Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 539.3

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТЫХ ПЛИТ НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

Зорин И. С., Ромашев Ю. А.

Проводится асимптотический анализ задачи теории упругости о деформации тонкой многослойной анизотропной плиты в трехмерной постановке без предположений относительно регулярности строения плиты и характера деформирования слоев или пакета в целом.

Используются результаты [1] исследования решений эллиптических краевых задач в тонких областях. Малым параметром h служит относительная высота пакета. Получена система уравнений предельной (при $h \to 0$) задачи, найдены эффективные характеристики жесткости плиты, приведены конкретные примеры их расчета.

Асимптотические методы построения решений задач теории тонких плит развиты в [1—8]; методом [3] изучались [9—11] изотропные многослойные пластины и анизотропные двуслойные балки.

Важная особенность анизотропных слоистых плит несимметричного строения состоит в том, что при их деформировании напряженное состояние в любом сечении, параллельном срединной поверхности, характеризуется взаимодействием состояний изгиба—кручения и растяжения—сдвига. Вывод предельных уравнений изгиба тонких плит сложной структуры с использованием гипотез Кирхгофа проведен в [5, 12].

1. Постановка задачи. Рассматривается пространственная задача теории упругости о деформации тонкой цилиндрической области Ω, боковая поверхность которой жестко защемлена, а к основаниям приложены нагрузки заданной интенсивности. Плита занимает область Ω и представляет собой пакет анизотропных слоев, между которыми осуществлен идеальный механический контакт. Слои располагаются параллельно основаниям плиты.

Декартова система координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ вводится таким образом, что ее начало O находится в области $\Omega = \omega \times [-H, H]$, а ось Ox_3 нормальна срединной поверхности ω пакета. Предполагается, что отношение высоты $2H$ плиты к характерному линейному размеру D области ω является малым параметром $h > 0$. Пусть теперь изменением масштаба величина D сведена к единице. Далее предполагается, что все величины, имеющие размерность длины, отнесены к D. Использованные выше координатные символы и принятые обозначения областей сохраняются.

Математически задача формулируется следующим образом. Плита Ω состоит из $m+n$ слоев $\Omega^r = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in \omega,\ hl_r \leqslant x_3 \leqslant hl_{r+1}\}$, занумерованных числами из интервала $[-m, n]$; $\Omega^0 = \varnothing$, $\sum\limits_{-m}^{n} l_r = 1$. В каждой из областей Ω^r выполнены уравнения равновесия

$$(1.1) \qquad \sigma_{ij,j}^r(\mathbf{x}, h) = 0, \quad x \in \Omega^r; \quad i, j = 1, 2, 3$$

Компоненты σ_{ij}^r и ε_{ij}^r тензоров напряжений и деформаций связаны соотношениями закона Гука. Последние удобно записать в виде, аналогичном использованному в [5, 12]. Именно, если $\mathbf{e}$ и Σ — шестимерные векторы с компонентами $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \varepsilon_{33}$ и $\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{33}$ соответственно, где γ_{ij} — сдвиговые компоненты деформации, то

$$(1.2) \qquad \Sigma_i^r(x, h) = B_{ij}^r e_j(x, h), \quad x \in \Omega^r; \quad \mathbf{B} = \| B_{jk} \|_{j,k=1}^6$$

$\mathbf{B}$ — симметричная матрица упругих постоянных, элементы которой — четыре матрицы 3×3: B_1 и B_3 на главной диагонали, а также матрицы B_2 и B_2^T. Индекс T означает транспонирование.

На границах слоев заданы условия сопряжения

$$\begin{gathered}\sigma^{(3)}(\mathbf{x}', hl_r+0; h) - \sigma^{(3)}(\mathbf{x}', hl_r - 0; h) = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}', hl_r+0; h) - \mathbf{u}(\mathbf{x}', hl_r - 0; h) = 0;\ \mathbf{x}' \in \omega, r \in [-m+1, n-1]\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ — вектор смещений; $\sigma^{(3)} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$ — вектор напряжений, действующих по площадкам, нормальным срединной поверхности плиты.

Краевые условия на основаниях и боковой поверхности $\partial\Omega$ плиты Ω имеют вид

$$\sigma^{(3)}(\mathbf{x}', hl_n - 0; h) = \mathbf{p}^+(\mathbf{x}', h),\quad \sigma^{(3)}(\mathbf{x}', hl_{-m}; h) = \mathbf{p}^-(\mathbf{x}', h);\quad \mathbf{x}' \in \omega \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, h) = 0;\quad \mathbf{x}' \in \partial\omega,\quad hl_{-m} \leqslant x_3 \leqslant hl_n \tag{1.5}$$

Предполагается, что граница области ω — регулярная кривая, массовые силы отсутствуют, векторы правых частей в (1.4), (1.5) допускают представления $\mathbf{p}^{\pm}(\mathbf{x}',\ h) = (h^{-1}\mathbf{p},\ p_3)^{\pm}(\mathbf{x}')$, где $\mathbf{p} = (p_1,\ p_2)$, p_j $(j = 1, 2, 3)$ — гладкие (класса C^∞) функции координат x_1, x_2.

