

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОЩЕЛКИВАНИЕ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

Срубчик Л. С.

Исследуется динамическая неустойчивость «в большом» упругой полой оболочкой под действием импульсной нагрузки (ИН) и более общей нелинейной упругой непрерывной консервативной системы с потенциальной энергией вида «квадрат нормы плюс слабо непрерывный функционал» с релеевским трением и с заданной начальной скоростью. Применяется энергетический подход [1,2], развитый в [3—6] для анализа динамического прощелкивания (ДП) нелинейной упругой системы под действием стационарной ступенчатой нагрузки. Задача рассматривается в точной бесконечномерной постановке. При помощи понятий ямы и запаса устойчивости равновесия [7] даются определения динамической устойчивости системы, критической ИН ее ДП и астатической критической ИН. Последняя определяется из стационарной задачи и дает оценку снизу тем значениям ИН, для которых имеет место ДП.

Установлено, что необходимым условием ДП системы под действием ИН является существование у той же системы без нагрузки седловой точки потенциальной энергии на границе ямы устойчивого нулевого равновесия. Доказано, что это необходимое условие выполняется для достаточно тонких строго выпуклых оболочек вращения с подвижной и неподвижной шарнирной опорой, а также для некоторого класса произвольных строго выпуклых оболочек с подвижной шарнирной опорой.

Таким образом, запас устойчивости имеет наглядный механический смысл, как точная оценка сверху кинетической энергии, которую можно придать покоящейся системе, чтобы она не достигла наименьшей среды энергетических высот перевалов, ведущих из ямы нулевого равновесия в ямы других равновесий.

Представлены результаты расчетов на ЭВМ критических ИН динамического прощелкивания и астатической для сферических и конических оболочек. В зависимости от краевых условий определены нижние границы отношения высоты подъема оболочки к ее толщине, при которых возможно ДП под действием ИН.

Отметим, что соображения, связанные с оценкой кинетической энергии, необходимой для преодоления энергетического барьера в задаче о ДП под действием ИН системы с двумя степенями свободы, полученной методом Бубнова—Галёркина из уравнений колебаний упругой арки, были впервые применены в [1]. Обобщения на конечномерные модели с большим числом степеней свободы, выполненные разными авторами, отражены в [2, 8, 9].

1. К постановке задачи о ДП. В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим уравнение колебаний непрерывной консервативной механической системы под действием ИН при наличии сил вязкого трения [10]

$$(1.1) \quad \omega_{tt} + \beta_0 B \omega_t + I'(\omega) = 0, \quad I'(\omega) = \text{grad}_H I(\omega)$$

$$I(\omega) = 1/2 \|\omega\|_{H_A}^2 - \varphi(\omega), \quad \|\omega\|_{H_A}^2 = (A\omega, \omega)_H$$

$$(1.2) \quad \omega|_{t=0} = 0, \quad \omega_t|_{t=0} = v \in H$$

Здесь $\omega(t)$ — неизвестная вектор-функция времени t , $I(\omega)$ — потенциальная энергия, H_A — энергетическое пространство самосопряженного положительно-определенного оператора A , $\varphi(\omega)$ — слабо непрерывный в H_A функционал. Релеевское трение задается самосопряженным положительно-определенным оператором B и коэффициентом трения β_0 . Функционал $I(\omega)$ задан на всем пространстве H_A и является возрастающим

по ω . Работа внешних сил не входит в $I(\omega)$, так как ИН снимается до того, как система начинает двигаться, и следовательно, сообщает находящейся в покое системе поле скоростей v . Свойства функционала $I(\omega)$ установлены в [6].

Пусть точка $\omega_0 = 0 \in H_A$ соответствует нулевому устойчивому равновесию системы и $J(0)$ — его яма, которая, согласно [7], определяется как связное множество в H_A , содержащее нуль и состоящее из точек ω , удовлетворяющих условию $I(\omega) < j^*$. Здесь j^* — верхняя грань тех значений энергии j , для которых множества $\{\omega \in H_A : I(\omega) < j\}$ не содержат отличных от нуля устойчивых равновесий. В силу теорем в [6] получаем, что из неединственности нулевого равновесия следует существование на границе ямы $J(0)$, по крайней мере, одной седловой точки γ . В этом случае запас устойчивости нулевого равновесия [7]

$$(1.3) \quad Z(0) = I(\gamma) - I(0)$$

имеет наглядный механический смысл как точная оценка сверху кинетической энергии, которую можно придать системе в нулевом положении, чтобы она осталась в яме $J(0)$ для всех $t > 0$.

Многие задачи о ДП под действием ИН укладываются в следующую общую схему. Пусть начальная скорость $v = v(\alpha)$ непрерывно зависит от параметра ИН α , причем $v(0) = 0$. Пусть для значения $\alpha_0 = 0$ система находится в положении нулевого устойчивого равновесия и в момент $t = 0$ параметр α скачкообразно изменяется от α_0 до α° . Ставится вопрос, остается ли система в яме $J(0)$ или с течением времени из нее уходит. Дело, таким образом, сводится к исследованию поведения решения задачи Коши для системы (1.1) с начальными данными $\omega(0) = 0$, $\omega_t(0) = v(\alpha)$. Если $\omega(t) \in J(0)$ для всех $t \geq 0$, то будем говорить, что ДП отсутствует. Если же $\omega(t)$ при некотором t_* оказывается вне ямы $J(0)$, то имеет место ДП. Очевидно, что ДП невозможно, если $\omega_0 = 0$ — единственное равновесие системы (1.1).

2. Критическая ИН. Область возможных движений M_0 системы (1.1) при $\beta_0 = 0$ определяется неравенством

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} \|\omega_t\|_H^2 + I(\omega) \leq \frac{1}{2} \|v\|_H^2 + I(0)$$

Пусть при $\alpha = \alpha^\circ$ область $M_0(\alpha^\circ)$ удовлетворяет условию $M_0(\alpha^\circ) \subset J(0)$. Тогда ДП нет. Будем увеличивать α , начиная с α° . ДП становится возможным при наименьшем значении α , для которого седловая точка на $\partial J(0)$ попадает в область $M_0(\alpha)$.

Для основного равновесия $\omega_0 = 0$ определим критическую ИН ДП α_d^* , полагая ее равной верхней грани тех значений α , для которых движение системы (1.1), (1.2) при всех $t > 0$ остается в яме $J(0)$. Таким образом, когда α слегка превосходит α_d^* , указанное движение в некоторый момент времени выйдет из ямы равновесия $\omega_0 = 0$ — это и есть, согласно определению, ДП.

Вычисление α_d^* связано с интегрированием нестационарной системы (1.1) при различных α на неопределенном заранее отрезке времени, что приводит к значительным затратам машинного времени.

Далее введем астатическую критическую ИН α_a равновесия $\omega_0 = 0$ как наименьшее решение уравнения

$$(2.2) \quad I(\omega_a) = \frac{1}{2} \|v(\alpha)\|_H^2 + I(0)$$

где ω_a — неустойчивое равновесие на $\partial J(0)$, так что $I'(\omega_a) = 0$.

Для значений $\alpha = \alpha_a$ и α , слегка превосходящих α_a , движение, направленное вдоль соединяющей точки $\omega_0 = 0$ и $\omega_a \in \partial J(0)$ геодезической и имеющее начальное поле скоростей с нормой $\|v(\alpha)\|_H$, выводит систему из $J(0)$. Очевидно, что $\alpha_a \leq \alpha_d^*$, так что астатическая критическая ИН дает оценку снизу для динамической. Можно полагать, что с практической точки зрения она более информативна, поскольку относится к более общим начальным условиям (вместо условия $\omega_t(0) = v(\alpha)$ требуется лишь энергетическое равенство $\|\omega_t(0)\|_H = \|v(\alpha)\|_H$). К тому же величину α_a во многих случаях значительно легче вычислить, так как для этого надо рассматривать лишь стационарные задачи.

3. Нежесткость и ДП упругих оболочек. Уравнения колебаний упругой полой оболочки относятся к классу рассматриваемых уравнений вида (1.1) [6, 10], и поэтому для них справедливы все проведенные рассуждения. Из п. 2 следует, что необходимым условием ДП системы под действием ИН является существование у той же системы без нагрузки седловой точки потенциальной энергии на границе ямы устойчивого нулевого равновесия. Это условие заведомо нарушается для жестких механических систем, у которых, согласно определению [11], в отсутствие нагрузки имеется только нулевое равновесие. Для жестких систем ДП под действием ИН невозможно ни при каких α .

Рассмотрим вопрос о ДП более подробно для упругих полых оболочек. Было показано [11], что пластины произвольной формы при естественных однородных краевых условиях, а также оболочки с толщиной, ограниченной снизу определенными значениями, являются жесткими. С уменьшением относительной тонкостенности оболочка может стать нежесткой, т. е. в отсутствие нагрузки иметь отличные от ненапряженной формы равновесия. Известно [11—13], что достаточно тонкие строго выпуклые оболочки с шарнирной опорой являются нежесткими, и чтобы установить для них возможность ДП под действием ИН, надо доказать существование хотя бы одной седловой точки потенциальной энергии такой оболочки при отсутствии нагрузки.

