Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 62-50

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОГО СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М.

В развитие результатов работ [1—3] для решения задачи синтеза ограниченных управлений дается конструктивный метод построения функции управляемости и, с ее помощью,— синтезирующего управления для некоторого класса нестационарных систем.

1. Рассмотрим применение метода функций Ляпунова для решения задачи синтеза ограниченных управлений: для управляемой системы

$$x^{\cdot} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^r \tag{1.1}$$

требуется построить управление $u = u(t, x)$, удовлетворяющее заданному ограничению $u \in \Omega$, такое, чтобы траектория $x(t)$ системы (1.1), начинающаяся в произвольной точке x_0 в начальный момент времени t_0, попадала в конечный момент времени $t_0 + T$ ($T = T(t_0, x_0)$) в наперед заданную точку x_1. При этом синтез будем называть устойчивым, если x_1 — точка покоя (т. е. $f(t, x_1, u_1) = 0$ при некотором $u_1 \in \Omega$ и для любого $t \in [t_0, t_0 + T)$) и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\| x(t) - x_1 \| < \varepsilon$, если $\| x_0 - x_1 \| < \delta$ и $t \in [t_0, t_0 + T)$. В противном случае синтез назовем неустойчивым. Отметим, что в случае, когда x_1 не является точкой покоя, синтез, как правило, неустойчив.

Рассмотрим, например, систему $x_1^{\cdot} = x_2 + 1$, $x_2^{\cdot} = u$, $| u | \leqslant 1$. Требуется попасть в точку O ($x_1 = x_2 = 0$) из произвольной точки (x_1, x_2). Управление, решающее задачу синтеза, имеет вид: $u(x) = -1$, если $\varphi \geqslant 0$, $u(x) = 1$, если $\varphi < 0$, где $\varphi = x_1 + (x_2 + 1) \operatorname{sign}(x_2 + 1)/2$. В то же время любой допустимый синтез в этой задаче неустойчив. В самом деле, пусть $x_1(t_0) > 0$. Тогда для попадания в точку O необходимо, чтобы в некоторый момент времени t_1 было $x_1^{\cdot}(t_1) \leqslant 0$, т. е. $x_2(t_1) \leqslant -1$, откуда и следует неустойчивость любого возможного синтеза.

В данной работе ограничимся случаем устойчивого синтеза. В дальнейшем полагаем, не ограничивая общности, что $x_1 = 0$. Решение задачи синтеза управлений будем проводить при помощи функции управляемости $\Theta(t, x)$ [2], которая в задаче устойчивого синтеза играет роль, аналогичную функции Ляпунова в задаче устойчивости.

2. Решение задачи синтеза основано на следующей теореме.

Теорема 1. Рассмотрим управляемый процесс (1.1). Будем предполагать, что вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных и в области

$$\{(t, x, u)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1, 0 < \rho_1 \leqslant \| x \| \leqslant \rho_2, u \in \Omega\}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\| f(t, x'', u'') - f(t, x', u') \| \leqslant L_1(\rho_1, \rho_2)(\| x'' - x' \| + \| u'' - u' \|)$$

Пусть существует в замкнутой области

(2.1) $$G = J \times \{x\colon \|x\| \leqslant R\} \quad (J = [t_0, t_1])$$

где $0 < R \leqslant +\infty$, функция $\Theta(t, x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\Theta(t, x) > 0$ при $x \neq 0$, $t \in J$ и $\Theta(t, 0) = 0$ для любого $t \in J$;

2) $\Theta(t, x)$ непрерывна всюду и непрерывно дифференцируема всюду, за исключением, быть может, точек вида $(t, 0)$ при $t \in J$;

3) существует $c > 0$, такое, что множество $Q_c(t) = \{x\colon \Theta(t, x) \leqslant c\}$ ограничено и $Q_c(t) \subset \{x\colon \|x\| < R\}$ при всех $t \in J$;

