

УДК 624.131 : 534

**НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ
В НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

Крутин В. Н., Марков М. Г., Юматов А. Ю.

В рамках линейной динамики насыщенных пористых сред решается задача о распространении упругих гармонических волн в окрестности заполненной идеальной жидкостью цилиндрической полости, расположенной в пористой среде. Получены зависимости кинематических и динамических параметров нормальных волн от упругих свойств и проницаемости пород. Показано, что проницаемость существенно влияет на затухание нормальных волн в полости.

Решение задачи о распространении упругих волн в цилиндрическом волноводе с жидкостью, окруженном проницаемой средой, представляет интерес в связи с развитием акустического метода исследования скважин, в акустических измерениях звукопоглощающих свойств пористых материалов и т. п.

Пусть насыщенную пористую среду пересекает бесконечная цилиндрическая полость радиуса a , заполненная идеальной сжимаемой жидкостью. Совместим ось z цилиндрической системы координат r, θ, z с осью полости. В начале координат помещен точечный источник гармонических колебаний объемной скорости.

Распространение упругих волн в жидкости, заполняющей полость, описывается уравнением

$$(1) \quad (\Delta + k_0^2)L = \frac{4\pi D}{i\omega} \delta(r, \theta, z); \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_f \beta}}$$

где $W = \nabla L$ — вектор смещения, k_0 — волновое число продольной волны в жидкости, c — скорость звука, β, ρ_f — сжимаемость и плотность жидкости, ω — круговая частота, D — объемная скорость источника.

Уравнения малых гармонических (по закону $e^{-i\omega t}$) колебаний однородной изотропной насыщенной пористой среды в пренебрежении эффектами межфазного теплообмена и термоупругости имеют вид [1—3]

$$(2) \quad \begin{aligned} \omega^2 \rho_{11} U + \omega^2 \rho_{12} V &= i\omega b (V - U) - N \Delta U - \nabla [(A + N) \nabla U + Q \nabla V] \\ \omega^2 \rho_{12} U + \omega^2 \rho_{22} V &= i\omega b (U - V) - \nabla (Q \nabla U + R \nabla V) \\ b &= \eta \Phi^2 / (KF(\omega)) \end{aligned}$$

Здесь U, V — векторы смещений твердой фазы и жидкости в порах, A, N, Q, R — упругие постоянные, ρ_{11}, ρ_{22} — коэффициенты динамической плотности, $\rho_{12} < 0$ — присоединенная плотность жидкости, Φ — объемная пористость, K — коэффициент проницаемости, η — динамическая вязкость жидкости; функция $F(\omega)$ описывает отклонение потока в порах от пуазейлевского [2].

Представим смещения скелета и жидкости в порах, а также смещение в заполняющей полость жидкости в виде интегралов Фурье по z -компоненте волнового вектора

$$(3) \quad (U, V, W) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (u, v, w) e^{i\xi z/a}$$

множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее всюду опускаем.

Введем потенциалы продольных волн Λ_i и поперечной волны Ψ соотношениями

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{U} &= \nabla (\Lambda_1 + \Lambda_2) + \nabla \times \Psi \\ \mathbf{V} &= \nabla (m_1 \Lambda_1 + m_2 \Lambda_2) + \nabla \times (\Psi m_3) \\ m_j &= \frac{\gamma_{12} - \xi_j q_{12}}{\xi_j q_{22} - \gamma_{12}}, \quad k_j^2 = \xi_j^2 \frac{H}{\rho \omega} \quad (j = 1, 2), \quad m_3 = -\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \\ \gamma_{11} &= \frac{\rho_{11} + ib/\omega}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12} - ib/\omega}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22} + ib/\omega}{\rho} \\ q_{11} &= \frac{A + 2N}{H}, \quad q_{12} = \frac{Q}{H}, \quad q_{22} = \frac{R}{H} \\ \rho &= \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}, \quad H = A + 2N + 2Q + R \end{aligned}$$

(k_j — волновые числа продольных волн первого и второго рода ($j = 1, 2$) и поперечных волн ($j = 3$) [2]). Тогда уравнения (2) сводятся к системе векторного и скалярных уравнений Гельмгольца [4]

$$(5) \quad \Delta (\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi) + (k_1 \Lambda_1, k_2 \Lambda_2, k_3 \Psi) = 0$$