Асимптотика решения задачи (1.1), (1.3), (1.5) представляется в виде рядов по степеням параметра h. Вне малой окрестности края плиты коэффициенты этих рядов отыскиваются из решений $\mathbf{u}^{(k)}$ задач на сечениях области Ω плоскостью, нормальной ее основаниям, и решений предельной задачи в области ω. В п. 2.1 описывается алгорифм построения векторов $\mathbf{u}^{(k)}$, а в п. 2.2 — решений соответствующих однородных задач, необходимых для согласования разложений на предельной двумерной поверхности.

Асимптотическое представление $\mathbf{u}^h(\mathbf{x},\ h)$ решения исходной задачи приводится в п. 3, а в п. 4 строится оператор предельной краевой задачи в области ω. Функции пограничного слоя, возникающего вблизи боковой поверхности плиты, детально не рассматриваются, формулируются только краевые условия предельной задачи на $\partial\omega$.

Далее в п. 5 уточняется физический смысл коэффициентов системы уравнений предельной задачи, в п. 6 даются примеры расчета эффективных характеристик жесткости плиты и сравнение результатов с имеющимися в литературе.

2. Вспомогательные построения 2.1. Рассмотрим задачу (1.1), (1.3) с условиями (1.4) на основаниях плиты Ω и будем искать ее решение в виде ряда

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', h^{-1}x_3) \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в соотношения (1.1) и сравнение (после замены координат $(\mathbf{x}',\ \mathbf{x}_3) \to (\mathbf{x}',\ \zeta) = (\mathbf{x}',\ h^{-1}\mathbf{x}_3)$) коэффициентов при одинаковых степенях параметра h приводит к рекуррентной последовательности задач на отрезках $[l_{-m},\ l_{-m+1}], \ldots, [l_{n-1},\ l_n]$ оси $O\zeta$ для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\mathbf{x}' \in \omega$

$$\begin{gathered}B_3{}^r \frac{d^2}{d\zeta^2}\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', \zeta) = -(L_1{}^r + L_1^{r,T})\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)\frac{d}{d\zeta}\mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', \zeta) - \\ - I^r\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)\mathbf{u}^{(k-2)}(\mathbf{x}', \zeta) \\ I^r(\partial/\partial\mathbf{x}') = (K_1{}^T L_2{}^r + K_3{}^T L_1{}^r)(\partial/\partial\mathbf{x}'),\quad r \in [-m, n],\quad k = 0, 1, \ldots\end{gathered} \tag{2.2}$$

Аналогично из соотношений (1.3) выводятся условия сопряжения коэффициентов $\mathbf{u}^{(k)}$ на границах слоев пакета и граничные условия на его боковой поверхности, которые имеют вид

$$(2.3)\qquad B_3^r\frac{d}{d\zeta}\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', l_r\mp 0)-B_3^{r\pm1}\frac{d}{d\zeta}\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', l_r\mp 0)=$$
$$=L_1^{r\mp1}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)\mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', l_r\pm 0)-L_1^r\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)\mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', l_r\mp 0)+$$
$$+(\delta_{k,0}(\mathbf{p}^-\delta_{r,-m}-\mathbf{p}^+\delta_{r,n+1}), \delta_{k-1,0}(\mathbf{p}_3^-\delta_{r,-m}-\mathbf{p}_3^+\delta_{r,n+1}))(\mathbf{x}')$$

$$(2.4)\qquad \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', l_r\mp 0)-\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', l_r\pm 0)=0;\quad r\in[-m, n+1],$$
$$k=0, 1, \ldots$$

При выводе (2.2) — (2.4) и далее соотношения закона Гука используются в форме (1.2). Здесь еще приняты обозначение $L_1=B_2^TK_1+B_3K_2$, $L_2=B_1K_1+B_2K_2$, где $K_j=K_j(\partial/\partial x')$ — матричные дифференциальные операторы с элементами $k_{jj}^1=k_{j3}^2=k_{3(3-j)}^1=\partial/\partial x_j$; $j=1,2$. Считается, что функции с отрицательными индексами, а также характеристики слоев с номерами $r=0$ и $r\notin[-m, n]$ равны нулю. Знаки плюс и минус в (2.3) отвечают индексам $r\geqslant 0$ и $r<0$ соответственно. Краевые условия на основаниях плиты получаются из (2.3) при $r=-m$ и $r=n+1$.