Запишем систему уравнений равновесия тонкой упругой строго выпуклой ненагруженной оболочки S с подвижной шарнирной опорой в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta^2 F + 1/2 [w, w] - [z, w] &= 0 \\ \varepsilon^2 \Delta^2 w - [w - z, F] &= 0, \quad z|_{\Gamma} = 0 \\ [w, F] &= w_{xx} F_{yy} + w_{yy} F_{xx} - 2w_{xy} F_{xy} \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad [F = F_{\rho} = w]_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma_1 w = [w_{\rho\rho} - \nu \kappa_1 w_{\rho}]_{\Gamma} = 0$$

Входящие в (3.1), (3.2) безразмерные величины связаны с размерными формулами [13]

$$\{W, S, x_1, y_1, n, \tau, \kappa_0^{-1}\} = a \{w, z, x, y, \rho, s, \kappa_1^{-1}\}$$

$$\Phi = E a^2 \varepsilon^2 F, \quad \varepsilon^2 = h/(a\gamma), \quad \gamma^2 = 12(1 - \nu^2)$$

Здесь W — прогиб, Φ — функция напряжений Эри, x_1, y_1 — прямоугольные декартовы координаты, a — характерный размер односвязной строго выпуклой области D , которую оболочка со срединной поверхностью S занимает в плане. Малый параметр ε^2 — относительная тонкостенность оболочки, h — толщина, ν — коэффициент Пуассона, n, τ, κ_0 — внутренняя нормаль, длина дуги, кривизна контура Γ , ограничивающего область

D . Поверхность z для любых $x, y \in D + \Gamma$ удовлетворяет условию

$$(3.3) \quad z_{xx}m^2 - 2z_{xy}mn + z_{yy}n^2 \leq -\beta (m^2 + n^2), \quad \forall m, n \in R$$

где β — некоторая положительная постоянная.

Наряду с нулевым равновесием $F = w = 0$ задача (3.1), (3.2) может иметь при $\varepsilon \rightarrow 0$ равновесие $V_* = (F_*, w_*)$, близкое к симметрично отраженному, и для него справедливы асимптотические разложения $V_\varepsilon = (F_\varepsilon, w_\varepsilon)$ [13]:

$$(3.4) \quad F_* \sim F_\varepsilon = \varepsilon^2 (s_1 + F^0), \quad w_* \sim w_\varepsilon = 2z + \varepsilon^2 (s_2 + w^0)$$

$$\{s_1, s_2\} = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} \{h_i(t), g_i(t)\} \psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right), \quad t = \frac{\rho}{\varepsilon} \geq 0$$

$$F^0 = \sum_{i=2}^n \varepsilon^{i-2} F_i(x, y) + \varepsilon^{n-1} \gamma_3(x, y)$$

$$w^0 = \sum_{i=2}^n \varepsilon^{i-2} w_i(x, y) + \varepsilon^{n-2} \gamma_1(x, y) + \varepsilon^{n-1} \gamma_2(x, y)$$

$$h_1 = -C_1 e^{-\lambda t} \sin\left(\lambda t + \frac{\pi}{4}\right), \quad g_1 = -C_1 e^{-\lambda t} \sin\left(\lambda t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$C_1 = \sqrt{2} [2\nu - \lambda^{-2} z_{\rho\rho}(s)]; \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} \kappa_1 z_\rho(s) > 0, \quad s \in \Gamma$$

Функции F_i, w_i получаются прямым разложением решения по степеням ε в результате первого итерационного процесса. Их невязку в выполнении граничных условий на Γ компенсируют функции пограничного слоя h_i, g_i , которые определяются во втором итерационном процессе [13—15]. Сглаживающая функция $\psi(\eta)$ равна единице при $\eta = \rho\delta^{-1} \leq 1/3$ и нулю при $\eta \geq 2/3$, где δ — ширина полосы, в которой внутренние нормали к Γ не пересекаются. Для того чтобы вектор-функция V_ε удовлетворяла точно всем граничным условиям на Γ , добавлены слагаемые порядка ε^n и ε^{n+1} с произвольными достаточно гладкими функциями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, удовлетворяющими краевым условиям

$$[\gamma_1 = \gamma_2 + g_n = \gamma_3 + h_n = \gamma_{3,\rho}]_\Gamma = 0$$

$$\Gamma_1 (\gamma_1 + w_n) = \nu \kappa_1 g_{n,t} |_{t=0}; \quad \Gamma_1 \gamma_2 = 0$$

Будем рассматривать задачу (3.1), (3.2) как операторное уравнение $P(V) = 0$. Здесь $V = (F, w)$ и оператор $P: X \rightarrow Y$, где пространство Y состоит из вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ с конечной нормой

$$\|f\|_Y^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 = \int_D (f_1^2 + f_2^2) dx dy$$

и пространство X — замыкание множества удовлетворяющих (3.2) гладких вектор-функций $V = (F, w)$ с конечной нормой

$$\|V\|_X^2 = \|F\|_{W_2^{(4)}}^2 + \|w\|_{W_2^{(4)}}^2$$

Теорема 1. Пусть $z(s)$ для любых $s \in \Gamma$ удовлетворяет условию

$$(3.5) \quad -[z_{\rho\rho}(\kappa_1 z_\rho)^{-1}]_\Gamma < \frac{1}{2} (1 - \eta_0) (1 + e^{-\pi})^{-1} - \nu$$

где η_0 — сколь угодно малое положительное число. Тогда при $\varepsilon \ll 1$ задача (3.1)—(3.3) имеет решение V_* с асимптотикой V_ε , причем

$$(3.6) \quad \max_{D+\Gamma} |F_* - F_\varepsilon| + \max_{D+\Gamma} |w_* - w_\varepsilon| \leq m_1 \varepsilon^{n+1}, \quad n = 2; 3; \dots$$

$$\max_{D+\Gamma} |D^{(k)}(F_* - F_\varepsilon)| + \max_{D+\Gamma} |D^{(k)}(w_* - w_\varepsilon)| \leq m_1 \varepsilon^{n+2-k}$$

Решение V_* реализует локальный минимум потенциальной энергии оболочки.

(Здесь и всюду в дальнейшем m_i, c_i — положительные постоянные, не зависящие от ε . Символ $D^{(k)}$ обозначает любую частную производную порядка $k = 1, 2$.)

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} P'_{V_\varepsilon}(V) = f, \quad V = (F, w) \in X, \quad f = (f_1, f_2) \in Y, \quad P'_{V_\varepsilon}(V) \equiv \\ \equiv (\varepsilon^2 \Delta^2 F + [z, w] + \varepsilon^2 [s_2 + w^0, w], \quad \varepsilon^2 \Delta^2 w - [z, F] - \\ - \varepsilon^2 [s_2 + w^0, F] - \varepsilon^2 [s_1 + F^0, w]) \end{aligned}$$

с краевыми условиями (3.2) Здесь P'_{V_ε} — производная Фреше оператора P на элементе V_ε .

Умножим первое уравнение системы на $F + \varepsilon^\alpha w$, а второе — на $w - \varepsilon^\alpha F$. Интегрируя по области D и складывая, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\Delta F\|^2 + \varepsilon^2 \|w\|_2^2 + \varepsilon^2 \nu \int_{\Gamma} \kappa_1 w_\rho^2 ds - \varepsilon^{2+\alpha} \int_{\Gamma} \Delta F w_\rho ds - \varepsilon^2 (s_1 + F^0, w, w) + \\ + \varepsilon^\alpha (z, w, w) + \varepsilon^\alpha (z, F, F) + \varepsilon^{2+\alpha} \{(s_2 + w^0, w, w) + (s_1 + F^0, w, F) + \\ + (s_2 + w^0, F, F)\} = \int_D \{f_1 (F + \varepsilon^\alpha w) + f_2 (w - \varepsilon^\alpha F)\} dx dy \\ (a, b, c) = \int_D [a, b] c dx dy = \int_D a [b, c] dx dy \\ \|w\|_2^2 = \int_D (w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xy}^2) dx dy; \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(D)} \end{aligned}$$

Применяя рассуждения леммы 4.3 в [13], приходим к следующему выводу. Если при $\varepsilon \ll 1$, $1 < \alpha < 2$ и некотором числе η_0 ($0 < \eta_0 < 1$) для любой функции $w \in W_2^{(4)}$ с краевыми условиями $w|_{\Gamma} = \Gamma_1 w = 0$ имеет место неравенство

$$(3.7) \quad (1 - \eta_0) \varepsilon^2 \left[\|w\|_2^2 + \nu \int_{\Gamma} \kappa_1 w_\rho^2 ds \right] - \\ - \varepsilon^2 \int_D (s_1 + F^0) [w, w] dx dy + \varepsilon^{\alpha\beta} \|\nabla w\|^2 \geq 0$$

то справедлива оценка

$$\| [P'_{V_\varepsilon}]^{-1} \|_{(Y \rightarrow X)} \leq c_2 \varepsilon^{-4}$$

В силу (3.4) имеем $s_1 + F^0 = h_1 + F_2 + 0$ (ε) и достаточно доказать выполнение (3.7) с заменой $(s_1 + F^0)$ на $(h_1 + F_2)$. Функция F_2 находится из краевой задачи [13]

$$(3.8) \quad [z, F_2] = 2\Delta^2 z, \quad F_2|_{\Gamma} = -h_1|_{\Gamma} = 2[\nu - z_{\rho\rho} (\kappa_1 z_\rho)^{-1}]_{\Gamma}$$