Решения этой системы и уравнения (1), удовлетворяющие условиям излучения и ограниченности на оси полости, имеют вид

$$(6) \quad \begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left[X_0 J_0 \left(l \frac{r}{a} \right) - \frac{D}{4\omega} H_0^{(1)} \left(l \frac{r}{a} \right) \right] e^{i\zeta z/a} \\ \Lambda_j &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta X_j H_0^{(1)} \left(p_j \frac{r}{a} \right) e^{i\zeta z/a} \\ \Psi &= e_\theta \Psi = \frac{e_\theta}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta X_3 H_1^{(1)} \left(s \frac{r}{a} \right) e^{i\zeta z/a} \\ p_j &= \sqrt{k_j^2 a^2 - \zeta^2}, \quad s = \sqrt{k_3^2 a^2 - \zeta^2}, \quad l = \sqrt{k_0^2 a^2 - \zeta^2} \end{aligned}$$

$H_n^{(1)}$, J_n — функция Ганкеля первого рода и Бесселя [5]; X_n определяются следующими условиями на границе полости:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Gamma_{rr} &= -p_L, \quad \Gamma_{rz} = 0, \quad p_L = p_0 \\ (1 - \Phi) U_r + \Phi V_r &= W_r \\ (\Gamma_{ij} &= A \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{U} + 2N (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) + \\ &+ Q \operatorname{div} (\mathbf{U} + \mathbf{V}) \delta_{ij} + \delta_{ij} R \operatorname{div} \mathbf{V}; \\ p_0 &= - (Q \operatorname{div} \mathbf{U} + R \operatorname{div} \mathbf{V}) / \Phi \end{aligned}$$

Здесь p_L — давление жидкости, заполняющей полость, Γ_{ij} — тензор полных напряжений в пористой среде, p_0 — давление жидкости в порах.

Условия (7) выражают соответственно непрерывность полных нормальных напряжений, отсутствие тангенциальных напряжений, равенство давлений жидкости в полости и порах, непрерывность нормальной компоненты скорости на границе полости.

Подстановка в (7) выражений для потенциалов продольных и поперечных волн (6) приводит к системе четырех линейных уравнений для определения постоянных X_n

$$(8) \quad \begin{aligned} \kappa^2 \beta^{-1} X_0 J_0(l) - \sum_{j=1}^2 X_j [(A + Q(m_j + 1) + R m_j)(k_j^2 a^2 + \\ + 2N p_j) H_0^{(1)}(p_j) - 2N p_j H_1^{(1)}(p_j)] - \\ - 2N i \zeta X_3 [s H_0^{(1)}(s) - H_1^{(1)}(s)] = - \kappa^2 \beta^{-1} D H_0^{(1)}(l) \end{aligned}$$

Возникновение фильтрационных потоков жидкости на границе полости приводит к заметному уменьшению скорости ВЛС на границе с пористым массивом и появлению затухания. На фиг. 1 представлены зависимости логарифмического декремента затухания θ ВЛС от частоты (кривые 2, 3 соответствуют $K = 1 \text{ мкм}^2$ и $K = 0,1 \text{ мкм}^2$). Здесь же представлена частотная зависимость нормированного коэффициента возбуждения A ВЛС, равного абсолютной величине вычета подынтегральной функции в выражении (6) для потенциала L . Сплошная кривая 4 соответствует профилю проницаемой среде, штриховая кривая 4 — непроницаемой. Амплитуда коэффициента возбуждения монотонно растет с уменьшением частоты и слабо зависит от проницаемости.

Важная особенность ВЛС заключается в том, что для однофазной, так и для насыщенной пористой среды фазовая скорость ВЛС возрастает с частотой. Вдоль границы с пористым массивом (сплошная кривая 1) и однофазным упругим массивом (штриховая кривая 1). Расчеты показаны на фиг. 1 приведены частотные зависимости фазовой скорости ВЛС

в упругих постоянных A, N, Q, R выполнен по известной методике [12]. На фиг. 1 приведены частотные зависимости фазовой скорости ВЛС в скелетах скелета $v_p = 6800 \text{ м/с}$, $v_p/v_s = 1,8$; $a = 0,1 \text{ м}$; расчет v_s скелета $\rho_s = 2870 \text{ кг/м}^3$, при скоростях продольной V_p и поперечной (если это не оговорено особо, $\Phi = 0,2$, $K = 1 \text{ мкм}^2$) с плотностью вещества многих переменных [11]. Расчеты были выполнены для пористой среды осуществлялось при помощи метода Пауэлла поиска минимума функции

Решение дисперсионного уравнения $\Delta = 0$ в комплексной области даны в [7, 8].