Соответствующая (2.2) — (2.4) однородная краевая задача допускает нетривиальные решения

$$(2.5)\qquad \mathbf{v}_q^{(k)}(\mathbf{x}')=(\delta_{1,q};\delta_{2,q};\delta_{3,q})\,v_q^{(k)}(\mathbf{x}');\quad q=1, 2, 3;\quad k=0, 1, \ldots$$

где $v_q^{(k)}(\mathbf{x}')$ — произвольные функции координат x_1, $x_2\in\omega$. Поэтому системы имеют решения не при любых правых частях.

С целью построения коэффициентов асимптотического представления (2.1) рассмотрим задачи сопряжения (2.2)—(2.4) в областях

$$\Omega_+=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}'\in\omega, 0\leqslant\zeta\leqslant l_n\},\quad \Omega_-=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}'\in\omega, l_{-m}\leqslant\zeta\leqslant 0\}$$

Будем считать, что условия разрешимости этих задач при фиксированном r для $r=n, \ldots, 1$ и $r=-m, \ldots, -1$ выполнены. Тогда коэффициенты $\mathbf{u}^{(k)}$ представлений решения $\mathbf{V}(\mathbf{x}, h)$ в областях $\Omega_\pm$, аналогичные (2.1), можно найти вычислением известных квадратур, решая последовательно задачи (2.2)—(2.4) для $r\in[-m, n]$. Вводя дополнительно условия $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', 0)=\mathbf{0}$ $(k=0, 1, \ldots)$ нормировки, для слоев с номерами $j\in[0, n]$ получим

$$(2.6)\qquad \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', \zeta)=-K_2\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)\int_0^\zeta\mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', t)\,dt+$$
$$+\sum_{r=1}^{j}B_3^{r,-1}\Big\{(l_r-l_{r-1})\Big[\sum_{s=r}^{n}\int_{l_{s-1}}^{l_s}L^s(\mathbf{u}; k; \mathbf{x}', t)\,dt+$$
$$+(\delta_{k,0}\mathbf{p}^+, \delta_{k-1,0}p_3^+)(\mathbf{x}')\Big]-\int_{l_{r-1}}^{l_r}(l_{r-1}-t)\,L^r(\mathbf{u}, k; \mathbf{x}', t)\,dt-$$
$$-K^r\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)\int_{l_{r-1}}^{l_r}\mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', t)\,dt\Big\}-$$
$$-B_3^{j,-1}\Big\{(l_j-\zeta)\Big[\sum_{r=j}^{n}\int_{l_{r-1}}^{l_r}L^r(\mathbf{u}; k; \mathbf{x}', t)dt+(\delta_{k,0}\mathbf{p}^+, \delta_{k-1,0}p_3^+)(\mathbf{x}')\Big]-$$
$$-\int_\zeta^{l_j}(\zeta-t)\,L^j(\mathbf{u}; k; \mathbf{x}', t)\,dt-K^{(j)}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)\int_\zeta^{l_j}\mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', t)\,dt\Big\}$$

$$L(\mathbf{u}; k; \mathbf{x}', t) = L_1{}^T \frac{d}{dt} \mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', t) + I\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{u}^{(k-2)}(\mathbf{x}', t),$$

$$K\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) = B_2{}^T K_1\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)$$

Аналогичные формулы справедливы и для слоев, занумерованных числами из интервала $[-m, -1]$.

Для согласования построенных выше коэффициентов асимптотических представлений необходимо удовлетворить еще условия (2.3) сопряжения в сечении $\Pi = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}' \in \omega, \quad \zeta = 0\}$ плиты Ω плоскостью $\{\zeta = 0\}$. Примем Π в качестве поверхности приведения, тогда оставшиеся неучтенными в (2.3) соотношения будут выполнены, если для $k = 0, 1, \ldots$ выражения

$$\mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}') = \sum_{r=1}^{n+1} \left\{ J_+{}^r\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', l_{r-1}) + I^r\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \int\limits_{l_{r-1}}^{l_r} \mathbf{u}^{(k-2)}(\mathbf{x}', t)\, dt \right\} + \tag{2.7}$$

$$+ \sum_{r=-m-1}^{-1} \left\{ J_-{}^r\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{u}^{(k-1)}(\mathbf{x}', l_{r+1}) + I^r\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \int\limits_{l_{r+1}}^{l_r} \mathbf{u}^{(k-2)}(\mathbf{x}', t)\, dt \right\} +$$

$$+ (\delta_{k,0}(\mathbf{p}^+ - \mathbf{p}^-), \delta_{k-1,0}(p_3{}^+ - p_3{}^-))(x')$$

$$\left(J_\pm{}^r\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) = \pm (L_1^{r\pm 1} - L_1{}^r)^T \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \right)$$

тождественно равны нулю для $\mathbf{x}' \in \omega$.

