

УДК 532.526

## УСТРАНЕНИЕ КРОМОЧНОГО ОТРЫВА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПУЛЬСАЦИЙ ПОТОКА

Тимошин С. Н.

Исследуется возможность устранения отрыва пограничного слоя (ПС) на передней кромке тонкого профиля при помощи высокочастотных гармонических пульсаций скорости набегающего потока около некоторого среднего значения. Период пульсаций считается малым, так что характерное число Струхаля оказывается гораздо больше единицы. В этом случае ПС разделяется на тонкий нестационарный слой Стокса и внешнюю часть с обычной толщиной, обратно пропорциональной корню из числа Рейнольдса [1]. Нелинейность уравнений движения ведет к тому, что на внешней границе слоя Стокса индуцируется слабое стационарное движение, которое для внешней части ПС проявляется как эффект проскальзывания на стенке. Скорость проскальзывания пропорциональна градиенту давления в ПС без пульсаций, т. е. направлена вниз по потоку на участке неблагоприятного градиента давления. Следовательно, можно ожидать, что присутствие высокочастотных пульсаций в потоке расширяет диапазон изменения углов атаки профиля, в котором обтекание передней кромки происходит без отрыва ПС. Выводится неравенство, позволяющее оценить этот диапазон.

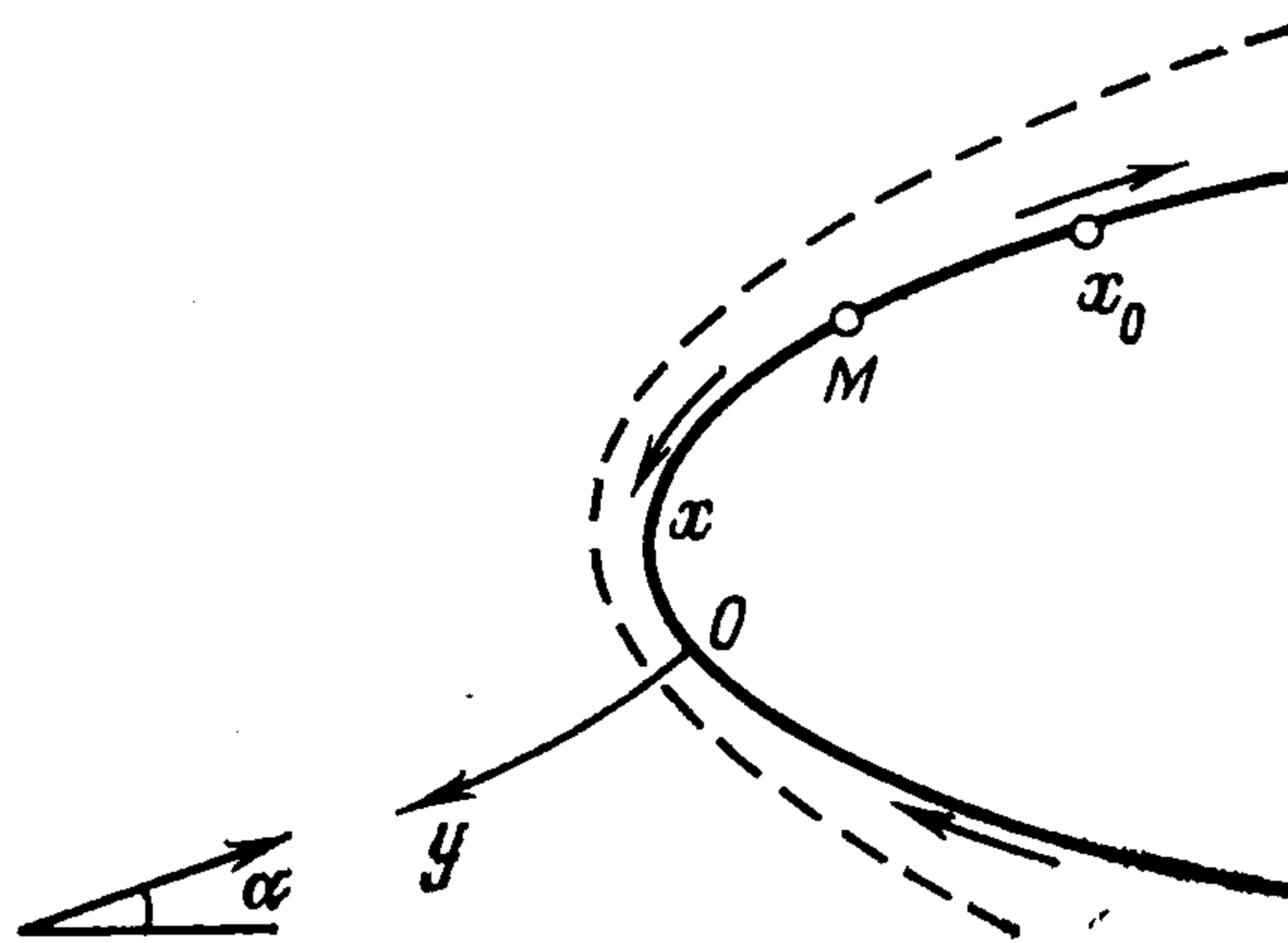
**1. Постановка задачи. Уравнения для осредненного течения.** Рассмотрим обтекание тонкого профиля с параболической передней кромкой однородным потоком несжимаемой жидкости со скоростью  $U_\infty (1 + \sigma \cos t)$ , где  $Tt/(2\pi)$  — время,  $T$  — период,  $\sigma$  — амплитуда пульсаций скорости. Предполагая, что радиус кривизны передней кромки  $L$  мал по сравнению с хордой профиля, ограничимся анализом течения в окрестности передней кромки. При больших числах Рейнольдса  $Re = U_\infty L \nu^{-1}$  вблизи твердой поверхности формируется тонкий пограничный слой. В криволинейной ортогональной системе координат  $Lx, Re^{-1/2}Ly$ , связанной с обтекаемой поверхностью (фигура), движение жидкости в ПС описывается традиционной краевой задачей вида