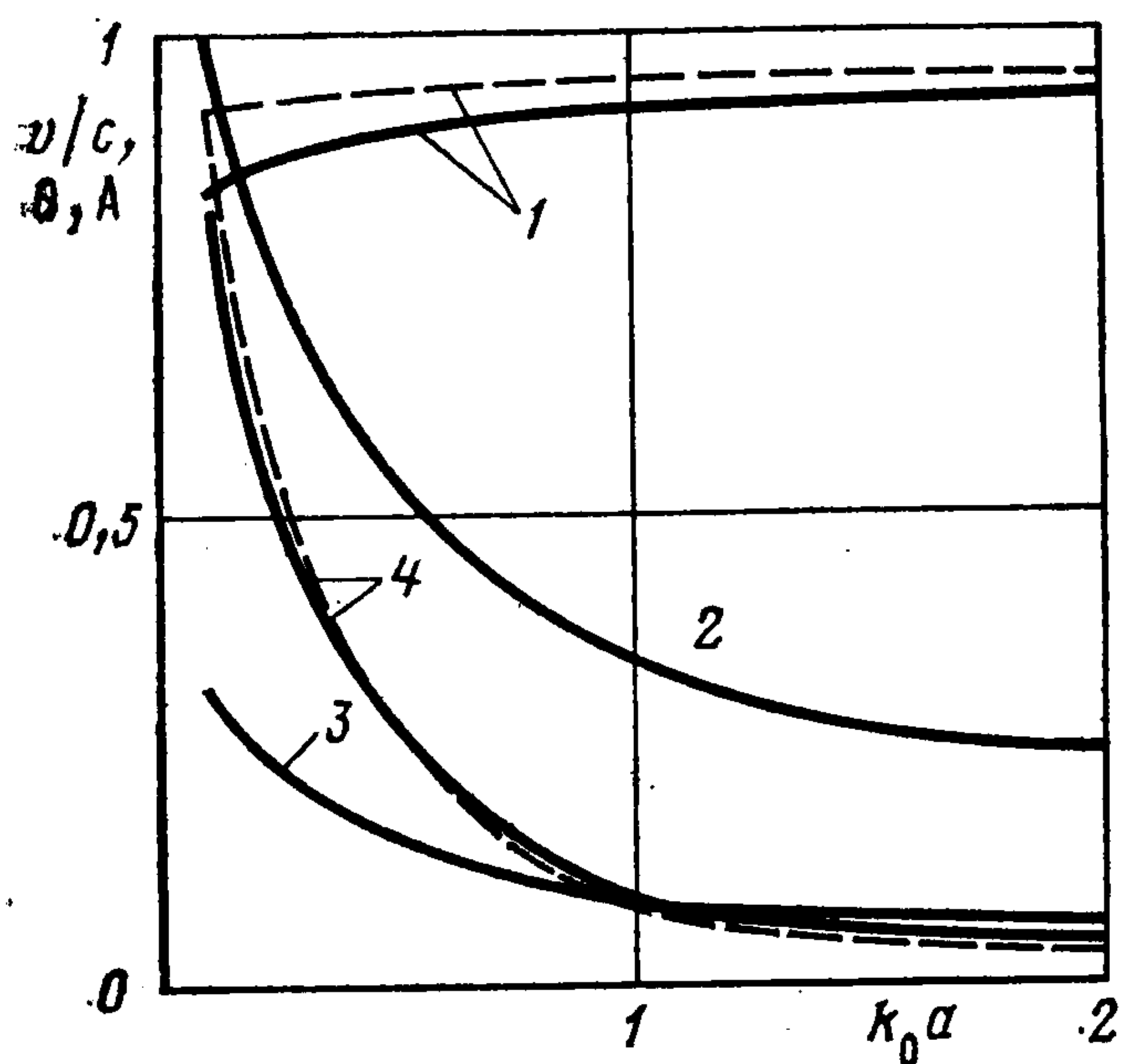
ВЛС для полости в идеальном упругом однофазной среде были подробно исследованы в [7, 8]. В амплитуда смещения в ней спадает при удалении от границы раздела. Свойства поперечной волны в массиве и продольной волны в заполняющей полости жидкости, [11] и волнами Стоунли [6]. Фазовая и групповая скорости ВЛС ниже, чем скорости тип низкочастотных волн называли также трубными волнами, гидроволнами [10, и подобна волнам, рассмотренным Жуковским и Ламбом [9, 10]. В литературе этот лость жидкости превышает радиус полости, ВЛС становится практически плоской сред. В области низких частот, когда глубина проникновения в заполняющей полости волне Стоунли, распространяющейся вдоль плоской границы раздела двух жидкостей, соответствующий этой волне. На высоких частотах ВЛС ведет себя по-разному. На предельно низких частотах дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ имеет единственное решение с абсолютно жесткими стенками, возбуждается при сколь угодно малых частотах. ВЛС, так же как и нулевая нормальная волна, распространяющаяся в волно-