2.2. В общем случае правые части выражений (2.7) отличны от нуля и условия (2.3) на Π не выполнены. Чтобы компенсировать возникающие на каждом шаге по k невязки $\mathbf{F}^{(k)}$, построим решения однородной задачи (2.2)—(2.4)

$$\mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}', \zeta; h) = \sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathbf{v}^{(s, p)}(\mathbf{x}', \zeta) \tag{2.8}$$

Главными (по h) членами в (2.8) являются вектор-функции $\mathbf{v}^{(s,0)}(\mathbf{x}')$, заданные формулами (2.5). Краевые задачи для определения коэффициентов рядов (2.8), совпадают с соотношениями (2.2)—(2.4), в которых $\mathbf{p}^\pm = 0$, $p_3{}^\pm = 0$, а индекс k заменен на p.

Пусть, как и в п. 2.1, условия разрешимости задач (2.2)—(2.4) выполнены в областях $\Omega_\pm$. Отыскивая последовательно решения этих задач в слоях $r = n, \ldots, 1$ и $r = -m, \ldots, -1$, на первом шаге (по h) алгорифма построения коэффициентов $u^{(k,p)}$ находим векторы

$$\mathbf{v}^{(s,1)}(\mathbf{x}', \zeta; r) = -\zeta(B_3^{r,-1} K^r + K_2)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{x}') + \mathbf{v}_0^{(s)}(\mathbf{x}'; r) \tag{2.9}$$

Здесь $\mathbf{v}_0{}^{(s)}(\mathbf{x}'; r)$ — функции, не зависящие от ζ и определяемые из условия непрерывности коэффициентов $\mathbf{v}^{(s,1)}$ на поверхностях $\{\zeta = l_r\}$, $r = [-m + 1, n - 1]$ сопряжения слоев плиты.

Вектор-функции (2.9) удовлетворяют и условиям (2.3) непрерывности компонент тензора напряжений на поверхности приведения. Аналогичным образом на следующих шагах по p алгорифма определяются и другие коэффициенты рядов (2.8): они являются полиномами переменной ζ степени $p > 1$, но указанным условиям на Π уже не удовлетворяют. Векторы невязок, возникающих в правых частях первых условий (1.3) на Π при подстановке в исходную задачу ряда (2.8), порождают ряды

$$\sum_{p=0}^{\infty} h^{p-1} L^{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{x}'); \quad s = 0, 1, \ldots \tag{2.10}$$

Элементы матриц $L^{(p)}$ — однородные, порядков p, дифференциальные выражения, коэффициенты которых зависят от упругих постоянных и высоты слоев плиты.

При построении функций $\mathbf{v}^{(s,p)}(\mathbf{x}', \zeta; r)$ в итерационных процессах участвуют постоянные интегрирования систем (2.2) дифференциальных уравнений. Устраним этот произвол: будем считать, что все коэффициенты ряда (2.8) для $p > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ обращаются в нуль на поверхности П.

3. Асимптотика решения. Асимптотическое (по h) представление $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, h)$ решения задачи (1.1), (1.3)—(1.5) будем искать в виде (см. [1, 5])

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, h) = \mathbf{V}(\mathbf{x}'; \zeta; h) + \sum_{k,s=0}^{\infty} h^{k+s-1} \sum_{q=1}^{3} h^{-J_q} \mathbf{v}_q^{(k,s)}(\mathbf{x}', \zeta) + \mathbf{W}(\mathbf{x}, h) \tag{3.1}$$

$$(J_1 = J_2 = 1,\ J_3 = 2)$$

Здесь $\mathbf{V}(x', \zeta; h)$ — решение (2.1) задачи (2.2)—(2.4), $\mathbf{v}^{(k,s)}(\mathbf{x}', \zeta)$ — коэффициенты разложения (2.8) решения соответствующей однородной задачи, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, h)$ — функция пограничного слоя, возникающего вблизи боковой поверхности плиты Ω.

Пусть коэффициенты рядов $\mathbf{V}(\mathbf{x}', \zeta; h)$ и $\mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}', \zeta; h)$ найдены в итерационных процессах пп. 2.1, 2.2. Тогда первые два слагаемых в правой части (3.1) удовлетворяют уравнениям (1.1), вторым условиям (1.3), условиям (1.4) и, для $r \neq 0$, первым условиям (1.3). Для того чтобы их сумма служила приближением к точному решению $\mathbf{u}(\mathbf{x}, h)$ вне малой окрестности края плиты, необходимо наложить дополнительные условия на коэффициенты представлений (2.1), (2.8).