Представим F_2 в виде

$$\begin{aligned} F_2 = F_{20} + G, \quad [z, F_{20}] = 0, \quad F_{20}|_{\Gamma} = -h_1|_{\Gamma} \\ [z, G] = 2\Delta^2 z, \quad G|_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

Применяя (3.8) и интегрируя по частям, получаем

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |(h_1 + F_{20}, w, w)| &\leq \max_{D+\Gamma} |h_1 + F_{20}| \|w\|_2^2 \\ |(G, w, w)| &= \left| \int_D (G_{xx} w_y^2 + G_{yy} w_x^2 - 2G_{xy} w_x w_y) dx dy \right| \leq \\ &\leq c_4 \|\nabla w\|^2, \quad \max_{D+\Gamma} |h_1 + F_{20}| \leq \max_{D+\Gamma} |h_1| + \max_{D+\Gamma} |F_{20}| \leq \\ &\leq 2(1 + e^{-\pi}) [\nu - z_{\rho\rho} (\kappa_1 z_\rho)^{-1}]_{\Gamma} \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из принципа максимума для однородных эллиптических уравнений и формул (3.4), (3.8). Теперь (3.7) следует из (3.5), (3.9). Существование решения V_* с асимптотикой V_ε и оценкой (3.6) для остаточного члена получается из теоремы 4.1 в [13] и оценок

$$\|P(V_\varepsilon)\|_Y \leq c_1 \varepsilon^n, \quad \|P_V\|_{(X \rightarrow (X \rightarrow Y))} \leq c_3$$

(здесь устранены описки, допущенные в формулах (2.11), (4.9), (4.11), (4.14) из [13]).

Докажем устойчивость V_* . Решение краевой задачи (3.1), (3.2) является критической точкой функционала

$$(3.10) \quad I_\varepsilon(w) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_D \{(\Delta w)^2 - (1 - \nu)[w, w] + (\Delta F)^2\} dx dy$$

пропорционального потенциальной энергии оболочки при отсутствии нагрузки. Функция F однозначно определяется из решения первого уравнения в (3.2) при заданной $w \in W_2^{(2)}$ с краевыми условиями $w|_\Gamma = \Gamma_1 w = 0$.

Вычисляя вторую вариацию функционала на решении $V_* = (F_*, w_*)$, имеем [16]

$$(3.11) \quad \delta^2 I_\varepsilon(w_*) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\|\eta\|_2^2 + \nu \int_\Gamma \kappa_1 \eta_\rho^2 ds \right) + \varepsilon^2 \|\Delta \varphi\|^2 + (F_*, \eta, \eta)$$

Здесь η — допустимая вариация w , а φ — допустимая вариация F и определяется из краевой задачи

$$(3.12) \quad \varepsilon^2 \Delta^2 \varphi + [w_* - z, \eta] = 0, \quad \varphi|_\Gamma = \varphi_\rho|_\Gamma = 0$$

Умножая (3.12) на $\varepsilon^\alpha \eta$ и интегрируя по области D , с учетом (3.4) получим

$$(3.13) \quad \varepsilon^{2+\alpha} \left\{ \int_D \Delta \varphi \Delta \eta dx dy + \int_\Gamma \Delta \varphi \eta_\rho ds + (s_2 + w^\circ, \eta, \eta) \right\} - \\ - \varepsilon^\alpha \int_D (z_{xx} \eta_y^2 + z_{yy} \eta_x^2 - 2z_{xy} \eta_x \eta_y) dx dy = \varepsilon^\alpha (w_\varepsilon - w_*, \eta, \eta)$$

При помощи неравенства

$$\varepsilon^{2+\alpha} \int_D \Delta \varphi \Delta \eta dx dy \leq \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\|\eta\|_2^2 + \|\Delta \varphi\|^2)$$

для $1 < \alpha < 2$ из (3.11), (3.13) выводим

$$(3.14) \quad \delta^2 I_\varepsilon(w_*) \geq \frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \eta_0 \right) \left(\|\eta\|_2^2 + \nu \int_\Gamma \kappa_1 \eta_\rho^2 ds + \|\Delta \varphi\|^2 \right) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} (s_1 + F^\circ, \eta, \eta) + \frac{1}{2} (F_* - F_\varepsilon, \eta, \eta) + \\ + \frac{2}{3} \eta_0 \varepsilon^{2+\alpha} \left\{ \int_\Gamma \Delta \varphi \eta_\rho ds + (s_2 + w^\circ, \eta, \eta) \right\} + \\ + \frac{2}{3} \eta_0 \varepsilon^\alpha \left\{ (w_* - w_\varepsilon, \eta, \eta) - \int_D (z_{xx} \eta_y^2 + z_{yy} \eta_x^2 - 2z_{xy} \eta_x \eta_y) dx dy \right\}$$

Применяя рассуждения, проведенные при выводе формулы (4.18) в [13], и учитывая оценки (3.6), имеем

$$(3.15) \quad \Delta^2 \varphi = f_0, \quad \varphi|_\Gamma = \varphi_\rho|_\Gamma = 0 \\ f_0 = -\varepsilon^{-2} \{ [z, \eta] + \varepsilon^2 [s_2 + w^\circ, \eta] + [w_* - w_\varepsilon, \eta] \} \\ \|f_0\| \leq m_2 \varepsilon^{-2} \|\eta\|_2, \quad \int_D |[\eta, \eta] | dx dy \leq \|\eta\|_2^2 \\ \max_{D+\Gamma} | \varepsilon \Delta \varphi | \leq m_3 (\|\Delta \varphi\| + \|\eta\|_2) \\ \left| \int_\Gamma \varepsilon \Delta \varphi \eta_\rho ds \right| \leq c_5 \left(\|\eta\|_2^2 + \|\Delta \varphi\|^2 + \nu \int_\Gamma \kappa_1 \eta_\rho^2 ds \right)$$

Теперь, применяя формулы (3.3)–(3.9), (3.15) и полагая ε настолько малым чтобы при $1 < \alpha < 2$ выполнялись неравенства $\varepsilon^2 c_4 \leq \eta_0 \beta \varepsilon^\alpha / 3$, $\varepsilon^{\alpha-1} c_5 \leq 1/6$, $\varepsilon^\alpha m_5 \leq 1/6$, $m_5 = \max_{D+\Gamma} |s_2 + w^\circ|$, из (3.14) получаем

$$\delta^2 I_\varepsilon(w_*) \geq \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - \eta_0) \left(\|\eta\|_2^2 + \nu \int_\Gamma \kappa_1 \eta_\rho^2 ds + \|\Delta \varphi\|^2 \right) + \\ + \frac{1}{3} \eta_0 \varepsilon^{\alpha \beta} \|\nabla \eta\|^2 > 0$$

Таким образом, вторая вариация потенциальной энергии — положительно-определенная форма и в силу [16] решение V_* с асимптотикой V_ε соответствует устойчивому равновесию.

Теорема 2. Для достаточно малых ε задача (3.1)—(3.3), (3.5) наряду с устойчивым нулевым равновесием и устойчивым равновесием V_* , близким к симметрично отраженному, имеет, по крайней мере, одно неустойчивое равновесие, соответствующее седловой точке потенциальной энергии оболочки.

Доказательство. Функционал I_ε в (3.10) удовлетворяет условиям п. 1 в [6]. Устойчивость нулевого равновесия для всех $\varepsilon > 0$ легко получается из (3.11) при $w_* = F_* = 0$ в силу [16]. Теперь сформулированное утверждение вытекает из теорем 2.1, 2.2 в [6].

Представляется интересной задача обоснования асимптотики без ограничительного условия (3.5) на уравнение поверхности z . Это условие, по-видимому, не связано с существом дела и, разумеется, асимптотические разложения (3.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ могут применяться для расчета указанного нетривиального равновесия V_* произвольной по пологой строго выпуклой оболочки с подвижной шарнирной опорой.

Для ненагруженной оболочки с неподвижной шарнирной опорой система уравнений равновесия записывается в виде (3.1) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} [w = w_{\rho\rho} - \nu\kappa_1 w_\rho = F_{\rho\rho} + \nu\kappa_1 F_\rho - \nu F_{ss}]_\Gamma = 0 \\ \varepsilon^2 [F_{\rho\rho\rho} + 3\kappa_1 F_{ss} + (2 + \nu) F_{\rho ss} + (2 + \nu) \kappa_{1,s} F_s - \\ - \kappa_1^2 (1 - \nu) F_\rho]_\Gamma - \kappa_1 \left[w_\rho \left(\frac{1}{2} w_\rho - z_\rho \right) \right]_\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Здесь для равновесия близкого к симметрично отраженному равновесию $V_* = (F_*, w_*)$ строго выпуклой оболочки, строятся асимптотические представления при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} F_* \sim \varepsilon^2 A_1 \Lambda^{-2} e^{-\Lambda t} \cos \Lambda t, \quad w_* \sim 2z(x, y) + \varepsilon^2 A_1 \lambda^{-2} e^{-\lambda t} \sin \lambda t, \\ \lambda^2 = \frac{1}{2} \kappa_1 z_\rho(s) > 0, \quad s \in \Gamma \\ A_1 = [z_{\rho\rho} - \nu\kappa_1 z_\rho]_\Gamma, \quad \kappa_1 = \kappa_1(s) > 0, \quad t = \rho\varepsilon^{-1} \end{aligned}$$

Обоснование асимптотики в этом случае отсутствует, поскольку в лемме 1 работы [17] имеется ошибка.