[6—8] — волну Ламба — Стоунли (ВЛС) и псевдорелевские волны. Рассматриваемый источник возбуждает два типа нормальных волн (сти).

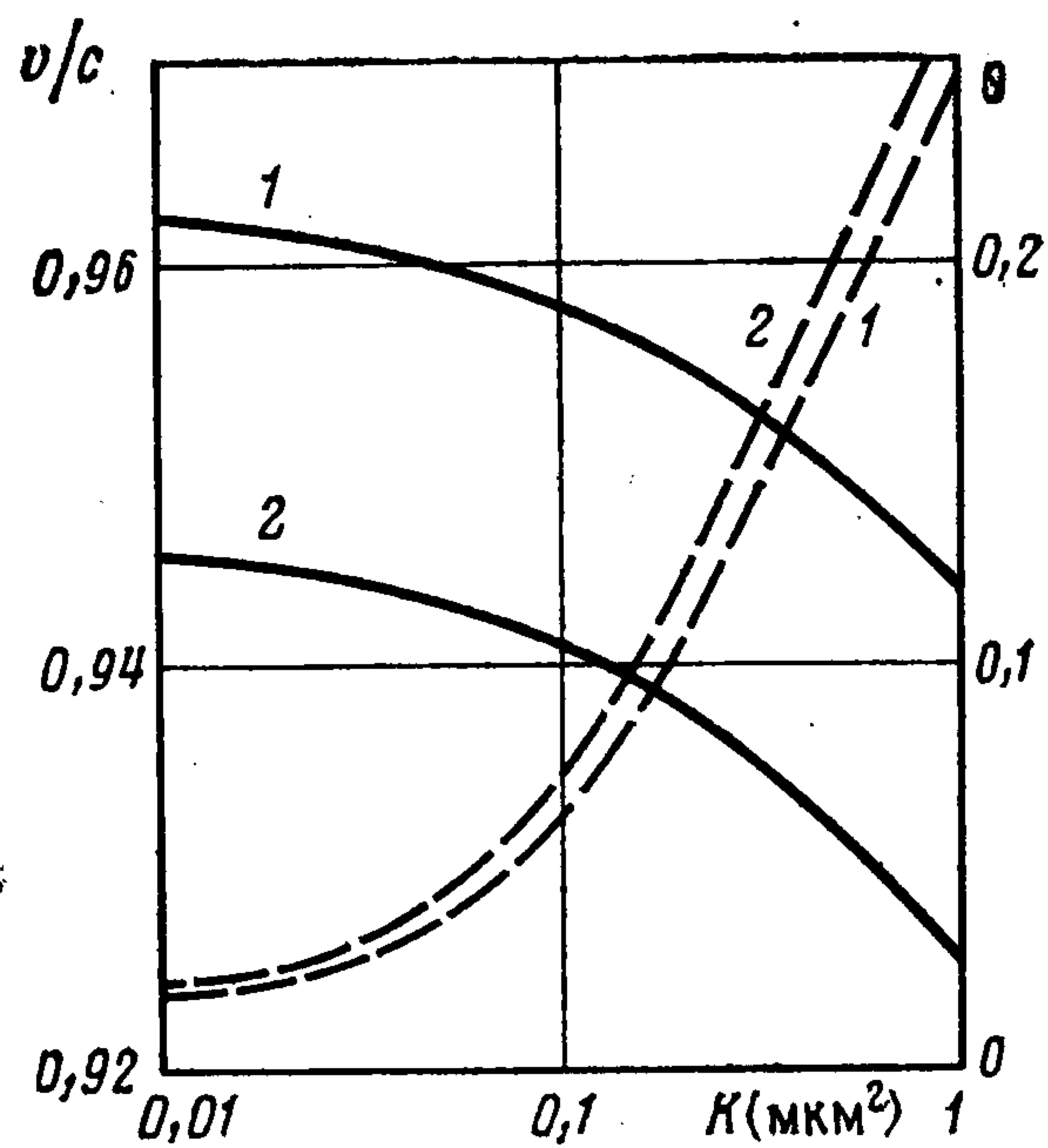
определять систему (8). Это уравнение определяет зависимость скорости и затухания нормальных волн от частоты (дисперсионные зависимости)