Опуская в (3.1) функции пограничного слоя и подставляя полученное выражение в исходную задачу (1.1) — (1.5), с учетом (2.7), (2.10) находим вектор невязки в первой группе условий (1.3) на поверхности П:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}') = \sum_{k=0}^{\infty} h^{k-1} \left\{ \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}') + \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{q=1}^{3} h^{-1-J_q} L^{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{v}_q^{(p-k)}(\mathbf{x}') \right\} \tag{3.2}$$

Перегруппируем слагаемые в (3.2) так, чтобы каждый член ряда имел по h порядок, не выше k и зависел от коэффициентов $\mathbf{v}_q^{(p)}$ с верхними индексами $p \leqslant k$. Приравнивая последовательно получаемые выражения нулю, приходим к соотношениям

$$\sum_{q=1}^{3} \sum_{p=1}^{2+J_q} h^{p-J_q-1} L^{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{v}_q^{(k)}(\mathbf{x}') = -\Phi^{(k)}(\mathbf{x}', h), \quad \mathbf{x}' \in \omega \tag{3.3}$$

$$\left(\Phi^{(k)}(\mathbf{x}', h) = \sum_{q=1}^{3} h^{J_q-1} \left(\sum_{p=1}^{k} L^{(p+J_q+1)}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) \mathbf{v}_q^{(k-p)}(\mathbf{x}') + \mathbf{F}^{(k+J_q-1)}(\mathbf{x}') \right)\right)$$

Левые части равенств (3.3) содержат неизвестные функции $\mathbf{v}_q^{(k)}(\mathbf{x}')$, а правые части вычисляются на функциях, определенных в п. 2.1, и коэффициентах $\mathbf{v}_q^{(p)}(\mathbf{x}')$ с верхними индексами $p < k$. Решения $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', \zeta)$, $\mathbf{v}^{(s,p)}(\mathbf{x}', \zeta)$ рассмотренных в пп. 2.1, 2.2 задач сопряжения, подчиненные соотношениям (3.3), определяют асимптотическое представление статически допустимого поля смещений исходной задачи (1.1)—(1.5) вне малой окрестности края плиты Ω.

Невязки, вносимые коэффициентами $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{v}^{(s,p)}$ рядов (3.1) в условия (1.5) на боковой поверхности плиты, компенсируются при построении пограничного слоя W (x, h). Функция W (x, h) представляется в виде ряда по степеням параметра h (см. [7, 9]). Условия экспоненциального убывания коэффициентов разложения на каждом шаге по k позволяют найти значения функций $\mathbf{v}_j^{(k)}(\mathbf{x}')$ ($j = 1, 2, 3$) и нормальной производной функции $\mathbf{v}_3^{(k)}(\mathbf{x}')$ на $\partial\omega$.

4. Предельная краевая задача. Соотношения (3.3) и возникающие при построении пограничного слоя условия на $\partial\omega$ образуют краевые задачи для определения неизвестных функций $\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}')$ ($k = 0, 1, \ldots$) в области ω.

Операторные коэффициенты $L^{(p)}(\partial/\partial\mathbf{x}')$ в (3.3) не зависят от индекса k, поэтому функции $\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}')$ удовлетворяют в двумерной области ω одной и той же краевой задаче, которая и является предельной по отношению к исходной пространственной задаче (1.1)—(1.5). Операторы $L^{(p)}(\partial/\partial\mathbf{x}')$ ($p = 0, 1, \ldots$) отыскиваются при фиксированном s на каждом шаге p алгорифма п. 2.2. Левую часть соотношений (3.3) определяют следующие матрицы:

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &L^{(0)}(\partial/\partial\mathbf{x}') = L^{(1)}(\partial/\partial\mathbf{x}') = 0,\ L^{(2)}(\partial/\partial\mathbf{x}') = K_1{}^T G^{(1)} K_1(\partial/\partial\mathbf{x}')\\ &L^{(3)}(\partial/\partial\mathbf{x}') = -K_1{}^T G^{(2)} K_1 K_2(\partial/\partial\mathbf{x}') + K_2{}^T K_1{}^T G^{(2)} K_1(\partial/\partial\mathbf{x}') +\\ &\quad + K_1{}^T H_1 K_1(\partial/\partial\mathbf{x}')\\ &L^{(4)}(\partial/\partial\mathbf{x}') = -K_2{}^T K_1{}^T G^{(3)} K_1 K_2(\partial/\partial\mathbf{x}') + K_1{}^T H_2 K_2(\partial/\partial\mathbf{x}') \end{aligned}$$