4) существует функция $u(t, x) \in \Omega$ при $x \in Q_c(t)$, $t \in J$, такая, что справедливо неравенство

(2.2) $$\frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x)) \leqslant -\beta\Theta^{1-1/\alpha}(t, x)$$

при некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, причем $u(t, x)$ в области $\{(t, x)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ 0 < \rho_1 \leqslant \|x\| \leqslant \rho_2\}$ удовлетворяет условию Липшица $\|u(t, x'') - u(t, x')\| \leqslant L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\|$;

5) справедливо неравенство $c \leqslant [\beta(t_1 - t_0)/\alpha]^{\alpha}$.

Тогда траектория системы (1.1), начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q_c(t_0)$ в начальный момент t_0, оканчивается в точке $x = 0$ в некоторый конечный момент времени $t_0 + T$, где $T \leqslant \alpha\Theta^{1/\alpha}(t_0, x_0)/\beta$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [2] в случае стационарной системы (1.1). Отметим, что условие (2.2) обеспечивает устойчивый синтез.

Замечание 1. Если $\alpha = +\infty$, то $\Theta(t, x)$ — функция Ляпунова, обеспечивающая асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.1).

В работе [1], а также в [2, 3] даны методы построения функции управляемости $\Theta(x)$ и синтезирующего управления $u(x)$ для линейных и некоторых классов нелинейных стационарных систем. В отличие от функции Ляпунова функция управляемости в этих работах строится в неявной форме, т. е. как решение некоторого алгебраического или трансцендентного уравнения.

3. Проведем решение задачи синтеза ограниченных управлений для системы

(3.1) $$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad \|u\| \leqslant d$$

В дальнейшем будем предполагать, что

(3.2) $$A(t),\ B(t) \in C^\infty[t_0, +\infty),\ \|A(t)\| \leqslant a, \quad \|\Delta^k B(t)\| \leqslant b^{k+1}$$
$$(k = 0, 1, \ldots), \qquad \forall t \in [t_0, +\infty)$$
$$\Delta = A(t) - Id/dt$$

(I — единичная матрица), кроме того

(3.3) $$\operatorname{rank}(B(t), \Delta B(t), \ldots, \Delta^{n-1}B(t)) = n, \quad \forall t \in J$$

Теорема 2. Рассмотрим систему (3.1). Пусть $\Theta(t, x)$ — функция, определяемая уравнением

(3.4) $$2a_0\Theta = (N_\Theta^{-1}(t)x, x), \quad x \neq 0, \quad a_0 > 0$$

в замкнутой области G (2.1), $\Theta(t, 0) = 0$, где

(3.5) $$N_\Theta(t) = \int_t^\infty \exp\left(\frac{t-\tau}{\Theta}\right)\Phi(t, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t, \tau)\,d\tau$$

(звездочка означает транспонирование), $\Phi(t, \tau)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Тогда существует $c > 0$, такое, что множество $Q_c(t) = \{x\colon \Theta(t, x) \leqslant c\}$ ограничено и $Q_c(t) \subset \{x\colon \|x\| < R\}$ для любого $t \in J$; кроме того, для любого $x_0 \in Q_c(t_0) \setminus \{0\}$ единственное решение $x(t)$ системы (3.1) с управлением

$$u(t, x) = -B^*(t) N^{-1}_{\Theta(t,x)}(t)\, x, \quad x \in Q_c(t) \setminus \{0\} \tag{3.6}$$

и начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на некотором полуинтервале $[t_0, t_0 + T) \subset J$ и удовлетворяет условию $\lim x(t) = 0$ при $t \to t_0 + T$, где $T \leqslant \Theta(t_0, x_0)/\beta$, $\beta > 0$. При этом $c \leqslant \beta(t_1 - t_0)$ и для любого $d > 0$ коэффициент $a_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы управление $u(t, x)$ удовлетворяло ограничению $\|u(t, x)\| \leqslant d$ при $x \in Q_c(t) \setminus \{0\}$, $t \in J$.