Нормальные волны соответствуют корням уравнения $\Delta = 0$, где $\Delta =$

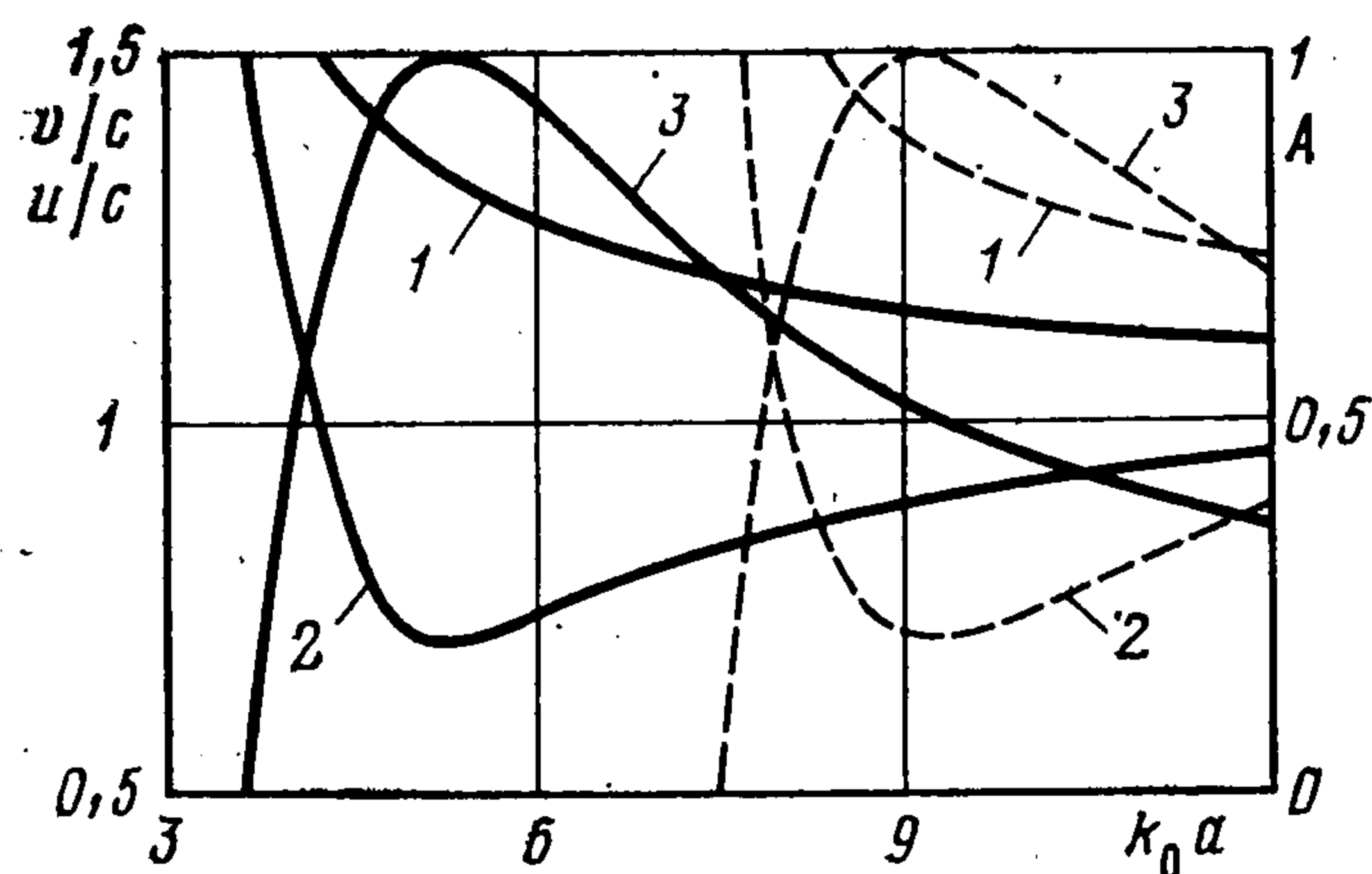
$$\begin{aligned} & \sum_2^{j=1} X_j^2 \zeta_j^2 d_j^2 H_{(1)}^1(s) + X_3 (k_3^2 a^2 - 2\zeta_2^2) H_{(1)}^1(s) = 0 \\ & \Phi \kappa_2 \beta_{-1} X_0 J_0(l) - \sum_2^{j=1} X_j (\rho + R m_j) k_j^2 a^2 H_{(1)}^0(d_j) = \\ & = - \Phi D \kappa_2 \beta_{-1} H_{(1)}^0(l) \\ & X_0 J_1(l) - \sum_2^{j=1} X_j (1 - \Phi + m_j \Phi) d_j^2 H_{(1)}^1(d_j) + \\ & + X_3 (1 - \Phi + m_3 \Phi) \zeta_2 H_{(1)}^1(s) = - D l H_{(1)}^1(l); \quad \kappa = k_0 a \end{aligned}$$



