\circ(t, x) \leq \omega_+(t, x)$. Следовательно, $\omega^\circ(t, x) = \omega_+(t, x)$. Таким образом получаем $\omega^\circ(t, x) = \lim \omega_k(t, x)$ при $k \rightarrow \infty$, где ω° — суперрешение, а ω_k ($k = 1, 2, \dots$) — последовательность субрешений. Тем самым теорема 1.2 доказана для случая полунепрерывной снизу функции σ . Для случая полунепрерывной сверху функции σ доказательство аналогично.

3. Игровая задача быстрогодействия. Приведем результаты, относящиеся к задаче (M, N) -сближения [11, 13]. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением (1.1). Заданы множества $M \subset N \subset [0, \theta] \times R^n$, где $\theta_* < \theta$. Множество M является целевым для первого игрока, заинтересованного в том, чтобы точка $(t, x(t))$ попала на M за наименьшее время. Множество N — фазовое ограничение, требуется, чтобы при переходе из начальной позиции на множество M выполнялось условие $(t, x(t)) \in N$.

Функционал платы $\tau(x(\cdot))$ определим следующим образом. Пусть $x(\cdot): [t_0, \theta] \rightarrow R^n$ — непрерывная функция. Полагаем

$$(3.1) \quad T(x(\cdot)) = \{\tau \in [t_0, \theta]: (\tau, x(\tau)) \in M, (t, x(t)) \in N, t_0 \leq t \leq \tau\}$$

$$\tau(x(\cdot)) = \begin{cases} \inf T(x(\cdot)), & T(x(\cdot)) \neq \emptyset \\ \theta, & T(x(\cdot)) = \emptyset \end{cases}$$

Вместо θ можно было бы взять любое число $\theta^* > \theta_*$, в частности несобственное число $+\infty$.

Если множества M и N замкнуты, то известно, что в дифференциальной игре (1.1), (3.1) для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ существует цена $\omega^\circ(t_0, x_0)$. Если в некоторой открытой области $O \subset T \times R^n$ функция цены ω° дифференцируема, то в этой области она удовлетворяет уравнению (1.4). Из определений функционала платы (3.1) и функции цены следует, что

$$(3.2) \quad \omega^\circ(t, x) \geq t, \quad \forall (t, x) \in T \times R^n$$

$$\{(t, x): \omega^\circ(t, x) = t\} = M, \quad \{(t, x): \omega^\circ(t, x) \leq \theta_*\} \subset N$$

Известно также, что в случае, когда множества M и N замкнуты, функция ω° полунепрерывна снизу.

Чтобы определить функцию цены как обобщенное решение задачи (1.4), (3.2), опять предлагается заменить уравнение (1.4) парой дифференциальных неравенств. Отметим, что в определениях, которые даны ниже, не требуется, чтобы множества M и N были замкнуты.]

Определение 3.1. Суперрешением задачи (1.4), (3.2) называется полунепрерывная снизу функция $\omega: T \times R^n \rightarrow T$, удовлетворяющая условиям

$$\rho_{\omega^-}(t, x | l) \geq H(t, x, l), \quad (t, x) \in (T^\circ \times R^n) \setminus M_c, \quad l \in R^n$$

$$\omega(t, x) \geq t, \quad (t, x) \in T \times R^n$$

$$\{(t, x) \in T \times R^n: \omega(t, x) \leq \theta_*\} \subset N_c$$

где M_c и N_c — некоторые замкнутые множества, удовлетворяющие включениям $M_c \subset M$, $N_c \subset N$.

Определение 3.2. Субрешением задачи (1.4), (3.2) называется полунепрерывная сверху функция $\omega: T \times R^n \rightarrow T$, удовлетворяющая условиям

$$\rho_{\omega^+}(t, x | l) \leq H(t, x, l), \quad (t, x) \in N^\circ$$

$$\omega(t, x) \geq t, \quad (t, x) \in T \times R^n$$

$$\{(t, x) \in T \times R^n: \omega(t, x) = t\} \supset M^\circ$$

где M° и N° — некоторые открытые множества, содержащие множества M и N соответственно.

Определение 3.3. Функция $\omega^\circ: T \times R^n \rightarrow T$ называется обобщенным решением задачи (1.4), (3.2), если существуют последовательности суперрешений ω^k и субрешений ω_k ($k = 1, 2, \dots$), сходящиеся поточечно к функции ω° .

Для игровой задачи быстрого действия справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1.1, 1.2.

Теорема 3.1. Пусть гамильтониан H определен равенством (1.6), а функция f удовлетворяет условиям, указанным в п. 1. Если обобщенное решение задачи (1.4), (3.2) существует, то оно единственно и совпа-

дает с функцией цены дифференциальной игры (1.1), (3.1), т. е. с функцией оптимального результата в игровой задаче быстрогодействия.

Теорема 3.2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 3.1 множества M и N замкнуты. Тогда обобщенное решение задачи (1.4), (3.2) существует, единственно, совпадает с функцией цены дифференциальной игры (1.1), (3.1) и является суперрешением задачи (1.4), (3.2).