Замечание 2. Если зафиксировать Θ, то для любого $\Theta \in (0, 1/(2a))$ управление (3.6) — стабилизирующее для системы (3.1), а $v = (N_\Theta^{-1}(t)\, x, x)/(2a_0)$ — функция Ляпунова.

Доказательство теоремы 2 основано на проверке ограниченности управления $u(t, x)$ и выполнения условий 1) — 5) теоремы 1 для выбранных $\Theta(t, x)$ и $u(t, x)$.

Отметим, что в условиях теоремы 2 и при $0 < \Theta < 1/(2a)$ матрица $N_\Theta(t)$, а также матрица

$$N_{1\Theta}(t) = \int_t^\infty (\tau - t) \exp\left(\frac{t-\tau}{\Theta}\right) \Phi(t, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t, \tau)\, d\tau \tag{3.7}$$

ограничены и положительно определены:

$$\|N_\Theta(t)\| \leqslant \frac{b^2\Theta}{1 - 2a\Theta}, \quad \|N_{1\Theta}(t)\| \leqslant \frac{b^2\Theta^2}{(1 - 2a\Theta)^2} \tag{3.8}$$

$(N_\Theta(t)\, x, x) > 0$, $(N_{1\Theta}(t)\, x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и любом $t \in J$. Кроме того, непосредственной подстановкой можно убедиться, что $N_\Theta(t)$, $N_{1\Theta}(t)$ и $N_\Theta^{-1}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$dN_\Theta/dt - AN_\Theta - N_\Theta A^* = -BB^* + N_\Theta/\Theta \tag{3.9}$$

$$dN_{1\Theta}/dt - AN_{1\Theta} - N_{1\Theta}A^* = -N_\Theta + N_{1\Theta}/\Theta \tag{3.10}$$

$$dN_\Theta^{-1}/dt + N_\Theta^{-1}A + A^*N_\Theta^{-1} = N_\Theta^{-1}BB^*N_\Theta^{-1} - N_\Theta^{-1}/\Theta \tag{3.11}$$

Покажем, что уравнение (3.4) имеет единственное положительное решение $\Theta(t, x)$ в некоторой замкнутой области G (2.1).

Рассмотрим функцию $F(t, x, \Theta) = 2a_0\Theta - (N_\Theta^{-1}(t)\, x, x)$. Так как

$$(N_\Theta^{-1}(t)\, x, x) \geqslant \|N_\Theta(t)\|^{-1} \|x\|^2 \geqslant (1 - 2a\Theta)\|x\|^2/(b^2\Theta)$$

(используем первое соотношение (3.8)), то $F(t, x, \Theta) < 0$ при достаточно малых Θ ($x \neq 0$, $t \in J$). Кроме того, при каждых $x \neq 0$, $t \in J$ функция $F(t, x, \Theta)$ монотонно возрастает, так как $\partial F(t, x, \Theta)/\partial\Theta \geqslant 2a_0 > 0$.

С другой стороны, $F(t, x, \Theta) \geqslant 0$ при $\Theta = \lambda < 1/(2a)$ (где $\lambda = 1/(2a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) и любых $(t, x) \in G$, где

$$R = [2a_0\lambda/(\max_{t\in J} \|N_\lambda^{-1}(t)\|)]^{1/2}$$

Это следует из неравенства

$$(N_\lambda^{-1}(t)\, x, x) \leqslant \|N_\lambda^{-1}(t)\| \|x\|^2 \leqslant \|N_\lambda^{-1}(t)\| R^2 \leqslant 2a_0\lambda$$

т. е. $F(t, x, \lambda) \geqslant 0$.