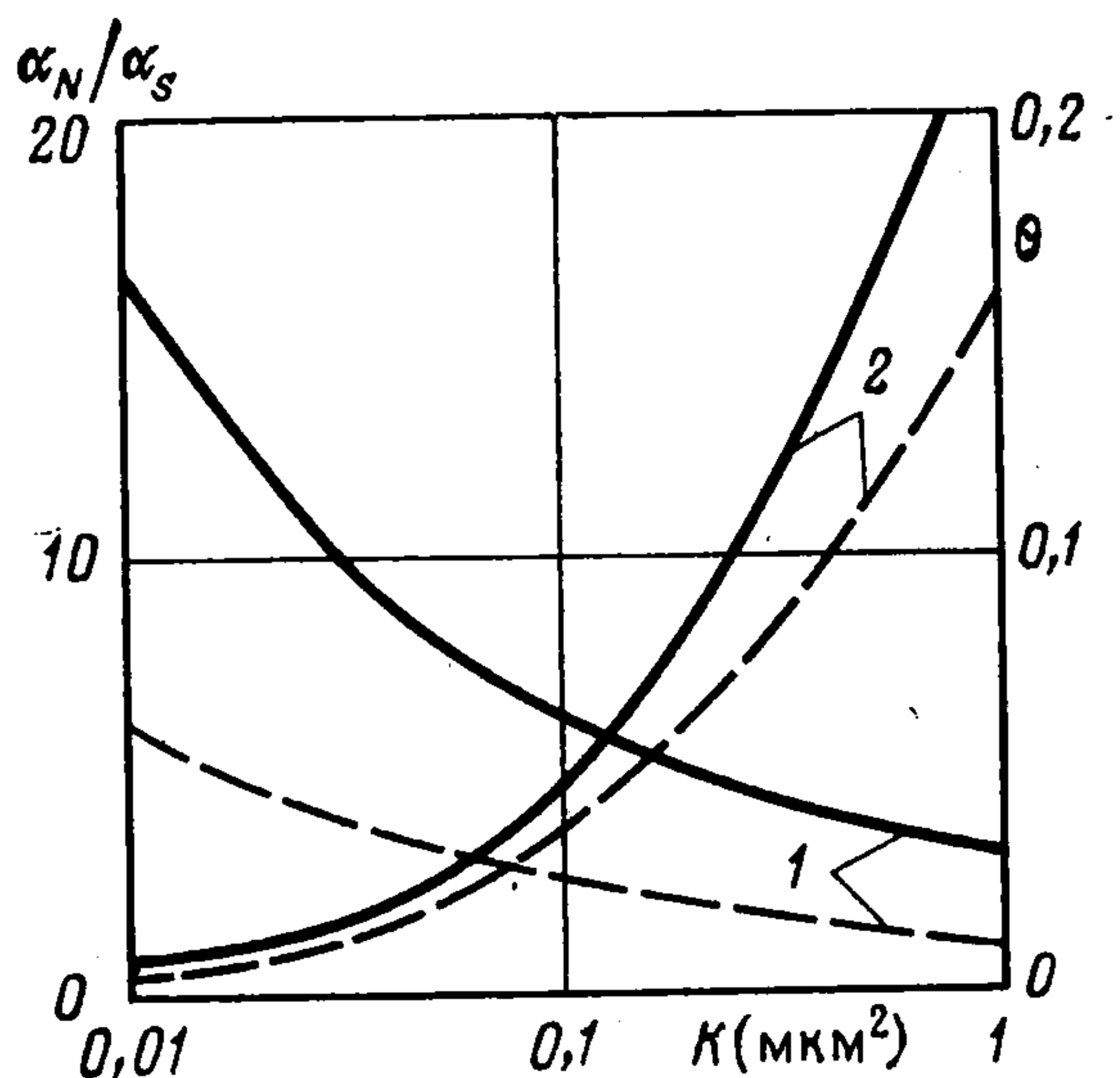
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 представлена зависимость скорости (сплошные кривые 1, 2) и логарифмического декремента затухания (штриховые кривые 1, 2) от коэффициента проницаемости K в диапазоне его изменения, характерном для горных пород. Кривые 1, 2 соответствуют $\Phi = 0,1$ и $\Phi = 0,2$. С увеличением проницаемости возрастает интенсивность фильтрационных перетоков жидкости в поры, что приводит к последующей вязкой диссипации энергии волны за счет трения о стенки поровых каналов и соответственно к увеличению затухания и уменьшению скорости ВЛС. Снижение скорости с ростом пористости обусловлено в основном уменьшением модуля сдвига породы.