$$(1.1) \quad S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + S^2 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u = (1 + \sigma \cos t) f(x; k)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0); \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow u \quad (y \rightarrow +\infty)$$

Здесь  $Re^{-1/2} LU_\infty \psi$  — функция тока,  $S^2 = 2\pi LU_\infty^{-1} T^{-1}$  — число Струхаля. Функция  $f(x; k)$  задает распределение скорости на внешней границе ПС в потоке без пульсаций. Скорость на внешней границе зависит как от продольной координаты  $x$ , так и от безразмерного параметра  $k$ , характеризующего степень несимметрии течения и связанного с углом атаки профиля  $\alpha$  линейным соотношением (для симметричного профиля с хордой  $b$  имеем  $k = \alpha (2b/L)^{1/2}$ ). Согласно [2],  $f(x, k) = (z + k)(z^2 + 1)^{-1/2}$ , где  $z$  — расстояние от оси параболы до точки на поверхности с координатой  $x$ .



Если  $\sigma = 0$ , то регулярное решение задачи (1.1) существует при  $0 \leq k < k_0 = 1,1556$  [3]. При  $k = k_0$  решение имеет продолжимую особенность в сечении  $x = x_0 = 8,37$ ; если  $k > k_0$ , то решение содержит особенность Гольдштейна [4]. Пусть амплитуда пульсаций отлична от нуля и, кроме того, число Струхала велико. Предполагается, что периодическое по времени решение существует. В целях сокращения объема выкладок рассмотрим характерный предел сильных пульсаций, который имеет место при  $\sigma = S\sigma_1$ ,  $\sigma_1 = O(1)$ ,  $S \gg 1$ . В этом случае решение задачи (1.1) в основной части ПС ( $y \sim 1$ ) можно представить в виде

$$(1.2) \quad \psi = S\sigma_1 y f \cos t + \psi_1 + S^{-1}\psi_2 + S^{-2}\psi_3 + O(S^{-3})$$

Подстановка (1.2) в уравнение (1.1) показывает, что общее решение для второго члена разложения может быть представлено в виде  $\psi_1 = \psi_s(x, y) + \psi_{11}(x, t)$ . Функция  $\psi_{11}$  характеризует вытесняющее действие слоя Стокса и будет найдена из условий сращивания с решением в области  $y \sim S^{-1}$ . Для определения стационарной составляющей решения  $\psi_s$  необходимо рассмотреть следующие члены разложения (1.2). Общее решение уравнения для третьего члена имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \psi_{20}(x, y) + \psi_{21}(x, t) + \sin t \psi_{22}(x, y) \\ \psi_{22} &= \sigma_1 \left( 2yff' - f \frac{\partial \psi_s}{\partial x} - 2f'\psi_s + yf' \frac{\partial \psi_s}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем штрихом отмечена производная от функции по своему аргументу. Функции  $\psi_{20}$  и  $\psi_{21}$  на данном этапе решения остаются произвольными.