Таким образом, уравнение (3.4) определяет положительную функцию $\Theta(t, x)$ в области G при $x \neq 0$. Непрерывность и непрерывная дифференцируемость этой функции при $x \neq 0$ и любом $t \in J$ следует из теоремы о неявной функции, так как $\partial F(t, x, \Theta)/\partial\Theta \neq 0$.

Положим $\Theta(t, 0) = 0$, $t \in J$. Можно показать, что функция $\Theta(t, x)$ непрерывна при $x = 0$ и любом $t \in J$.

Предположим противное, т. е. пусть существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ существует x', $\| x' \| < \delta$ и существует $t' \in J$, такое, что $\Theta(t', x') \geqslant \varepsilon_0$. Имеем

$$2a_0\Theta(t', x') = (N^{-1}_{\Theta(t', x')}(t')x', x') \leqslant \| N^{-1}_{\Theta(t', x')}(t') \| \| x' \|^2 \leqslant M\delta^2$$

$$(M = \max_{t \in J} \| N^{-1}_{\varepsilon_0}(t) \|)$$

Тогда при $\delta < (a_0\varepsilon_0/M)^{1/2}$ получаем, что $\Theta(t', x') < \varepsilon_0/2$, а это противоречит предположению.

Из неравенства $(N_\Theta^{-1}(t)x, x) \geqslant \| N_\Theta^{-1}(t) \|^{-1} \| x \|^2$ следует ограниченность множества $Q_c(t)$ и $Q_c(t) \subset \{x: \| x \| < R\}$ при $c < R(\sqrt{a^2R^2 + 2a_0b^2} - aR)/(2a_0b^2)$ и любом $t \in J$. Таким образом, выполнены условия 1)—3) теоремы 1.

Для проверки остальных условий теоремы потребуются некоторые вспомогательные результаты.

Рассмотрим оператор D_Θ $(0 < \Theta < 1/a)$, который действует на матрицу $P(t)$ следующим образом:

$$(D_\Theta P)(t) = \int_t^\infty \exp\left(\frac{t-\tau}{\Theta}\right)\Phi(t, \tau)P(\tau)\,d\tau \tag{3.12}$$

Можно проверить, что оператор D_Θ обладает следующими свойствами:

1°. Если $\| P(t) \| \leqslant b$ при $t \in [t_0, +\infty)$, то

$$\| (D_\Theta^m P)(t) \| \leqslant b\,[\Theta/(1 - a\Theta)]^m$$

2°. Если $P(t) \in C^1[t_0, +\infty)$, $\| \Delta P(t) \| \leqslant b$ при $t \in [t_0, +\infty)$, то $\Theta^{-m}(D_\Theta^m P)(t) \rightrightarrows P(t)$ при $\Theta \to 0$ на $[t_0, +\infty)$.

Лемма 1. Существует $\Theta_0 > 0$, такое, что при $0 < \Theta < \Theta_0$ матрицы

$$N_\Theta(t) = \frac{1}{\Theta}\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(1)}(t, \Theta) \tag{3.13}$$

$$N_{1\Theta}(t) = \frac{1}{\Theta^2}\sum_{k=0}^{\infty}(1 + k)E_k^{(2)}(t, \Theta) \tag{3.14}$$

$$(E_k^{(n)}(t, \Theta) = \{(D_\Theta^n(\Delta D_\Theta)^k B)(t)\}\{(D_\Theta^n(\Delta D_\Theta)^k B)(t)\}^*, \quad n = 1, 2)$$

Доказательство. Из свойств оператора D_Θ следует, что ряды (3.13) и (3.14) можно дифференцировать по t на $[t_0, +\infty)$ при $0 < \Theta < 1/(a + b)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что ряды (3.13) и (3.14) удовлетворяют уравнениям (3.9) и (3.10) соответственно.

Таким образом, соотношения (3.5) и (3.13) — ограниченные решения уравнения (3.9), а (3.7) и (3.14) — ограниченные решения уравнения (3.10) при $t \in [t_0, +\infty)$.