В предположении осесимметричной деформации оболочек вращения уравнения (3.1) переходят в систему

$$\begin{aligned} (3.16) \quad \varepsilon^2 A v - \frac{1}{2} u^2 + \theta u = 0, \quad \varepsilon^2 A u + uv - \theta v = 0 \\ A(\cdot) = -r(\cdot)'' - (\cdot)' + r^{-1}(\cdot), \quad v = F', \quad w = u' \\ \varepsilon^2 = h/(a\gamma), \quad \theta = z' \leq -\beta r, \quad \beta > 0, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/dr \end{aligned}$$

Здесь a — радиус опорного контура оболочки.

Систему (3.16) будем рассматривать вместе с краевыми условиями

$$\begin{aligned} (3.17) \quad 1) \quad \left| \frac{v}{r}, \frac{u}{r} \right|_{r=0} < \infty, \quad v(1) = 0, \quad Mu = [u' + \nu u]_{r=1} = 0 \\ 2) \quad \left| \frac{v}{r}, \frac{u}{r} \right|_{r=0} < \infty, \quad Nv = [v' - \nu v]_{r=1} = 0, \quad Mu = 0 \end{aligned}$$

соответствующими подвижному и неподвижному шарнирному опиранию.

Асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ для равновесия $V_\varepsilon = (v_\varepsilon, u_\varepsilon)$, близкого к симметрично отраженному, строятся в виде [12, 13]

$$\begin{aligned} (3.18) \quad v_* \sim v_\varepsilon = \varepsilon (s_3 + \varepsilon v^\circ), \quad u_* \sim u_\varepsilon = \varepsilon (s_4 + \varepsilon u^\circ) + 2\theta \\ s_3 = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^{i-1} [h_i(t) + \alpha_i], \quad s_4 = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^{i-1} [g_i(t) + \beta_i] \\ v^\circ = \sum_{i=2}^n \varepsilon^{i-2} v_i(r) + \varepsilon^{n-1} \gamma_1(r) \\ u^\circ = \sum_{i=2}^n \varepsilon^{i-2} u_i(r) + \varepsilon^{n-1} \gamma_2(r), \quad V_\varepsilon = (v_\varepsilon, u_\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1) \quad & h_1 = 2K \sin bt, \quad g_1 = -2K \cos bt, \quad t = (1-r)/\varepsilon \\
2) \quad & h_1 = \sqrt{2}K \sin(bt + \pi/4), \quad g_1 = \sqrt{2}K \sin(bt - \pi/4) \\
& K = [d\theta/dr + \nu\theta]_{r=1} b^{-1} e^{-bt}, \quad b = \sqrt{-1/2\theta} \quad (1)
\end{aligned}$$

Функции v_i, u_i, h_i, g_i находятся в результате первого и второго итерационного процессов [12—15], а функции α_i, β_i компенсируют невязку экспоненциального порядка малости по ε у h_i, g_i в нуле. Для того чтобы вектор-функция V_ε удовлетворяла точно всем граничным условиям, добавлены слагаемые порядка ε^{n+1} с произвольными достаточно гладкими функциями γ_1, γ_2 , удовлетворяющими краевым условиям

$$\begin{aligned}
& \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0, \quad M\gamma_1 = -\nu g_{n+1} |_{t=0} \\
& 1) \quad \gamma_2 |_{r=1} = -h_{n+1} |_{t=0}, \quad 2) \quad N\gamma_2 = \nu h_{n+1} |_{t=0}
\end{aligned}$$

Теорема 3. Краевые задачи (3.16), (3.17) при достаточно малых ε наряду с устойчивым нулевым равновесием и устойчивым равновесием, близким к симметрично отраженному, имеют, по крайней мере, одно неустойчивое равновесие, отвечающее седловой точке потенциальной энергии.

Существование нетривиального решения V_s с асимптотикой V_ε и оценка $\max |v_* - v_\varepsilon| + \max |u_* - u_\varepsilon| \leq m_2 \varepsilon \delta^{n+1}$, где максимум берется при $0 \leq r \leq 1$, были доказаны в [12, 13].

Докажем устойчивость решения V_s . Введем гильбертово пространство H_1 — замыкание множества дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям для u в (3.17), с конечной нормой, порождаемой скалярным произведением

$$(u_1, u_2)_{H_1} = \int_0^1 \left[r u_1' u_2' + \frac{u_1 u_2}{r} + \nu (u_1 u_2)' \right] dr$$

Решение V_s является критической точкой функционала

$$(3.19) \quad I_s(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \|u\|_{H_1}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 \left[r v'^2 + \frac{v^2}{r} - 2\nu v v' \right] dr$$

пропорционального потенциальной энергии оболочки вращения при отсутствии нагрузки. Здесь функции v при заданной $u \in H_1$ однозначно определяется из решения первого уравнения (3.16) с соответствующими краевыми условиями для v в (3.17).

Для второй вариации функционала на V_s имеем

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad \delta^2 I_s(u_*) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \|\eta\|_{H_1}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\varphi\|_1^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \varphi^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 v_* \eta^2 dr, \\
\|\varphi\|_1^2 &= \int_0^1 \left[r \varphi'^2 + \frac{1}{r} \varphi^2 \right] dr
\end{aligned}$$

Здесь η — допустимая вариация функции u , а φ определяется из краевой задачи

$$\begin{aligned}
(3.21) \quad \varepsilon^2 A\varphi + (\theta - u_*)\eta &= 0, \quad |\varphi r^{-1}|_{r=0} < \infty \\
1) \quad \varphi(1) &= 0, \quad 2) \quad [\varphi' - \nu\varphi]_{r=1} = 0
\end{aligned}$$

Умножая (3.21) на $\varepsilon^\alpha \eta$, интегрируя от 0 до 1 и применяя (3.18), в случае 2) в (3.17) имеем

$$\begin{aligned}
(3.22) \quad \varepsilon^{2+\alpha} \int_0^1 \left(r \varphi' \eta' + \frac{1}{r} \varphi \eta \right) dr &- \nu \varepsilon^{2+\alpha} \eta(1) \varphi(1) - \varepsilon^\alpha \int_0^1 \theta \eta^2 dr - \\
- \varepsilon^{1+\alpha} \int_0^1 (s_4 + \varepsilon u^0) \eta^2 dr &= \varepsilon^\alpha \int_0^1 (u_* - u_\varepsilon) \eta^2 dr
\end{aligned}$$

Используя очевидные неравенства

$$-\theta - \varepsilon (s_4 + \varepsilon u^\circ) \geq 1/2 \beta r \geq 0, \quad 1/2 \varepsilon^2 > \varepsilon^{2+\alpha}$$

$$\int_0^1 \left(r \varphi' \eta' + \frac{1}{r} \varphi \eta \right) dr \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|_1^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_1^2$$

а также формулы (3.17), (3.22), из (3.20) получаем

$$(3.23) \quad \delta^2 I_s(u_*) \geq \frac{3}{8} \varepsilon^2 (\|\eta\|_1^2 + \|\varphi\|_1^2) - \frac{1}{4} v \varepsilon^{2+\alpha} \eta(1) \varphi(1) + \\ + \frac{v}{2} \varepsilon^2 [\eta^2(1) - \varphi^2(1)] + \frac{1}{8} \beta \varepsilon^\alpha \int_0^1 r \eta^2 dr + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 (s_3 + \varepsilon v^\circ) \eta^2 dr + \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 (v_* - v_\varepsilon) \eta^2 dr - \frac{1}{4} \varepsilon^\alpha \int_0^1 (u_* - u_\varepsilon) \eta^2 dr$$

Полагая $0 < \alpha < 1$ и применяя неравенства

$$\beta > 0, \quad \varepsilon^n \ll \varepsilon^{\alpha+1}, \quad v \varphi^2(1) \leq 1/2 \|\varphi\|_1^2, \quad 1/4 \beta \varepsilon^\alpha r - \varepsilon (s_3 + \varepsilon v^\circ) \geq 1/8 \beta \varepsilon^\alpha r$$

и оценку для $V_s - V_\varepsilon$, из (3.23) выводим положительную определенность второй вариации

$$\delta^2 I_s(u_*) \geq \kappa/16$$

$$\kappa = \varepsilon^2 (\|\eta\|_1^2 + \|\varphi\|_1^2) + \beta \varepsilon^\alpha \int_0^1 r \eta^2 dr > 0$$

Теперь устойчивость V_s в классе осесимметричных функций для задачи (3.16) и 2) в (3.17) вытекает из [16].