Для следующего члена разложения (1.2) имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial t} &= \sigma_1 \cos t G[\psi_{20}] + \frac{1}{2} \sigma_1 \sin t G[\psi_{22}] + R[\psi_s] + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} \\ G[\psi_{2n}] &= -f \frac{\partial^2 \psi_{2n}}{\partial x \partial y} - f' \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial y} + yf' \frac{\partial^2 \psi_{2n}}{\partial y^2} \quad (n = 0, 2) \\ R[\psi_s] &= \frac{\partial^3 \psi_s}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi_s}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} + ff' \end{aligned}$$

Ниже будет показано, что среднее за период значение функции  $\psi_{11}$  равно нулю. Поэтому необходимое и достаточное условие периодичности по времени функции  $\partial \psi_s / \partial y$  имеет вид  $R[\psi_s] = 0$ , т. е. осредненное движение в главном приближении определяется уравнениями ПС с тем же градиентом давления, что и в потоке без пульсаций.

Разложение (1.2) будет равномерно пригодным по продольной координате лишь в том случае, когда коэффициенты разложения и их производные нужного порядка непрерывны по  $x$ . Наиболее «опасным» в этом отношении представляется осредненное движение, поскольку оно описывается уравнением Прандтля с заданным градиентом давления. Уравнение для функции  $\psi_s$  требует определенных краевых условий. Условие при  $y \rightarrow +\infty$  следует из (1.1) и имеет вид  $\partial \psi_s / \partial y \rightarrow f(x; k)$ . Условия на твердой поверхности получаются в результате сращивания (1.2) с решением в слое Стокса, в котором  $Y = Sy = O(1)$ . Здесь функцию тока можно представить в виде

$$(1.3) \quad \psi = \Psi_0(x, Y, t) + S^{-1}\Psi_1(x, Y, t) + O(S^{-2})$$

Функция  $\Psi_0$  — решение классической задачи Стокса с параметрической зависимостью от продольной координаты

$$\Psi_0 = 1/2 \sigma_1 f [e^{iY} \varphi_0 + \text{с. с.}], \quad \varphi_0 = Y - i^{1/2} (1 - \exp(-Y i^{1/2}))$$

Обозначение с. с. использовано для комплексно-сопряженного выражения. Сращивание решения в слое Стокса с решением в области  $y \sim 1$  дает  $\psi_{11} = -\sigma_1 f \cos(t - \pi/4)$ . Задача для следующего коэффициента разложения (1.3) имеет вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial Y^3} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial Y \partial t} = \frac{\sigma_1^2}{4} ff' \{ e^{2it} [\varphi_0'^2 - \varphi_0 \varphi_0'' - 1] + [\varphi_0' \varphi_0^{*'} - \varphi_0^* \varphi_0'' - 1] + \text{с. с.} \}$$

$$\Psi_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0 \quad (Y = 0); \quad \Psi_1 = O(Y) \quad (Y \rightarrow +\infty)$$

Здесь  $\varphi_0^*$  — комплексно-сопряженная функция к  $\varphi_0$ . Решение задачи (1.4):

$$\Psi_1 = 1/4 \sigma_1^2 ff' [e^{2it} \varphi_{10}(Y) + \varphi_{11}(Y) + \text{с. с.}]$$

Поскольку основной интерес представляет осредненное движение, можно ограничиться рассмотрением функции  $\varphi_{11}$ . После преобразований получаем

$$\varphi_{11}' = -3/2 - 7i/2 + 1/2 (1 - i) \exp(-2^{1/2} Y) + (1 + 3i - Y i^{-1/2}) \exp(-i^{1/2} Y) + i \exp(-(-i)^{1/2} Y)$$

Заметим, что  $\varphi_{11}' \rightarrow -(3 + 7i)/2$  при  $Y \rightarrow +\infty$ , т. е. на внешней границе слоя Стокса индуцируется некоторое стационарное течение. Сращивание двучленного разложения (1.3) с разложением (1.2) показывает, что осредненное движение в основной части ПС должно удовлетворять условию проскальзывания на стенке

$$\psi_s = 0, \quad \partial \psi_s / \partial y = -3/4 \sigma_1^2 ff' \quad (y = 0)$$