Преобразуем уравнение (3.9) к виду

$$\frac{dN_\Theta}{dt} + \left[-\left(A + \frac{1}{2\Theta}I\right)\right]N_\Theta + N_\Theta\left[-\left(A + \frac{1}{2\Theta}\right)I\right]^* + BB^* = 0 \tag{3.15}$$

Пусть уравнение (3.9), а значит и (3.15), имеет два различных ограниченных решения $N_\Theta^{(1)}(t)$ и $N_\Theta^{(2)}(t)$. Тогда их разность $K_\Theta(t) = N_\Theta^{(1)}(t) - N_\Theta^{(2)}(t)$ удовлетворяет уравнению, отличающемуся от (3.15) отсутствием слагаемого BB^*. Следовательно, на решениях $x(t)$ системы $x^\cdot = -(A(t) + I/(2\Theta))x$ справедливо тождественное равенство

$$(K_\Theta(t)x, x) = c, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \tag{3.16}$$

Выберем q так, чтобы при $0 < \Theta < q$, выполнялось условие $\| x(t) \| \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда равенство (3.16) может быть выполнено при всех $t \in [t_0, +\infty)$, лишь если $K_\Theta(t) \equiv 0$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$ и $c = 0$. Таким образом, при $0 < \Theta < q$ уравнение (3.15), а значит, и (3.9) имеет единственное ограниченное решение. Отсюда следует, что при $0 < \Theta < \Theta_0 = \min(1/(2a);\ 1/(a+b);\ q)$ матрица $N_\Theta(t)$ может быть представлена рядом (3.13) для любого $t \in [t_0, +\infty)$.

Аналогично можно показать, что если $0 < \Theta < q$, то уравнение (3.10) имеет единственное ограниченное решение, а значит, при $0 < \Theta < \Theta_0$ матрица $N_{1\Theta}(t)$ может быть представлена рядом (3.14) для любого $t \in [t_0, +\infty)$.

Замечание 3. Существенным в формулах (3.13) и (3.14) является разложение матрицы в сумму положительных матриц. В стационарном случае эти разложения упрощаются:

$$E_k^{(n)}(t, \Theta) = R_{1/\Theta}^n (R_{1/\Theta}A)^k BB^* (R_{1/\Theta}A)^{*k} R_{1/\Theta}^{*n}$$
$$R_{1/\Theta} = (A + I/\Theta)^{-1}$$

и используются в доказательстве теоремы 2 работы [3].

Лемма 2. Существует $\Theta_1 > 0$, такое, что при $0 < \Theta < \Theta_1$

$$\Theta\,(N_\Theta(t)\,x, x) \geqslant \gamma_1 \Theta^{2n} \|x\|^2, \qquad \gamma_1 > 0, \quad \forall t \in J \tag{3.17}$$

Доказательство. Имеем

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)\,x, x\Big) = (G_n(t)\,G_n^*(t)\,x, x) = (G_n^*(t)\,x, G_n^*(t)\,x) > 0$$
$$(P_k(t) = (\Delta^k B(t))(\Delta^k B(t))^*,\ G_n(t) = (B(t),\ \Delta B(t),\ \ldots,\ \Delta^{n-1}B(t)))$$

при $x \neq 0$ и любом $t \in J$, так как в противном случае не выполнено соотношение (3.3). Кроме того, функция $G_n(t)$ непрерывна, тогда существует непрерывная на J функция $\gamma(t) > 0$, такая, что $(G_n^*(t)x, G_n^*(t)x) \geqslant 2\gamma(t)\|x\|^2$. Поэтому

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)\,x, x\Big) \geqslant 2\gamma_1 \|x\|^2, \quad \gamma_1 = \min_{t \in J} \gamma(t) > 0 \tag{3.18}$$

Из свойств оператора D_Θ следует, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Theta^{-2(k+1)} E_k^{(1)}(t, \Theta) \rightrightarrows \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)$$

при $\Theta \to 0$ на J. Поэтому существует $\Theta_1 > 0$, такое, что при $0 < \Theta < \Theta_1$

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \Theta^{-2(k+1)} E_k^{(1)}(t, \Theta)\,x, x\Big) \geqslant \gamma_1 \|x\|^2, \quad \forall t \in J$$

Будем считать, что $\Theta_1 < 1$, тогда из предыдущего неравенства следует (3.17).