Эти теоремы приведены без доказательств, которые во многом близки доказательствам теорем 1.1 и 1.2.

Заметим, что обычно в задаче быстрогодействия в качестве целевого функционала рассматривается не момент $\tau(x(\cdot))$ (3.1) попадания движения на терминальное множество, а время $t(x(\cdot))$ до этого попадания. Понятно, что $t(x(\cdot)) = \tau(x(\cdot)) - t_0$, $w^\circ(t_0, x_0) = \omega^\circ(t_0, x_0) - t_0$, где w° — функция цены в игровой задаче быстрогодействия с целевым функционалом $t(x(\cdot))$. Соотношения (3.2) для функции w° можно переписать следующим образом:

$$(3.3) \quad w^\circ(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in T \times R^n \\ \{(t, x): w^\circ(t, x) = 0\} = M, \quad \{(t, x): w^\circ(t, x) \leq \theta_* - t\} \subset N$$

Если в некоторой открытой области $O \subset T \times R^n$ функция w° дифференцируема, то она удовлетворяет в этой области уравнению

$$(3.4) \quad \partial w^\circ / \partial t + H(t, x, \partial w^\circ / \partial x) = -1$$

Понятно также, как изменяются определения 3.1—3.3 при переходе от задачи (1.4), (3.2) к задаче (3.3), (3.4). При выполнении условий теоремы 3.2 обобщенное решение задачи (3.3), (3.4) существует, единственно и совпадает с функцией цены w° в игровой задаче быстрогодействия. Заметим, что здесь дифференциальные неравенства можно записать следующим образом (см. (1.7), (1.11)):

$$\max_{v \in Q} \min_{h \in F_1(t, x, v)} \partial w(t, x) | (1, h) \leq -1 \\ \min_{u \in P} \max_{h \in F_2(t, x, u)} \partial w(t, x) | (1, h) \geq -1$$

4. Заключение. Выделим основное в предлагаемом определении обобщенного решения для уравнений вида (1.4). Обобщенное решение является минорантой для суперрешений и одновременно — мажорантой для субрешений. При определении супер- или субрешения исходное уравнение (1.4) заменяется дифференциальным неравенством (1.12) или (1.14) соответственно. Эти неравенства выражают свойства u - и v -стабильности функции цены и могут быть записаны в различных эквивалентных формах.

В данной работе рассмотрены две задачи, для которых определены обобщенные решения и доказаны теоремы существования и единственности. Отметим, что аналогичные результаты справедливы и для других типов задач, например для дифференциальных игр с функционалами платы вида

$$\sigma(x(\theta)) + \int_{t_0}^{\theta} f_0(t, x(t), u(t), v(t)) dt, \quad \min_{t_0 \leq t \leq \theta} \rho(t, x(t))$$

Некоторые из введенных выше предположений не существенны. В частности, можно опустить условие (1.2), при этом неравенства (1.16) — (1.19) следует изменить так, как это сделано в работах [1, 6, 8], где рассматривались задачи с непрерывными функционалами платы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин А. И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1980. Т. 254. № 2. С. 293—297.
2. Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. No. 1. P. 1—42.

3. *Crandall M. G., Evans L. C., Lions P. L.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 282. No. 2. P. 487—502.
4. *Evans L. C., Souganidis P. E.* Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton — Jacobi — Isaaks equations // *Indiana Univ. Math. J.* 1984. V. 33. No. 5. P. 773—797.
5. *Ishii H.* Uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // *Indiana Univ. Math. J.* 1984. V. 33. No. 5. P. 721—748.
6. *Subbotin A. I.* Generalization of the main equation of differential game theory // *J. Optimiz. Theory and Appl.* 1984. V. 43. No. 1. P. 103—133.
7. *Lions P.-L., Souganidis P. E.* Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaak's equations // *SIAM. J. Control and Optimiz.* 1985. V. 23. No. 4. P. 566—583.
8. *Subbotin A. I., Tarasyev A. M.* Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // *Probl. Control and Inform. Theory.* 1986. V. 15. No. 6. 451—463.
9. *Сухинин М. Ф.* Об одном аналоге уравнения Беллмана // *Мат. заметки.* 1985. Т. 38. № 2. С. 265—269.
10. *Комаров В. А.* Характеристика времени быстрогодействия для дифференциальных включений // *Мат. заметки.* 1986. Т. 40. № 6. С. 726—737.
11. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с.
12. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука. 1985. 518 с.
13. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 287 с.
14. *Guseinov H. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N.* Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // *Probl. Control and Inform. Theory.* 1985. V. 14. No. 3. P. 155—167.
15. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // *Тр. Мат. ин-та АН СССР.* 1985. Т. 169. С. 194—252.
16. *Байбазаров М., Субботин А. И.* Об одном определении цены дифференциальной игры // *Дифференц. уравнения.* 1984. Т. 20. № 2. С. 1489—1495.

Свердловск

Поступила в редакцию
10.IV.1987