

УДК 532.516

## О ЖЕСТКИХ ПЕРЕХОДАХ МЕЖДУ СТРУКТУРАМИ РАЗЛИЧНОЙ СИММЕТРИИ ПРИ СЛАБО НАДКРИТИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ

Маломед Б. А., Трибельский М. И.

В рамках шестимодового галеркинского приближения проводится полная классификация фазового пространства динамической системы, описывающей движение жидкости при слабо надкритической конвекции. Показано, что все фазовые траектории притягиваются к соответствующим стационарным состояниям. Найдены области притяжения к каждому из таких состояний. Вблизи бифуркационных значений параметров задачи оценивается минимальная амплитуда возмущения, переводящего слабоустойчивое решение одной симметрии в устойчивое решение другой симметрии.

Известно, что в определенных случаях при слабо надкритической конвекции возможно возникновение двух типов стационарных пространственно-периодических течений, которыми в типичных ситуациях являются ячеистые гексагональные структуры и структуры в виде двумерных валов. При этом в некоторой области значений параметров задачи устойчивыми к малым возмущениям оказываются оба типа структур, так что между ними становятся возможными жесткие переходы под действием возмущений конечной амплитуды [1—3]. В таких случаях представляет интерес вопрос о минимальной амплитуде возмущения, переводящего структуру одной симметрии в структуру другой, симметрии, а также связанные с ним вопросы о полной классификации возможных асимптотических состояний рассматриваемой динамической системы и об областях притяжения различных начальных условий к этим асимптотическим состояниям. Выяснению указанных вопросов и посвящена данная работа.

Будем исходить из системы уравнений, полученных в [1] в конечно-модовом (галеркинском) приближении, строгое обоснование которого дано в [4]. В этом приближении компоненты вектора скорости конвективного течения и возмущение температурного профиля представимы в виде

$$(1) \quad \sum_{j=1}^3 \{A_j \cos(\mathbf{q}_j \mathbf{r}) + B_j \sin(\mathbf{q}_j \mathbf{r})\} f(z)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — двумерный радиус-вектор, лежащий в горизонтальной плоскости (предполагается, что конвективный слой имеет в этой плоскости бесконечную протяженность); ось  $z$  направлена вдоль силы тяжести, а двумерные векторы  $\mathbf{q}_i$  удовлетворяют соотношениям  $|\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_3|$ ;  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ . В этом случае задача сводится к определению величин  $A_j(t)$  и  $B_j(t)$ , для которых из уравнений гидродинамики в третьем порядке теории возмущений следует замкнутая система

$$(2) \quad \dot{Z}_1 = \varepsilon Z_1 - |Z_1|^2 Z_1 - 2\mu (|Z_2|^2 + |Z_3|^2) Z_1 - 2\alpha Z_2^* Z_3^*$$

(еще два уравнения получаются из (2) при циклической перестановке индексов 1, 2, 3). Точка означает производную по времени  $t$ ;  $Z_j \equiv A_j + iB_j$ ;  $\varepsilon$  — бифуркационный параметр задачи, пропорциональный  $(R - R_c)/R_c$ , где  $R$  — безразмерная величина (число Релея), пропорциональная разности температур между нижней и верхней поверхностями конвективного слоя;  $R_c$  — такое значение  $R$ , при котором покоящаяся жидкость теряет устойчивость по отношению к сколь угодно малым возмущениям, приводящим к возникновению конвективного движения.

Уравнение (2) записано в надлежащем образом обезразмеренных переменных, при этом численные значения вещественных положительных коэффициентов  $\mu$  и  $\alpha$  зависят от конкретной постановки задачи конвекции (вид граничных условий и т. п.). В типичных случаях эти величины удовлетворяют соотношениям  $\mu \sim 1$ ;  $\alpha \ll 1$ , а все рассматриваемое приближение применимо при условии  $|\varepsilon| \ll 1$ . Кроме того, в большинстве задач конвекции коэффициент  $\mu$  удовлетворяет неравенству  $\mu > 1/2$ , что и предполагается в дальнейшем.

Переходя к анализу системы (2), заметим, что она принадлежит к так называемым системам градиентного вида, т. е. может быть записана как

$$(3) \quad Z_j \dot{=} -\partial H / \partial Z_j^*$$

где псевдогамильтониан  $H$  (функция Ляпунова) определяется по правой части (2). Из (3) следует, что

$$(4) \quad H \dot{=} -2 \sum_j |\partial H / \partial Z_j|^2 \equiv -2 \sum_j |Z_j \dot{=}|^2 \leq 0$$

Поэтому все фазовые траектории системы (2) должны стремиться к определенным стационарным точкам, являющимся локальными экстремумами величины  $H$  (последняя при больших  $|Z|$  монотонно возрастает с ростом  $|Z|$ , что при учете (4) не позволяет фазовым траекториям системы (2) уйти «на бесконечность»).