Покажем теперь справедливость условия 4) теоремы 1.

Дифференцируя соотношение $2a_0\Theta(t, x) - (N^{-1}_{\Theta(t,x)}(t)\,x, x) = 0$ в силу системы (3.1) с управлением вида (3.6) и учитывая (3.4) и (3.11), получаем

$$\Theta^{\cdot}(t, x) \leqslant -\left[1 + \frac{(N_{1\Theta}(t)\,y, y)}{\Theta(t, x)\,(N_\Theta(t)\,y, y)}\right]^{-1}, \quad y = N^{-1}_{\Theta(t,x)}(t)\,x \tag{3.19}$$

Из леммы 1 и свойств оператора D_Θ следует неравенство

$$(N_{1\Theta}(t)\,y, y) \leqslant 4\,[n\Theta\,(N_\Theta(t)\,y, y) + S], \tag{3.20}$$
$$S = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} (1 + k)\,E_k^{(1)}(t, \Theta)\,y, y\Big)$$

Далее, так как для $0 < \Theta \leqslant \Theta_2 < 1/(a+b)$, $S \leqslant r_1 \Theta^{2n} \|y\|^2$, $r_1 > 0$, то из (3.20), леммы 2 и (3.19) следует, что

$$\Theta^{\cdot}(t, x) \leqslant -[1 + 4(n + r_1/\gamma_1)]^{-1}, \quad x \neq 0$$

в замкнутой области G (2.1), где

$$R = (2a_0\Theta_4 / \max_{t \in J} \|N_{\Theta_4}^{-1}(t)\|)^{1/2}, \quad 0 < \Theta \leqslant \Theta_4 < \Theta_3 =$$
$$= \min(\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, 1)$$

Покажем ограниченность управления при $x \in Q_3(t) \setminus \{0\}$, $t \in J$.

Используя (3.6) и (3.1) и учитывая свойства оператора D_Θ и лемму 1, имеем

(3.21) $$\| u(t, x) \|^2 = 2a_0 V_0 (t, y(t, x), \Theta(t, x))$$

Здесь

(3.22) $$V_s(t, y, \Theta) = (M_s(t, \Theta) y, y) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(1)}(t, \Theta) y, y \Big)^{-1}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

$$M_s(t, \Theta) = \{((\Theta\Delta + I) D_\Theta (\Delta D_\Theta)^s B)(t)\} \{((\Theta\Delta + I) D_\Theta (\Delta D_\Theta)^s B)(t)\}^*$$

Рассмотрим семейство функций (3.22) при $0 < \Theta < \Theta_3$, $y \neq 0$, $t \in J$. Используя свойства оператора D_Θ, можно показать, что $V_s(t, y, \Theta) \leqslant \leqslant 2 + V_{s+1}(t, y, \Theta)$. Поэтому

$$V_0(t, y, \Theta) \leqslant 2^{s+1} - 2 + 2^s V_s(t, y, \Theta), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Так как при $0 < \Theta \leqslant \Theta_4 < \Theta_3$

$$(M_{n-1}(t, \Theta) y, y) \leqslant \left(\frac{b^{n+1}\Theta_4 + b^n}{1 - a\Theta_4^{\,n}} \right)^2 \Theta^{2n} \| y \|^2 = m_1 \Theta^{2n} \| y \|^2$$