В случае краевых условий 1) в (3.17) получаем выражение (3.22), но с заменой $v \varepsilon^{2+\alpha} \eta(1) \varphi(1)$ на $\varepsilon^{2+\alpha} \eta(1) \varphi'(1)$. Для оценки этого слагаемого умножим (3.21) на $r \varphi'(r)$, проинтегрируем от 0 до 1 с учетом условия $\varphi(1) = 0$ и применим неравенство Коши — Буняковского. В результате получим

$$(3.24) \quad \varepsilon^2 |\varphi'(1)|^2 \leq 2 \left| \int_0^1 [\theta + \varepsilon (s_4 + \varepsilon u^\circ)] \eta \varphi' r dr \right| + 2 \left| \int_0^1 (u_\varepsilon - u_*) \eta \varphi' r dr \right| \leq \\ \leq m_6^2 \|r^{1/2} \eta\| \|r^{1/2} \varphi'\| \\ \varepsilon^{2+\alpha} |\eta(1) \varphi'(1)| \leq 1/2 \varepsilon^{1+\alpha} [\eta^2(1) + \varepsilon^2 \varphi'^2(1)] \leq \\ \leq m_7 \varepsilon^{1+\alpha} K_1, \quad K_1 = \eta^2(1) + \|r^{1/2} \eta\|^2 + \|r^{1/2} \varphi'\|^2$$

Аналогично выводу (3.23) с применением неравенства (4.31) в [13] при $u = \eta$, формул (3.24) при $1 < \alpha < 2$, $0 < \delta < 2 - \alpha$ и оценки для $V_s - V_\varepsilon$ в случае достаточно малых ε из (3.20) при $\varphi(1) = 0$ получаем

$$\delta^2 I_s(u_*) \geq \frac{\kappa}{4} - \frac{1}{2} m_7 \varepsilon^{1+\alpha} K_1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \{ \varepsilon (s_3 + \varepsilon v^\circ) + \\ + (v_* - v_\varepsilon) - \varepsilon^\alpha (u_* - u_\varepsilon) \} \eta^2 dr \geq \kappa/8 > 0$$

Отсюда вытекает устойчивость V_s в классе осесимметричных функций для задачи (3.16) и 1) в (3.17).

Устойчивость нулевого равновесия для всех $\varepsilon > 0$ получается из (3.20) при $u_* = v_* = 0$. Существование седловой точки функционала I_s устанавливается при помощи теорем 2.1, 2.2 в [6] и доказанного ранее факта [6, 10], что I_s представим в виде (1.1), так как последний интеграл в (3.19) есть слабо непрерывный функционал в H_1 .

4. ДП сферических и конических оболочек. Задача о ДП пологой сферической и конической оболочек под действием равномерно распределенного импульса внешнего давления записывается в безразмерных переменных в виде

$$(4.1) \quad w_{\tau\tau} + I_0'(w) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w_\tau(0) = 4\alpha$$

$$\begin{aligned}
I_0(w, p) &= \frac{1}{2} \|U\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \left(x\Phi_x^2 + \frac{1}{x} \Phi^2 - 2\nu\Phi\Phi_x \right) dx + \\
&+ \int_0^\Lambda 2px^2U dx, \quad U = w_x, \quad I_0(w) = I_0(w, p)|_{p=0} \\
\|w\|_{H_A}^2 &= \|U\|^2 = \int_0^\Lambda \left[xU_x^2 + \frac{1}{x}U^2 + 2\nuUU_x \right] dx \\
w|_{x=\Lambda} &= [U_x + \nu U/x]_{x=\Lambda} = 0, \quad \nu = 1/3 \\
(4.2) \quad 1) \quad \Phi &= x \int_x^\Lambda y^{-3} dy \int_0^y \eta \left(\frac{1}{2}U^2 - \theta U \right) d\eta \\
2) \quad \Phi &= x^{-1}T(x) + \Lambda^{-2} (1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}T(\Lambda)x \\
T(x) &= \int_0^x y dy \int_0^\Lambda \eta^{-1} \left(\frac{1}{2}U^2 - \theta U \right) d\eta
\end{aligned}$$

Здесь H — гильбертово пространство функций на $[0, \Lambda]$, квадратично суммируемых с весом x , H_A — энергетическое пространство оператора $A = \nabla^4$. Безразмерные и размерные величины связаны формулами

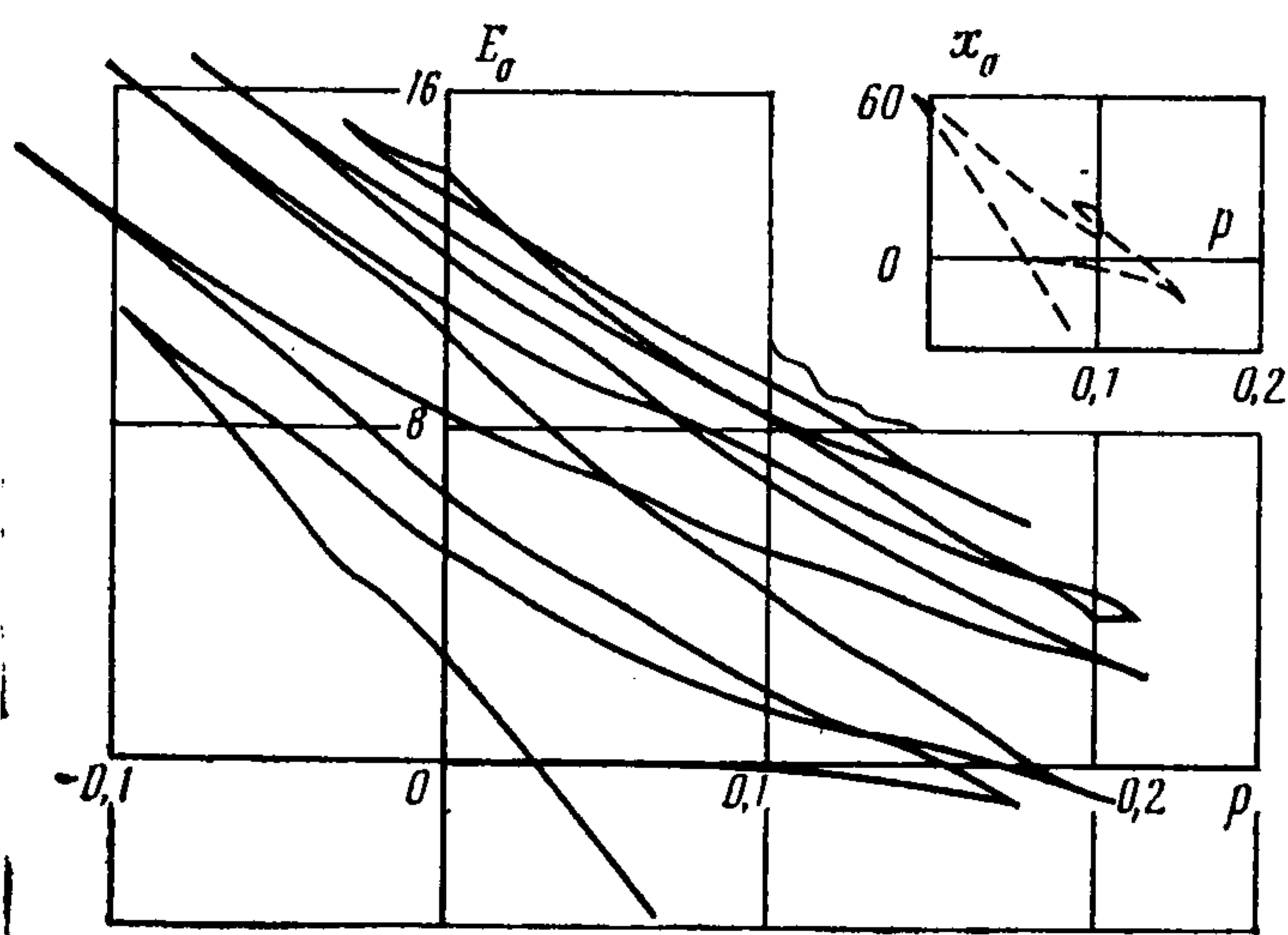
$$\begin{aligned}
\Lambda^2 &= 4 [3(1 - \nu^2)]^{1/2} h_0 h^{-1}, \quad 2wh_0 = \Lambda^2 W \\
a^2 \tau &= 2h_0 (E/m)^{1/2} t, \quad W|_{t=0} = 0, \quad W_t|_{t=0} = b \\
3(1 - \nu^2)\Lambda^2 a^2 I &= 2\pi h_0^2 h^3 E I_0, \quad ax = r\Lambda \\
16\alpha &= b (\Lambda a/h_0)^2 (m/E)^{1/2}, \quad q_0 p = X^* \\
q_0 &= 32Eh_0^3 h \Lambda^{-2} a^{-4}, \quad b = \text{const}
\end{aligned}$$

Здесь $W(r, t)$ — прогиб в момент времени t в точке с полярной координатой r , a — радиус опорного контура, h — толщина, m — масса единицы объема оболочки, E — модуль Юнга, I — потенциальная энергия оболочки при равномерном внешнем давлении X^* . Для сферической оболочки $\theta = -x$ и h_0 — высота подъема, для конической оболочки $\theta_* = -\Lambda$ и h_0 — половина высоты подъема в вершине. Функция напряжений Φ в случае подвижной и неподвижной шарнирной опоры записывается соответственно в виде 1) и 2) в (4.2).