Здесь $H_j(\partial/\partial\mathbf{x}')$ ($j = 1,2$) — некоторые дифференциальные выражения первого и, соответственно, второго порядков с коэффициентами, зависящими от высоты и упругих постоянных составляющих плиту слоев. Матрицы $G^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$(4.2)\qquad G^{(i)} = \| g_{st}^{(i)} \|_{s,t=1}^{3} = \sum_{r=1}^{n+1} \int_{l_{r-1}}^{l_r} t^{i-1} \mathrm{B}^r\, dt + (-1)^{i+1} \sum_{r=-m}^{-1} \int_{l_r}^{l_{r+1}} t^{i-1} \mathrm{B}^r\, dt$$

$$(B = A_1^{-1} = B_1 - B_2 B_3^{-1} B_2{}^T)$$

где **A** — матрица упругих податливостей, ассоциированная с матрицей **B** из (1.2).

Система уравнений (3.3) предельной задачи представляется в виде

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &L\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}') = \Psi^{(k)}(\mathbf{x}'),\quad \mathbf{x}' \in \omega\\ &\Psi^{(k)}(\mathbf{x}') = \Big(-\Phi^{(k)} - K_1{}^T \sum_{j=1}^{2} H_j K_j \mathbf{v}^{(k-1)}, \Phi_3^{(k+1)}\Big)(\mathbf{x}'),\qquad \Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \end{aligned}$$

Оператор $L(\partial/\partial\mathbf{x}')$ имеет вид симметричной матрицы, строками которой служат выражения

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} &(E_{11}, E_{12}, -S_1)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right),\quad (E_{12}, E_{22}, -S_2)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right),\\ &(-S_1, -S_2, D)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right) \end{aligned}$$

Из (4.1), (4.3) и определения п. 2 операторов $K_j(\partial/\partial\mathbf{x}')$ следует, что оператор $\mathrm{E}(\partial/\partial x') = \| E_{ij} \|_{i,j=1}^{2}(\partial/\partial\mathbf{x}')$ совпадает с единственным отличным от нуля минором (2×2)-матрицы $L^{(2)}$, а оператор $\mathrm{D}(\partial/\partial\mathbf{x}')$ — соответственно с элементом d_{33} матрицы $K_2{}^T K_1{}^T G^{(3)} K_1 K_2$. Вектор $(S_1, S_2, 0)^T$ является третьим столбцом матрицы $K_1{}^T G^{(2)} K_1 K_2$ или, что то же самое, получается транспонированием третьей строки матрицы $K_2{}^T K_1{}^T G^{(2)} K_1$.

Проведенные здесь построения показывают, что оператор $L(\partial/\partial\mathbf{x}')$ предельной краевой задачи самосопряжен и удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Граница области ω — гладкая, а системы $(\mathbf{v}^{(k)}, \partial v_3^{(k)}/\partial \mathbf{n})(\mathbf{x}')$, $\mathbf{x}' \in \partial\omega$ служат для (4.3) недостающими краевыми условиями. Поэтому задачи (4.3) для определения функций $\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}')$ однозначно разрешимы и, следовательно, описание алгорифма построения коэффициентов представления (3.1) завершено.

5. Эффективные характеристики жесткости слоистой плиты. Функции $v_j^{(0)}(\mathbf{x}')$ $(j = 1, 2, 3)$ определяют главный (по h) член асимптотического представления (3.1) точного решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, h)$ задачи (1.1)—(1.5), а выражения $\mathbf{v}(\mathbf{x}', h) = h^{-2}\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}') = h^{-2}(v_1, v_2)^{(0)}(\mathbf{x}')$ и $W(\mathbf{x}', h) = h^{-3}v_3^{(0)}(\mathbf{x}')$ — старшие в разложениях по h тангенциальных смещений и, соответственно, прогиба поверхности П приведения. Вектор-функция $(\mathbf{v}, w)(\mathbf{x}', h)$ удовлетворяет в ω системе уравнений (4.3). Выражения (4.4) после очевидных замен принимают вид

$$(5.1)\qquad (hE_{11}, hE_{12}, -h^2S_1)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right),\quad (hE_{12}, hE_{22}, -h^2S_2)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)$$
$$(-h^2S_1, -h^2S_2, h^3D)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)$$

что согласуется с результатами, полученными в [5] другим методом.