Суммируя все сказанное выше относительно осредненного течения в области  $y \sim 1$ , приходим к краевой задаче

$$(1.5) \quad \frac{\partial \psi_s}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} - ff' = \frac{\partial^3 \psi_s}{\partial y^3}$$

$$\psi_s = 0, \quad \partial \psi_s / \partial y = -3/4 \sigma_1^2 ff' \quad (y = 0)$$

$$\partial \psi_s / \partial y \rightarrow f(x; k) \quad (y \rightarrow +\infty)$$

Направление скорости проскальзывания показано на фигуре стрелками. Скорость проскальзывания обращается в нуль в передней критической точке  $x = 0$  ( $f = 0$ ), в точке максимума функции  $f$  (точка  $M$ ) и асимптотически приближается к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $f \rightarrow \pm 1$ ). Вниз по потоку от точки  $M$  имеем  $f' < 0$  (неблагоприятный градиент давления), поэтому скорость проскальзывания на этом участке направлена в ту же сторону, что и внешний поток.

Численное решение задачи (1.5) представляет серьезные трудности из-за того, что в определенной части ПС скорость проскальзывания направлена навстречу внешнему потоку. Однако задача упрощается, если эффективная амплитуда пульсаций  $\sigma_1$ , а следовательно, и скорость проскальзывания малы.

**2. Пограничный слой с медленным проскальзыванием.** Пусть  $\sigma_1 \ll 1$ . Можно ожидать, что течение в ПС останется безотрывным, если угол атаки превышает критическое значение на величину того же порядка малости, что и скорость проскальзывания. Полагая  $k - k_0 = O(\sigma_1^2)$ , представим решение задачи (1.5) в виде

$$\psi_s = \Phi_0(x, y) + (k - k_0) \Phi_1(x, y) + \sigma_1^2 \Phi_2(x, y) + O(\sigma_1^4)$$

$$f(x; k) = f_0(x) + (k - k_0) f_1(x) + O(\sigma_1^4)$$

Функция  $\Phi_0$  определяет продолжимое особое решение в ПС без проскальзывания [4]. Для следующих членов разложения имеем краевые задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} - \\ & - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - (f_0 f_1)' \delta_{i1} = \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial y^3} \\ & \Phi_i = 0, \quad \partial \Phi_i / \partial y = -^{3/4} f_0 f_0' \delta_{i2} \quad (y = 0) \\ & \partial \Phi_i / \partial y \rightarrow f_1 \delta_{i1} \quad (y \rightarrow +\infty), \quad i = 1, 2 \\ & \delta_{ij} = 1 \quad (i = j); \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

Решение краевых задач для функций  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  было исследовано [4]. Задача для функции  $\Phi_2$  имеет решение:

$$(2.1) \quad \Phi_2 = -\frac{3}{4} f_0 f_0' \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} / \frac{\partial^2 \Phi_0(x, 0)}{\partial y^2}$$

Последний результат легко обобщается на случай произвольного распределения скорости проскальзывания вдоль твердой поверхности.

Все функции  $\Phi_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) имеют особенность в сечении  $x = x_0$ , где напряжение поверхностного трения в главном приближении равно нулю. Характер особенностей функций  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  известен [4], соответствующий результат для  $\Phi_2$  следует из (2.1). Оказывается, что если  $\lambda_0 = f_0(x_0) f_0'(x_0)$ , то при  $x \rightarrow x_0 - 0$  в ПС выделяется вязкий подслой, в котором  $\eta = y(x_0 - x)^{-1/4} = O(1)$ . Представление решения в подслое имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1/6 (x_0 - x)^{3/4} \lambda_0 \eta^3 + 1/2 (x_0 - x)^{1/2} a_0 \eta^2 + O((x_0 - x)^{3/4}) \\ \Phi_1 &= 1/2 (x_0 - x)^{-1/4} a_1 \eta^2 + O((x_0 - x)^{1/4}) \\ \Phi_2 &= 3/8 (x_0 - x)^{-1/2} \lambda_0^2 a_0^{-1} \eta^2 + O((x_0 - x)^{1/4}) \\ a_0 &= 0,0085, \quad a_1 = -1,24 \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициент перед сингулярным членом у функции  $\Phi_2$  зависит от скорости проскальзывания только в точке  $x_0$ . Особенность в решении сглаживается в малой области  $x - x_0 = \sigma_1 x_1$ ,  $y = \sigma_1^{1/4} y_1$ ,  $(x_1, y_1) = O(1)$ , где

$$\begin{aligned} \psi_s &= 1/6 \sigma_1^{3/4} \lambda_0 y_1^3 + \sigma_1^{3/2} y_1^2 A(x_1) + \dots \\ A(x_1) &= (1/4 a_0^2 x_1^2 + 3/8 \lambda_0^2 + 1/2 a_0 a_1 \sigma_1^{-2} (k - k_0))^{1/2} \end{aligned}$$