Таким образом, для полного описания качественных свойств системы (2) достаточно найти все особые точки и определить вид сепаратрисных поверхностей, разделяющих области притяжения различных устойчивых особых точек.

Заметим далее, что исходная гидродинамическая задача обладает очевидной симметрией относительно трансляции в горизонтальной плоскости на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{a}$ . Преобразованию  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$  в  $Z$ -пространстве соответствует вращение:

$$(5) \quad Z_j \rightarrow Z_j \exp(i\psi_j)$$

где фазы  $\psi_j$  связаны соотношением  $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0$ . Чтобы избавиться от вырождения, обусловленного наличием такой симметрии, удобно от переменных  $Z$  перейти к новым независимым переменным  $I$ , инвариантным относительно преобразования (5). Существует всего четыре независимых инварианта, за которые можно принять, например, следующие:

$$(6) \quad I_{1,2,3} = |Z_{1,2,3}|^2, \quad I_4 = \text{Im}(Z_1 Z_2 Z_3)$$

В качестве двух оставшихся переменных, дополняющих четырехмерное фазовое пространство (6) до шестимерного пространства системы (2), можно выбрать  $\varphi_{1,2} = \arg Z_{1,2}$ . Уравнения для  $I$  и  $\varphi$ , получаемые из (2), имеют вид

$$(7) \quad I_1 \dot{=} 2 \{ \varepsilon I_1 - I_1^2 - 2\mu (I_2 + I_3) I_1 - 2\alpha I_5 \}$$

$$(8) \quad I_4 \dot{=} \{ 3\varepsilon - (4\mu + 1)(I_1 + I_2 + I_3) \} I_4$$

$$(9) \quad \varphi_j \dot{=} 2\alpha I_4 / I_j \quad (I_5 \equiv \text{Re}(Z_1 Z_2 Z_3))$$

(уравнения для  $I_2, I_3$  следуют из (7) при циклической перестановке индексов 1, 2, 3).

Учитывая, что инвариант  $I_5$  связан с  $I_{1,2,3,4}$  соотношением  $I_5^2 = I_1 I_2 I_3 - I_4^2$ , получаем, что четыре уравнения (7), (8) для инвариантов образуют замкнутую подсистему. Это означает, что шестимерное

фазовое пространство системы (2) расслаивается на, вообще говоря, двумерные многообразия (орбиты преобразования (5)), определяемые уравнениями  $I_j = \text{const}$ .

Заметим далее, что в четырехмерном фазовом пространстве системы (7), (8) имеется трехмерное инвариантное подпространство — гиперплоскость  $I_4 = 0$ . Из (8) следует, что фазовые траектории системы (7), (8) отталкиваются от этой гиперплоскости в области

$$I_1 + I_2 + I_3 < 3\varepsilon/(4\mu + 1)$$

и притягиваются к ней вне этой области. Нуль-изоклинами уравнения (8) являются указанная гиперплоскость  $I_4 = 0$  и поверхность  $I_1 + I_2 + I_3 = 3\varepsilon/(4\mu + 1)$ , которой в шестимерном  $Z$ -пространстве соответствует сфера с центром в начале координат. Прямыми вычислениями можно убедиться в том, что на поверхности этой сферы нет ни одной особой точки уравнений (2).

Это означает, что все особые точки системы (7), (8) лежат на гиперплоскости  $I_4 = 0$ . Отсюда и из сказанного ранее следует, что при достаточно больших значениях  $t$  все фазовые траектории системы (7), (8), не принадлежащие указанной гиперплоскости, должны асимптотически к ней приближаться. По этой причине всю информацию об асимптотическом поведении системы (7), (8) (а следовательно, и исходной системы (2)) можно извлечь из анализа ее фазового портрета в инвариантном подпространстве  $I_4 = 0$ . При этом, используя преобразование (5), все эквивалентные траектории можно свести к таким, для которых  $\text{Im}Z_1 = \text{Im}Z_2 = \text{Im}Z_3 = 0$ , т. е.  $Z_j \equiv A_j$ .

Видно, что динамическая система, получающаяся в этом случае, имеет шесть инвариантных плоскостей  $A_j = \pm A_l$  ( $j \neq l$ ), которые играют важную роль в анализе ее фазового портрета.