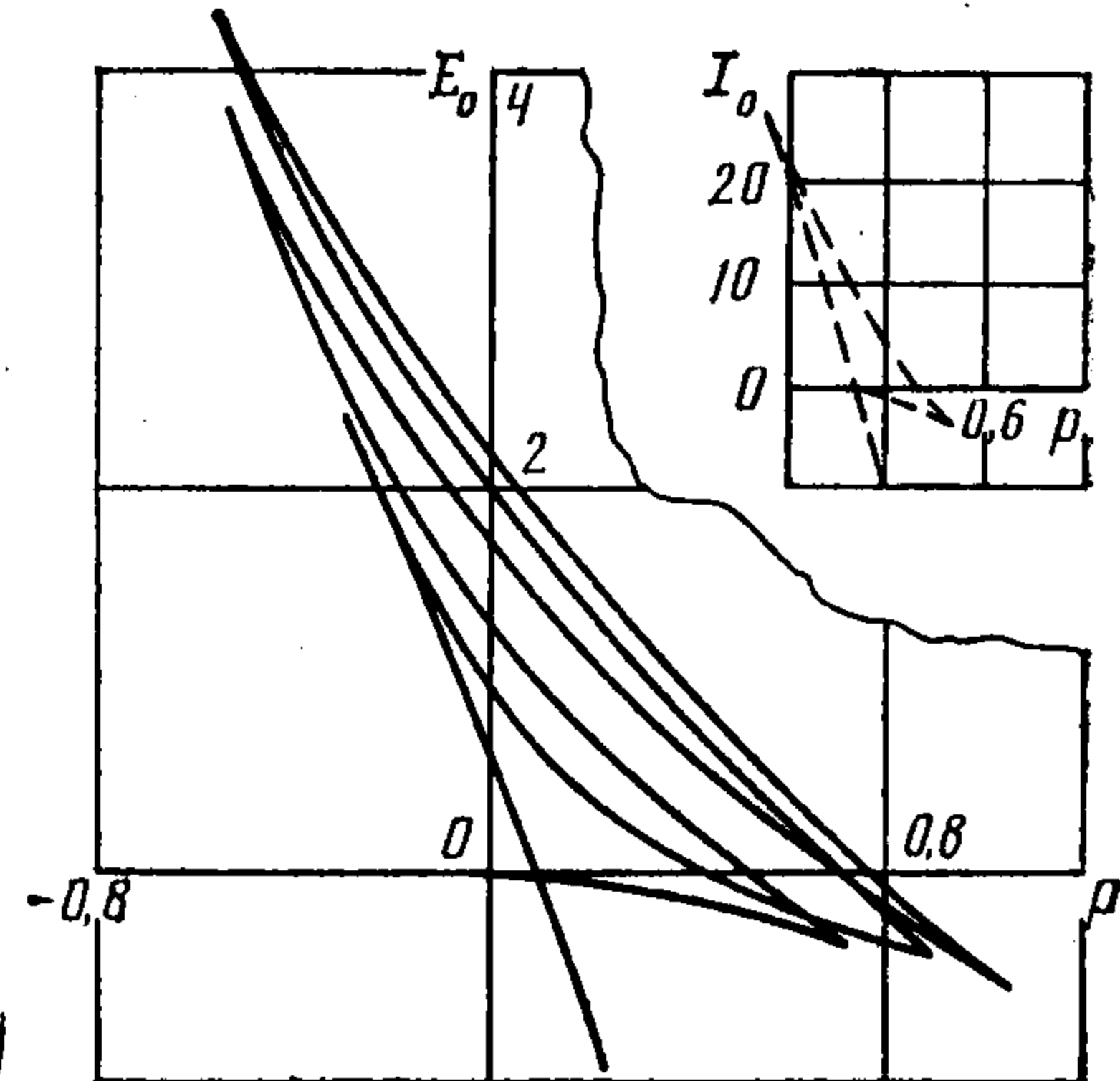
Из численных расчетов стационарной задачи с применением методов пристрелки и матричной прогонки [17] при глухой заделке и свободном защемлении края для $\Lambda \leq 20$ следует, что имеет место жесткость сферической оболочки [19]. При подвижной шарнирной опоре и неподвижной шарнирной опоре края для $\Lambda \geq 5,535$ и $\Lambda \geq 3,25$ соответственно сферическая оболочка в отсутствие нагрузки имеет, по крайней мере, одно ненулевое седловое равновесие.

На фиг. 1—5 представлены графики потенциальной энергии сферической и конической оболочек при равномерном внешнем давлении, причем $E_0 = 10^{-2} I_0(w^*, p)$, где $I_0'(w^*, p) = 0$.

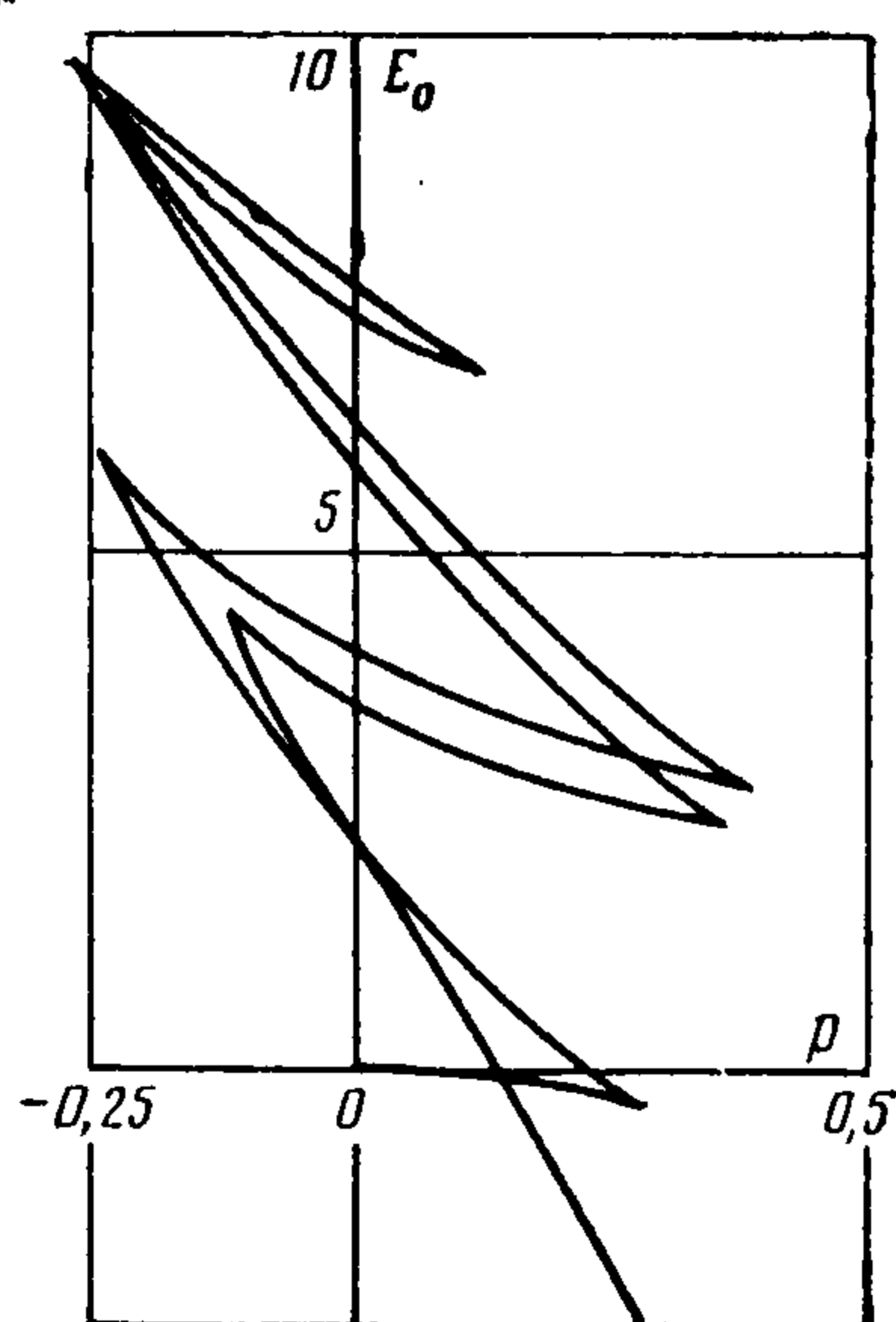
Графики на фиг. 1 относятся к сферической оболочке с подвижно-шарнирной опорой: в правом верхнем углу штриховой линией для $\Lambda = 5,75$ и в центре сплошной линией для $\Lambda = 10$. В отсутствие нагрузки ($p = 0$) для $\Lambda = 5,75$ имеются два, а для $\Lambda = 10$ десять нетривиальных решений. Отметим, что часть графика для $\Lambda = 10$ представлена ранее в [18]. В случае сферической оболочки с неподвижно шарнирной опорой из аналогичных графиков на фиг. 2, нанесенных штриховой линией для