Для получения явного выражения для волнового числа k ВЛС в предельном случае низких частот проще всего воспользоваться теорией волн в узких трубах [10], изложенной в [13]. Волновое число нулевой нормальной волны в трубе с неабсолютно жесткими стенками в области низких частот ($k_0 a \ll 1$) определяется выражением

$$(9) \quad k^2 = k_0^2 \left(1 - \frac{2}{ik_0 a y} \right), \quad y = \frac{p}{w \rho_f c}$$

где y — удельный акустический импеданс границы, w — нормальная компонента скорости жидкости. Расчеты для границы с пористой проницаемой средой в длинноволновом приближении ($|k_j a| \ll 1$) приводят к выражению

$$(10) \quad y = \frac{i\beta (Q + m_2 R) (k_2 a)^2}{\Phi^2 (k_0 a) (m_2 - 1)} \ln \frac{\Gamma k_2 a}{2}$$

$$k_2 = (1 + i) \frac{2\pi}{V_0} \left(\frac{\eta \Phi^2 \omega \delta}{2(\rho_{12} + \rho_{22}) K} \right)^{1/2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{H}{\rho}}, \quad m_2 = \frac{q_{12} + \delta}{\delta - q_{12}}, \quad \delta = q_{11}q_{22} - q_{12}^2, \quad \Gamma = -ie^C$$

(C — постоянная Эйлера). Из (9) и (10) следует, что в отличие от случая непроницаемой границы скорость ВЛС с уменьшением частоты стремится к нулю. Это явление имеет простое объяснение: с уменьшением частоты все большая масса жидкости в поровых каналах вовлекается в колебания.

Дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ на достаточно высоких частотах имеет корни, соответствующие нулевой (ВЛС), первой, второй и т. д. нормальным волнам. Все эти волны, кроме ВЛС, имеют критические частоты. В литературе, посвященной нормальным волнам в цилиндрической полости, окруженной непроницаемой упругой средой, они называются отраженными коническими [6], водными или просто нормальными [7], а также псевдорелеевскими волнами [8].

Фазовая скорость нормальных волн v удовлетворяет неравенству [7, 8]: $c < v < v_s$, где v_s — скорость поперечной волны. При частоте, близкой к критической, фазовая v и групповая u скорости нормальных волн близки к скорости поперечной волны. С увеличением частоты эти скорости стремятся к скорости продольной волны в жидкости, заполняющей полость.

На фиг. 3 приведены дисперсионные кривые для первой (сплошные линии) и второй (штриховые) нормальных волн. С увеличением частоты фазовые скорости нормальных волн (кривые 1) монотонно уменьшаются, а групповые скорости (кривые 2) зависят от частоты немонотонно и имеют минимум. Наличие минимума у кривой для групповой скорости, соответствующего максимуму коэффициента возбуждения (кривые 3), свидетельствует о существовании фазы Эйри [7, 8], в которой групповая скорость нормальной волны ниже скорости продольной волны в жидкости.