Рассмотрим матрицы $h^iG^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$, определяемые по формулам (4.2) и входящие в определение оператора предельной задачи (4.3). Их элементы являются коэффициентами дифференциальных выражений (5.1) и служат эффективными характеристиками жесткости плиты Ω на растяжение — сдвиг, изгиб — кручение, а также описывают перекрестные эффекты взаимодействия указанных состояний пакета. Матрицы $hG^{(1)}$, $h^2G^{(2)}$, $h^3G^{(3)}$ представляют собой аналоги используемых в классической теории статических моментов сечения пластины нулевого, первого и второго порядков соответственно.

Пусть d_r — высота, t_r — ордината срединной поверхности r-го слоя. Используя представления (4.2), находим

$$(5.2)\qquad hG^{(1)} = \sum_{r=-m}^{n} B^r d_r,\quad h^2G^{(2)} = \sum_{r=-m}^{n} B^r d_r t_r,$$
$$h^3G^{(3)} = \sum_{r=-m}^{r=n} B^r d_r\left(\frac{d_r^2}{12} + t_r^2\right)$$

Из (5.2), в частности, следует, что для плиты симметричного строения элементы S_j, $j = 1, 2$ оператора $L(\partial/\partial\mathbf{x}')$ равны нулю. В п. 6 будут рассмотрены примеры, показывающие, что аналогичные уравнения могут описывать напряженно-деформированное состояние плит несимметричного строения.

6. Примеры. 1°. Пусть материалы слоев пакета изотропны и ν_r, E_r — модуль Юнга и коэффициент Пуассона r-го слоя; $r \in [-m, n]$. Элементы $\|\beta_{ij}{}^r\|_{i,j=1}^3$ матриц B^r в (4.2) принимают вид

$$\beta_{11}{}^r = \beta_{22}{}^r = \beta^r = E_r(1 - \nu_r^2)^{-1},\quad \beta_{12}{}^r = \beta_{21}{}^r = \nu_r\beta^r$$
$$\beta_{33}{}^r = 2^{-1}(1 - \nu_r)\beta^r,\quad \beta_{23}{}^r = \beta_{32}{}^r = 0$$

Нейтральная поверхность пакета Ω отстоит от плоскости П приведения на расстояние

$$z_0 = \Sigma\beta^r d_r t_r (\Sigma\beta^r d_r)^{-1}$$

Здесь и далее суммирование ведется по r и s от $-m$ до n. Переход к ней в (3.1) осуществляется перенормировкой коэффициентов $\mathbf{v}^{(k,p)}(\mathbf{x}', \xi; r)$ условиями

$$(6.1)\qquad \mathbf{v}^{(k,p)}(\mathbf{x}', h^{-1}z_0; r) = 0;\quad k = 0, 1, \ldots;\quad p = 1, 2, \ldots$$

Оператор $L(d/d\mathbf{x}')$ принимает вид блочной матрицы: тангенциальные смещения $\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}')$ нейтральной поверхности удовлетворяют системе уравнений обобщенного плоского напряженного состояния, а прогиб $w^{(k)}(\mathbf{x}')$ — уравнению Софи Жермен. Из формул (5.1) с учетом (6.1) непосредственно выводятся представления для эффективных упругих характеристик плиты

$$\nu_* = \Sigma\beta^r\nu_r d_r(\Sigma\beta^r d_r)^{-1}$$

$$E_* = \Sigma\beta^r E_r^{-1}(1-\nu_r)\,d_r(\Sigma\beta^r d_r)^{-1}\Sigma\beta^r(1+\nu_r)\,dr$$

Эффективная цилиндрическая жесткость плиты Ω

$$D_* = \frac{1}{12}\Sigma\beta^r d_r^3 + \Sigma\beta^r\beta^s d_r d_s t_r(t_r - t_s)(\Sigma\beta^r d_r)^{-1}$$

складывается из жесткостей $D^r = \beta^r d_r^3/12$ каждого слоя и присоединенной жесткости пакета, обусловленной взаимодействием слоев. Для частного случая плиты симметричного строения $(d_r = d_{-r},\ \beta^r = \beta^{-r},\ t_r = t_{-r})$ приведенные формулы совпадают с результатами, полученными в [13]. Сравнение D_* с цилиндрической жесткостью пакета, образованного чередующимися мягкими и жесткими слоями [14], показывает, что соответствующие присоединенные жесткости могут, в зависимости от соотношения упругих и геометрических параметров слоев, существенно различаться.

2°. Пусть теперь пакет состоит из ортотропных слоев с одинаковыми модулями E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, G упругости; одна из главных осей упругости каждого слоя совпадает по направлению с осью Ox_3, а две другие образуют с осями Ox_1 и Ox_2 углы γ_r, $r \in [-m, n]$. Для исследования эффективных упругих свойств пакета естественно ввести систему координат, повернутую в плоскости x_1Ox_2 на некоторый угол $\varphi > 0$.