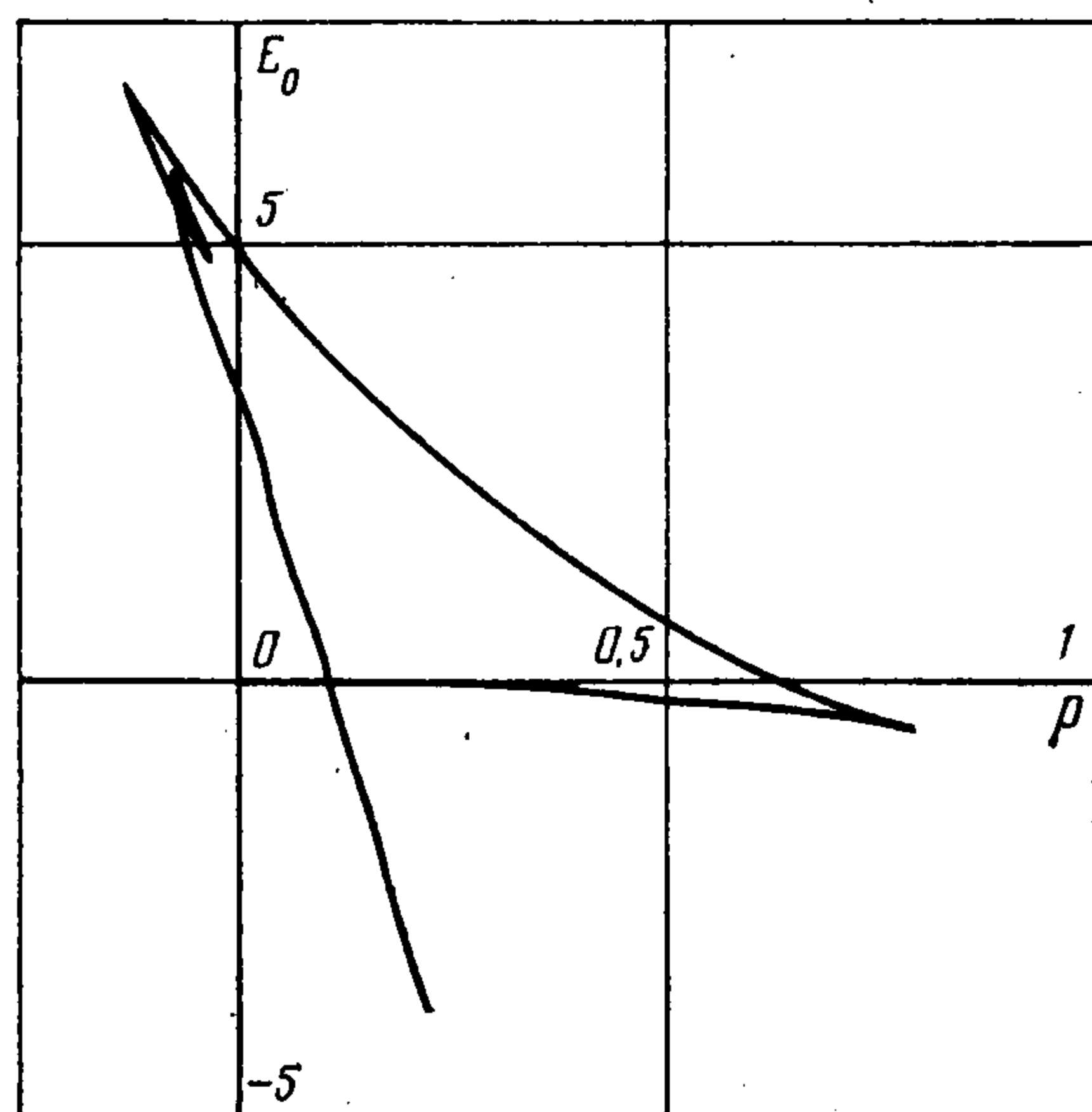
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$\Lambda = 3,25$ и сплошной линией для $\Lambda = 5$, получаем при $\rho = 0$ наряду с нулевым решением соответственно два и шесть нетривиальных решений.

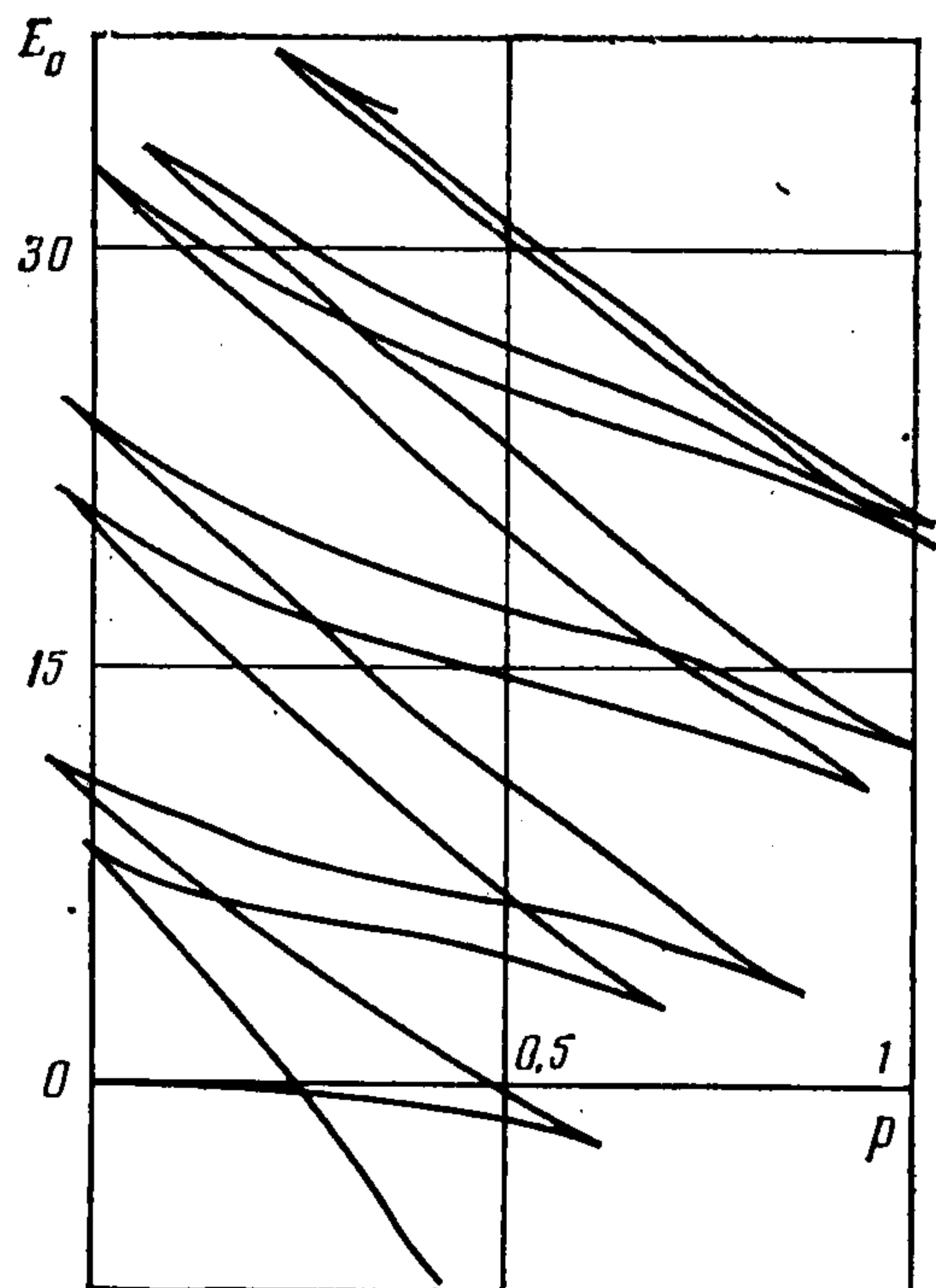
Для пологой конической оболочки численные расчеты показывают, что нежесткость имеет место для $\Lambda \geq \Lambda_1^* = 5,25$; $\Lambda \geq \Lambda_2^* = 2,75$, $\Lambda \geq \Lambda_3^* = 6$ соответственно при подвижной шарнирной опоре, неподвижной шарнирной опоре и свободном защемлении края. При глухой заделке края нетривиальных решений при $\rho = 0$ не обнаружено. Графики потенциальной энергии для конических оболочек представлены на фиг. 3 для случая подвижной шарнирной опоры с $\Lambda = 6$, на фиг. 4 для неподвижной шарнирной опоры с $\Lambda = 7$ и на фиг. 5 для свободного защемления края с $\Lambda = 8$.

Перейдем к вычислению астатического критического импульса α_a . В случае (4.1) для его определения из (2.2) получаем систему