В важном в практическом отношении случае, когда выполнены одновременно неравенства $|k_2 a| \gg 1$, $\omega/\omega_0 \ll 1$, где $\omega_0 = b/\rho_f$ [2], в нулевом приближении дисперсионное уравнение совпадает с аналогичным уравнением для нормальных волн на границе с идеально упругой средой.

Действительно, при замене в (8) функций Ганкеля $H_n^{(1)}(p_2)$ их асимптотическим выражением при $|p_2| \gg 1$ [5] столбец определителя Δ системы уравнений (8), содержащий функции от p_2 , приобретает вид

$$\text{col} [2N(\zeta^2 - ip_2), 2\zeta p_2, -(Q + Rm_2)k_2^2 a^2, (1 - \Phi + m_2 \Phi)p_2] \sqrt{2/(\pi p_2)} \exp[i(p_2 - \pi/4)]$$

Если сохранить в дисперсионном уравнении члены только старшего порядка по $k_2 a$ с учетом того, что при $\omega/\omega_0 \ll 1$

$$k_1 \rightarrow \omega \sqrt{H/\rho}, \quad m_1 \rightarrow 1, \quad k_3 \rightarrow \omega \sqrt{N/\rho}, \quad m_3 \rightarrow 1$$

то оно совпадает с дисперсионным уравнением для полости, расположенной в однофазной упругой среде со следующими динамическими параметрами: $\rho_0 = \rho$, $\lambda = H - 2N$, $\mu = N$. Здесь ρ_0 — плотность, λ , μ — параметры Ламе. Аналогичный результат был получен [14] при исследовании распространения релеевской волны вдоль границы насыщенного пористого полупространства с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений.

Как и для ВЛС, коэффициент возбуждения нормальных волн при заданной частоте слабо зависит от проницаемости и близок по величине к коэффициенту возбуждения этих волн в полости, расположенной в однофазной упругой среде. В то же время затухание нормальных волн силь-

но зависит от проницаемости среды. На фиг. 4 представлены зависимости логарифмического декремента затухания θ (кривые 1) и отношения α_N/α_s (кривые 2), где α_N , α_s — соответственно коэффициенты затухания нормальной и поперечной волн, для первой нормальной волны при $k_0 a = 5$ (сплошные кривые) и для второй нормальной волны при $k_0 a = 10$ (штриховые). Коэффициент затухания нормальных волн при наличии проницаемой границы существенно превышает коэффициент затухания поперечной волны.

Влияние перетоков через границу раздела сред на распространение нормальных волн открывает возможность экспериментального определения фильтрационных характеристик среды по параметрам этих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т. 8. № 4. С. 133—150.
2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids. 2 // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. No. 2. P. 179—191.
3. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра. 1970. 335 с.
4. Крутин В. Н., Марков М. Г., Юматов А. Ю. Рассеяние продольной волны на сферической полости с жидкостью в упругой пористой насыщенной среде // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 333—336.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука. 1979. 830 с.
6. Biot M. A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore, containing a fluid // J. Appl. Phys. 1952. V. 23. No. 9. P. 997—1005.
7. Крауклис П. В., Крауклис Л. А. Волновое поле точечного источника в скважине // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 16. Л.: Наука. 1976. С. 41—53.
8. Cheng C. H., Toksoz M. N. Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustic logs // Geophysics. 1981. V. 46. No. 7. P. 1042—1053.
9. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Собр. соч. Т. 3. М.; Л.: Гостехиздат: 1949. С. 5—95.
10. Lamb H. On the velocity of sound in a tube as affected by the elasticity at the walls // Mem. Proc. Manchester Lt and Phys. Soc. 1898. V. 42. No. 9. 16p.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир. 1975, 534 с.
12. Марков М. Г., Юматов А. Ю. О взаимодействии плоских упругих волн с трещиной, заполненной жидкостью, в пористой среде // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 8. С. 116—119.
13. Лайтхил Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир. 1981. 598 с.
14. Foda M. A., Mei C. C. A boundary layer theory for Rayleigh waves in a porous fluid-filled half space // Soil Dyn. and Earth. Eng. 1983. V. 2. No. 2. P. 62—65.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.1987