Решение можно получить тем же способом, что и в [4]. Из последнего соотношения в силу равенства  $\sigma = S \sigma_1$  немедленно следует, что регулярное при всех значениях  $x_1$  решение существует, если

$$(2.2) \quad k < k_0 + \frac{3\lambda_0^2}{4a_0 |a_1|} \left( \frac{\sigma}{S} \right)^2$$

Это неравенство определяет диапазон изменения углов атаки профиля, допускающих безотрывное обтекание передней кромки пульсирующим потоком.

**3. Заключительные замечания.** Основной результат работы, количественно выражаемый соотношением (2.2), получен посредством повторного предельного перехода в задаче (1.1): вначале предполагалось, что  $\sigma = S \sigma_1$ ,  $\sigma_1 \sim 1$ ,  $S \rightarrow \infty$ , затем, в уравнении для стационарной составляющей течения,  $\sigma_1 \rightarrow 0$ . При таком подходе справедливость соотношения (2.2) обоснована лишь при не слишком малых значениях  $\sigma/S$ . В действительности диапазон пригодности формулы (2.2) достаточно широк.

В самом деле, изложенное выше решение основано на том, что на внешней границе слоя Стокса, толщина которого равна  $O(S^{-1})$ , индуцируется стационарная скорость проскальзывания величиной  $O((\sigma/S)^2)$ . Эффект проскальзывания вызывает к жизни нелинейный механизм сглаживания особенности в решении задачи для стационарного движения в основной части ПС. Нелинейная область имеет протяженность  $x - x_0 = O(\sigma/S)$ , при этом толщина вязкого подслоя для стационарной составляющей течения равна  $O((\sigma/S)^{1/4})$ . Приведенная схема справедлива лишь в случае, когда уравнения для средней по времени и осциллирующей составляющих течения разделяются. Для этого необходимо, чтобы толщина вязкого подслоя для стационарной части течения была гораздо больше, чем толщина слоя Стокса:  $\sigma \gg S^{-3}$ . Таким образом, при больших значениях числа Струхаля  $S^2$  в диапазоне  $S^{-3} \ll \sigma \ll S$  допустимые вариации угла атаки профиля определяются соотношением (2.2).

В экспериментальных условиях высокочастотные пульсации в набегающем потоке обычно создаются акустическим возмущением поля течения (например, [5]). Наблюдающийся в таких случаях эффект устранения срыва потока с передней кромки профиля связан с турбулизацией предотрывного ПС, поэтому сопоставление приведенной выше теории с экспериментальными данными неоправдано. Впрочем, можно обнаружить определенное сходство между физическими механизмами, ведущими к устранению отрыва в турбулентном и пульсирующем ламинарном течениях. И в том, и в другом случае сказывается действие напряжений Рейнольдса, т. е. средних по времени значений попарных произведений, составленных из пульсационных компонентов вектора скорости. Под влиянием напряжений Рейнольдса происходит наполнение профиля средней скорости, в результате чего ПС оказывается способным выдержать более сильное повышение давления.

Проведенный анализ можно распространить на другие виды периодических течений в ПС при большом числе Струхаля: обтекание профиля с переменным углом атаки, колебания в направлении хорды и т. п. Несущественные изменения требуются также в случае, когда зависимость параметров задачи от времени не моногармоническая.

Автор благодарит В. В. Сычева и А. И. Рубана за внимание к работе и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Telionis D. P.* Unsteady viscous flows. N. Y. etc.: Springer. 1981. 408 p.
2. *Van Dyke M. D.* Second-order subsonic airfoil theory including edge effects // *NACA Rep.* 1956. No. 1274. P. 23.
3. *Werle M. J., Davis R. T.* Incompressible laminar boundary layers on a parabola at angle of attack: A study of the separation point // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1972. V. 39. No. 1. P. 7—12.
4. *Рубан А. И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 6. С. 42—52.
5. *Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В.* Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение. 1978. 177 с.