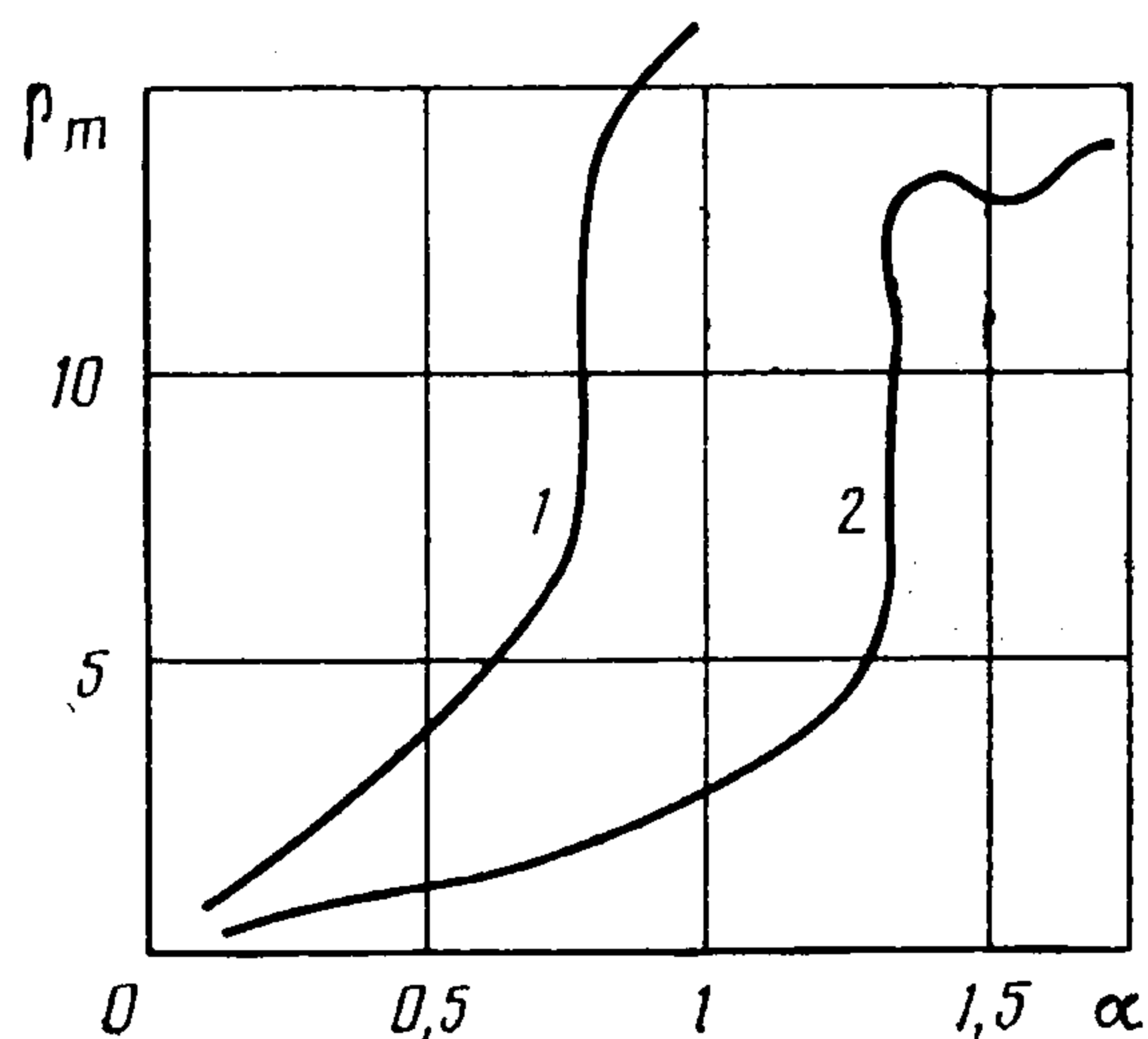
$$(4.3) \quad I_0(w_a) = 4\alpha^2 \Lambda^2, \quad I_0'(w_a) = 0, \quad I(0) = 0$$

где w_a — неустойчивое равновесие. Пусть B_α — множество решений системы (4.3), расположенных в виде неубывающей последовательности чисел α_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, что $\alpha_a \in B_\alpha$ и $\alpha_1 \leq \alpha_a$. Если множество B_α состоит из одной точки, то $\alpha_a = \alpha_1$. Если $i > 1$, то возникает трудность в выделении тех седел, которые принадлежат границе ямы $\partial J(0)$. Гарантию того, что седло принадлежит $\partial J(0)$, дает только решение нестационарной задачи (4.1), (4.2).

Ниже представлены по два наименьших значения из множества B_α для сферической оболочки соответственно с подвижной и неподвижной



Фиг. 5



Фиг. 6

шарнирной опорой края

Λ	5,535	5,75	6,75	8	9	10
$100\alpha_1$	61,8	63,8	74,5	88,3	99	109
$100\alpha_2$	—	—	88,4	105	116	126
$100\alpha_d$	73	76	95	111	122	132
Λ	3,25	3,94	5	6	7	8
$1000\alpha_1$	69,3	83	99,3	114	127	139
$100\alpha_2$	—	96,7	116	131	143	155
$100\alpha_d$	77,3	—	132	150	169	182

Даны значения Λ , для которых B_α состоит из одного элемента $\alpha_a = \alpha_1$. В остальных случаях получаем, что $\alpha_a = \alpha_2$, причем α_2 находится на ветви неустойчивых решений, имеющей с ветвью устойчивых докритических равновесий общую точку при p , равном верхней критической нагрузке p_u .

Критический импульс ДП α_d вычислялся прямым численным интегрированием задач (4.1), (4.2) для различных α с применением неявной схемы метода конечных разностей и критерия Будянского — Рота.

Формулировка этого критерия для данного случая сводится к следующему. Пусть

$$\rho(\tau) = \frac{2}{\Lambda^2} \int_0^\Lambda w(x, \tau) x dx, \quad \rho_m = \max_{0 \leq \tau \leq T} |\rho(\tau)|$$

Каждому значению α соответствует своя кривая $\rho(\tau)$ и точка $\rho_m(\alpha)$. Критический импульс α_d осесимметричного ДП оболочки определяется как наименьшее значение α , при котором кривая $\rho_m(\alpha)$ имеет скачкообразное изменение. Такая методика применялась ранее [19] с целью показать, что для сферических оболочек с глухой заделкой края под действием ИН нет ДП. В проведенных расчетах принималось $T = 500$.

На фиг. 6 даны графики $\rho_m(\alpha)$ для подвижной шарнирной опоры с $\Lambda = 5,75$ (кривая 1) и неподвижной шарнирной опоры с $\Lambda = 5$ (кривая 2). Соответствующие значения α_d представлены выше.

Приведем примеры вычисленных по формулам (4.3) значений для конической оболочки при указанных выше краевых условиях и значениях Λ_i^* : $\alpha_a(\Lambda_1^*) = 1,197$; $\alpha_a(\Lambda_2^*) = 0,987$; $\alpha_a(\Lambda_3^*) = 1,69$.

5. Предварительно нагруженные оболочки. Пусть $I = I(\omega, p)$ зависит от параметра нагрузки p и $\omega_s(p)$ — семейство устойчивых равновесий системы (1.1), $p \in [0, p_u)$, где p_u — верхняя критическая нагрузка статической потери устойчивости. Сначала система подвергается квази-

статическому нагружению и в результате находится в равновесии $\omega_0 = \omega_s(p_0)$, отвечающем значению p_0 . Затем к системе прикладывается дополнительная ИН, которая снимается до того, как система начинает двигаться, и следовательно, сообщает ей скорость v_0 . В этом случае астатическая критическая ИН α_a равновесия ω_0 определяется как наименьшее решение уравнения

$$(5.1) \quad I(\omega_a, p_0) = \frac{1}{2} \|v_0(\alpha)\|_{H^2}^2 + I(\omega_0, p_0), \quad I'(\omega_a, p_0) = 0$$

где ω_a — неустойчивое равновесие на границе ямы $\partial J(\omega_0)$.

Очевидно, что ДП системы под действием ИН возможно, если $p_0 \geq p_l$, где p_l — нижняя критическая нагрузка статической потери устойчивости.

Для примера рассмотрим сферическую оболочку с глухой заделкой края при $\Lambda = 5$, которая находится в равновесии под действием гидростатической нагрузки, соответствующей $p_0 = 0,30$. В момент времени $t = 0$ к поверхности оболочки прикладывается равномерно распределенная внешняя ИН, которая сообщает оболочке скорость $W_t|_{t=0} = b$. В результате вычислений по формулам (4.1) получаем $I_0(\omega_0, p_0) = -2,42$; $I_0(\omega_a, p_0) = 10,59$. Отсюда при помощи (5.1) находим $\alpha_a = 0,36$.

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoff N. J., Bruce V. G. Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches // J. Math. and Phys. 1953. V. 32. No 4. P. 276—288.
2. Hsu C. S. On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions // Intern. J. Eng. Sci. 1966. V. 4. No 1. P. 1—21.
3. Срубщик Л. С. О критическом давлении динамического прощелкивания упругих сферических и конических оболочек. Ростов н/Д, 1983. 15с.— Деп. в ВИНТИ 24.03.83, № 1506-83.
4. Срубщик Л. С. Энергетический критерий динамического прощелкивания упругих сферических оболочек // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1985. Т. 280. № 1. С. 60—64.
5. Срубщик Л. С. Нелинейный анализ осесимметричного динамического прощелкивания упругих сферических оболочек // Тр. 1-го Всесоюз. симпоз. «Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика». Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1985. С. 409—412.
6. Срубщик Л. С., Юдович В. И. О динамическом прощелкивании нелинейной упругой системы // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 426—435.
7. Мышкис А. Д. Ямы в топологических пространствах // Мат. заметки. 1983. Т. 33. Вып. 2. С. 261—271.
8. Шу С. С. Параметрическое возбуждение и задачи прощелкивания для оболочек // Тонкостенные оболочные конструкции. М.: Машиностроение. 1980. С. 125—155.
9. Simitses G. J. Suddenly-loaded structural configurations // J. Eng. Mech. 1984. V. 110. No 9. P. 1320—1334.
10. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. № 6. С. 747—784.
11. Ворович И. И. Неединственность и устойчивость в нелинейной механике сплошной среды: Некоторые математические проблемы // Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ. 1977. С. 10—47.
12. Срубщик Л. С. Нежесткость сферической оболочки // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 723—729.
13. Срубщик Л. С. К вопросу о нежесткости в нелинейной теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36. № 4. С. 890—909.
14. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. (УМН). 1957. Т. 12. № 5. С. 3—122.
15. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука. 1973. 272 с.
16. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Замечание об устойчивости мембранных решений в нелинейной теории пластин и оболочек // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 116—123.
17. Срубщик Л. С. Нежесткость тонких строго выпуклых оболочек при шарнирно неподвижной опоре края // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1982. Т. 262. № 1. С. 827—830.
18. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение. 1976. 278 с.
19. Huang N. C. Axisymmetric dynamic snap-through of elastic clamped shallow spherical shells // AIAA Journal. 1969. V. 7. No 2. P. 215—220.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
6.VII.1987