то, учитывая лемму 2, заключаем, что $V_{n-1}(t, y, \Theta) \leqslant m_1/\gamma_1$. Выбирая

$$a_0 < d^2/(2^{n+1} - 4 + 2^n m_1/\gamma_1)$$

получим, что управление удовлетворяет ограничению

$$\| u(t, x) \| \leqslant d, \quad x \in Q_{\Theta_4}(t) \setminus \{0\}, \quad t \in J$$

Далее, если потребовать, чтобы

$$c < \min \{ R \sqrt{a^2R^2 + 2a_0 b^2} - aR;\ \beta (t_1 - t_0);\ \Theta_4 \}$$

где $\beta = (1 + 4(n + r_1/\gamma_1))^{-1}$, то

$$Q_c(t) \subset \{x\colon \| x \| < R\} \text{ и } t_0 + T \leqslant t_1.$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что условия теоремы 2 выполняются, если, например, элементы матрицы $\Phi^{-1}(t) B(t)$ — квазиполиномы.

Пример. Рассмотрим систему

$$x_1^{\cdot} = \frac{x_1}{t} + \frac{2x_2}{t^2} + \frac{u}{t}, \quad x_2^{\cdot} = -3x_1 - \frac{3x_2}{t} + u; \quad |u| \leqslant 1, \quad t \in [1; 10]$$

Тогда

$$(B(t), \Delta B(t)) = \begin{Vmatrix} 1/t & 2/t^2 \\ 1 & -6/t \end{Vmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{Vmatrix} 1/t & -2/t^2 \\ -1 & 3/t \end{Vmatrix}$$

Пусть, например, $b = 7{,}22$, $a = 4{,}8$, $0 < \Theta < 0{,}707$, $\gamma_1 = 3{,}66 \cdot 10^{-3}$, $m_1 = 52$, $r_1 = 0$, $\beta = 1/_9$, $a_0 = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$. Тогда управление, решающее задачу синтеза, имеет вид

$$u(t, x) = -\left(\frac{t^2}{\Theta^2} + \frac{12t}{\Theta} \right) \frac{x_1}{10} - \left(\frac{t}{\Theta^2} - \frac{8}{\Theta} \right) \frac{x_2}{10}$$

$$(x \in Q_c(t) \setminus \{0\} = \{x\colon \Theta \leqslant 4{,}47 \cdot 10^{-3}\} \setminus \{0\}, \ t \in [1; 10])$$

где $\Theta = \Theta(t, x)$ — единственное положительное решение уравнения

$$3{,}4 \cdot 10^{-5} \Theta^4 = (72t^2 x_1^2 + 96t x_1 x_2 + 32 x_2^2)\Theta^2 + (12t^3 x_1^2 - 4t^2 x_1 x_2 - $$
$$ - 8t x_2^2)\Theta + t^4 x_1^2 - 2t^3 x_1 x_2 + t^2 x_2^2$$

4. Рассмотрим систему (3.1) (для простоты изложения считаем $r = 1$). Выберем n-мерную вектор-функцию $c(t)$ из условий $c^*(t)\, \Delta^i B(t) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n - 2$; $c^*(t)\, \Delta^{n-1} B(t) = 1$. Учитывая (3.3) и выбор $c(t)$, можно показать, что матрица

(4.1) $$H(t) = \operatorname{col}(c^*(t), (\Delta_1 c(t))^*, \ldots, (\Delta_1^{n-1} c(t))^*)$$

$$(\Delta_1 = A^*(t) + Id/dt)$$

невырождена для любого $t \in J$. Сделав в системе (3.1) замену $z = H(t)\,x$ и введя новое управление $v = (\Delta_1{}^n c(t))^* H^{-1}(t)\, z + u$, получим стационарную систему

$$z_i{}^{\cdot} = z_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad z_n{}^{\cdot} = v, \quad |v| \leqslant d_1 < d \tag{4.2}$$

Решая задачу синтеза управления для системы (4.2), используя теорему 2 или теорему 2 работы [3] и возвращаясь к старым переменным и управлению, получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\Theta(t, x)$ — функция, определяемая уравнением

$$2a_0\Theta^{2n} = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\Theta^{i+j-2}\,[(\Delta_1^{i-1}C(t))^* x]\,[(\Delta_1^{j-1}C(t))^* x], \quad x \neq 0 \tag{4.3}$$

$$(N_\Theta^{-1} = \| f_{ij}\Theta^{i+j-2n-1} \|_{i,j=1,\ldots,n}),$$

в замкнутой области G (2.1), $\Theta(t, 0) = 0$.