Матрицы B^r рассчитываются по формулам преобразования упругих постоянных при повороте координатных осей [13]. В данном случае, в отличие от примера 1°, элементы $\beta_{13}{}^r$ и $\beta_{23}{}^r$ матриц $\mathbf{B}^r$ не равны нулю и в указанной выше системе координат имеют вид

$$\beta_{13}{}^r = \sin 2(\gamma_r - \varphi)\left[\left(E_2 + \frac{E_1\nu_{21}}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})}\right)\cos 2(\gamma_r - \varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})}(E_2\sin^2(\gamma_r - \varphi) - E_1\cos^2(\gamma_r - \varphi))\right]$$
$$\beta_{23}{}^r = \sin 2(\gamma_r - \varphi)\left[-\left(E_1 + \frac{E_2\nu_{12}}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})}\right)\cos 2(\gamma_r - \varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})}(E_2\cos^2(\gamma_r - \varphi) - E_1\sin^2(\gamma_r - \varphi))\right]$$

Нейтральная поверхность плиты совпадает со срединной плоскостью пакета. Оператор $L(d/dx')$ здесь, как и в примере 1°, имеет вид блочной матрицы.

Приведенные выше выражения и формулы (5.1) показывают, что тангенциальные смещения нейтральной поверхности пакета удовлетворяют уравнениям обобщенного плоского напряженного состояния ортотропного тела при некотором фиксированном значении φ_* угла φ, если выполнено условие

$$\Sigma d_r \sin 4\gamma_r \Sigma d_r \cos(2\gamma_r - \pi/4)\,\Sigma d_r \sin(2\gamma_r - \pi/4) + \tag{6.2}$$
$$+ \Sigma d_r \sin 2\gamma_r \Sigma d_r \cos 2\gamma_r \Sigma d_r \cos 4\gamma_r = 0$$

Пусть соотношения (6.2) выполнены, тогда искомый угол — решение уравнения

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi_* = \Sigma d_r \sin 2\gamma_r(\Sigma d_r \cos 2\gamma_r)^{-1}$$

Проводя аналогично расчет коэффициентов дифференциального оператора $D(d/dx')$ в (5.1), можно показать, что прогиб нейтральной поверхности удовлетворяет уравнению изгиба ортотропной плиты, если справедливо равенство (6.2), в котором вместо d_r фигурирует выражение $D_r = d_r^3/12 + d_r t_r(t_r - l/2)$, где l — высота пакета. Главные оси упругости слоистой плиты при этом оказываются повернутыми на угол

$$\varphi_{**} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,[\Sigma D_r \sin 2\gamma_r(\Sigma D_r \cos 2\gamma_r)^{-1}] \tag{6.3}$$

Из формул (4.2), (4.3) следует, что если главные оси упругости (одноименные или разноименные) слоев совпадают, то пакет несимметричного строения ведет себя подобно пластине, изготовленной из однородного ортотропного материала.

Эффективные упругие постоянные E_1^*, E_2^*, ν_{12}^*, ν_{21}^*, G^* рассчитываются так же, как и в примере 1°. Для частного случая плиты регулярного строения ($d_r = d$, $\gamma_r = \pi r n^{-1}$, $r \in [-n, n]$) напряженно-деформированное состояние характеризуется отмеченной в [12] изотропией упругих свойств при растяжении или сдвиге. Из (5.2) непосредственно вытекает, что при изгибе функция, описывающая прогиб нейтральной поверхности пакета указанной структуры, удовлетворяет уравнению изгиба ортотропной плиты, главные оси упругости которой составляют с осями Ox_1 и Ox_2 координат углы, определяемые формулой (6.3).

Авторы благодарят Н. Ф. Морозова и С. А. Назарова за ценные консультации и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. ЛГУ. 1982. № 7. Вып. 2. С. 65—68.
2. Fridrichs K. O., Dressler R. F. A boundary-layer for elastic plates // Comm. Pure App. Math. 1961. V. 14. No. 1. P. 1—34.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668—686.
4. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057—1074.
5. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях теории изгиба тонких плит сложной структуры // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 914—924.
6. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ. 1978. 224 с.
7. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ. 1983. 117 с.
8. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
9. *Гусейн-Заде М. И.* К построению теории изгиба слоистых пластинок // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 232—243.
10. *Агаловян Л. А.* К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера // XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин: Таллин. политехн. ин-т. 1983. Ч. I. С. 13—18.
11. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических задач теории упругости для слоистых пластинок // XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин: Таллин. политехн. ин-т. 1983. Ч. II. С. 41—46.
12. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир. 1982. 334 с.
13. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 364 с.
14. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.II.1987