Тогда существует $c > 0$, такое, что $Q_c(t)$ ограничено и $Q_c(t) \subset \{x: \|x\| < R\}$ для любого $t \in J$, и для любого $x_0 \in Q_c(t_0) \setminus \{0\}$ единственное решение $x(t)$ системы (3.1) с управлением

$$u(t, x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{f_{nj}(\Delta_1^{j-1}C(t))^* x}{\Theta^{n-j+1}} - (\Delta_1{}^n C(t))^* x, \quad x \in Q_c(t) \setminus \{0\} \tag{4.4}$$

и начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на некотором полуинтервале $[t_0, t_0 + T) \subset J$ и удовлетворяет условию $\lim x(t) = 0$ при $t \to t_0 + T$, где $T \leqslant (1 + 4n)\,\Theta(t_0, x_0)$. Кроме того, $c \leqslant (t_1 - t_0)/(1 + 4n)$ и $\|u(t, x)\| \leqslant d$ при $x \in Q_c(t) \setminus \{0\}$, $t \in J$.

Пример. Рассмотрим движение твердого тела с одной осью симметрии, управляемого двумя реактивными двигателями, которое описывается уравнениями

$$x_1{}^{\cdot} = -ax_2x_3 + u_1\cos\omega t, \; x_2{}^{\cdot} = ax_1x_3 - u_1\sin\omega t, \; x_3{}^{\cdot} = u_2 \; |u_1| \leqslant 1,$$
$$|u_2| \leqslant 1, \quad a = \mathrm{const}$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — проекции угловой скорости тела на оси, жестко связанные с ним, ω — угловая скорость вращения первого двигателя, u_1 и u_2 — управляющие моменты.

Задача состоит в построении управления $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$, переводящего тело из произвольного состояния $x(0) = x_0$ в точку O $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ за конечное время.

Выберем $u_2(t, x) = -\mathrm{sign}\, x_{30}$, тогда исходная система становится линейной. Используя теорему 3, получаем, что управление

$$u_1(t, x) = \frac{\xi}{\Theta^2\varphi} - \frac{2}{\Theta}\left(\eta + \frac{\xi}{\varphi^2}\right) + \varphi\xi + \frac{\eta}{\varphi}$$
$$u_2(t, x) = -\mathrm{sign}\, x_{30}; \quad \varphi = t\,\mathrm{sign}\, x_{30} - x_{30} - \omega$$
$$\xi = x_1\sin\omega t + x_2\cos\omega t, \quad \eta = x_1\cos\omega t - x_2\sin\omega t$$

где $\Theta = \Theta(t, x)$ определяется уравнением

$$a_0\Theta^4 = \left[\left(\eta + \frac{\xi}{\varphi^2}\right)\Theta - \frac{\xi}{2\varphi}\right]^2 + \frac{\xi}{4\varphi^2}$$

переводит произвольную точку x_0 из некоторой заданной окрестности начала координат в точку O за конечное время $T = |x_{30}|$, при этом $|u_i(t, x)| \leqslant 1$, $i = 1, 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробов В. И.* Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1979. Т. 248. № 5. С. 1051—1055.
2. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сб. 1979. Т. 109. № 4. С. 582—606.
3. *Коробов В. И.*, *Скляр Г. М.* Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 5. С. 11—14.

Харьков

Поступила в редакцию
22.X.1986