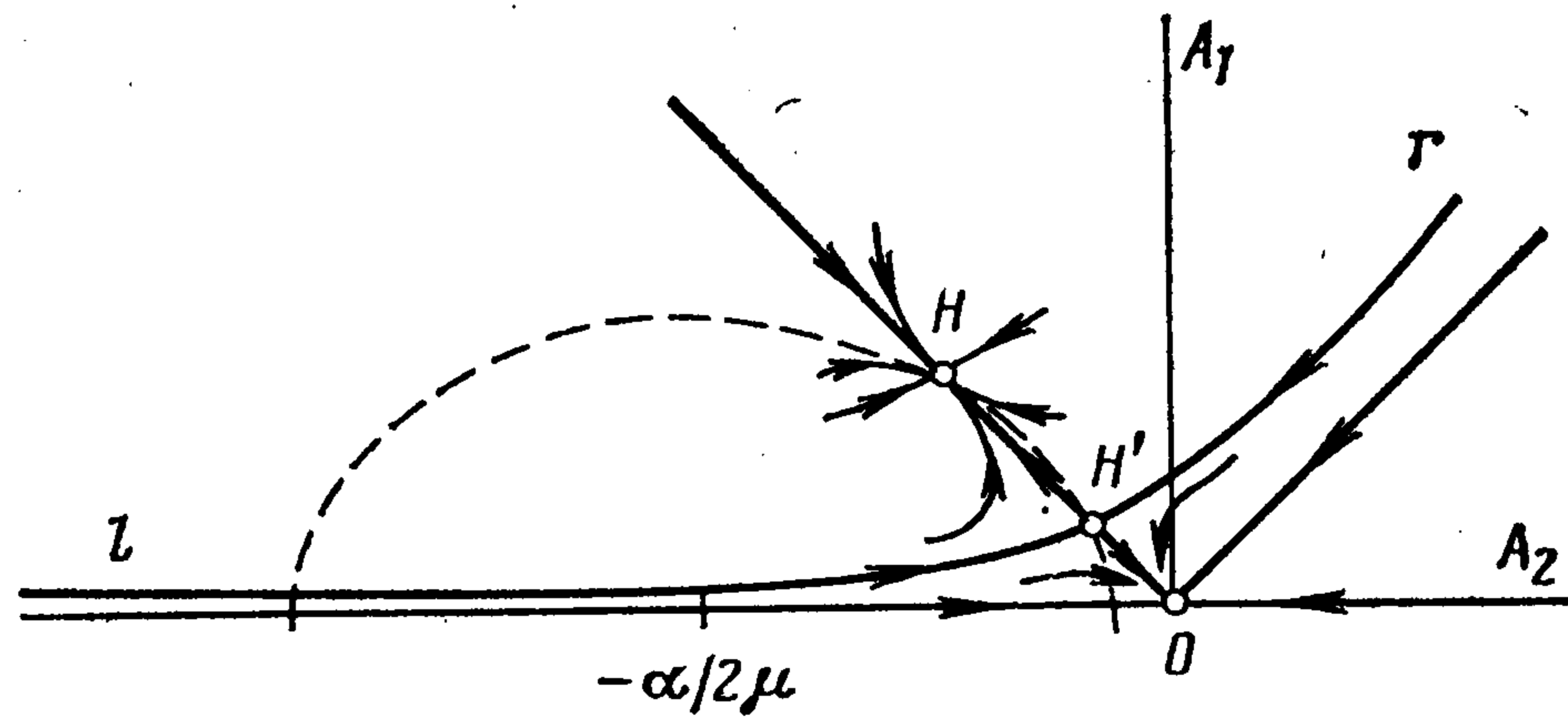
Соответствующие инвариантные подпространства, разумеется, есть и в уравнениях (7)—(9), и в исходной системе (2). Существование этих инвариантных многообразий (а также многообразия  $I_4 = 0$ ) не случайно и связано с наличием в задаче определенной симметрии. Так, помимо отмечавшейся выше трансляционной симметрии задача симметрична относительно преобразования комплексного сопряжения (отсюда — инвариантность многообразия  $I_4 = 0$ ) и относительно перестановок, связанных с переобозначениями базисных векторов  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$  (инвариантность плоскостей  $A_j = \pm A_l$ ). По указанным причинам инвариантность этих многообразий не разрушается при учете в (2) поправок, связанных с высшими порядками теории возмущений, которые приводят к появлению в правой части (2) членов  $\sim Z^n$ , где  $n \geq 4$ .

Отсюда, в частности, следует, что линии пересечения инвариантных плоскостей, т. е. прямые, определяемые уравнениями  $\pm A_1 = \pm A_2 = \pm A_3$ , где каждый знак выбирается независимо, являются точными фазовыми траекториями такой системы.

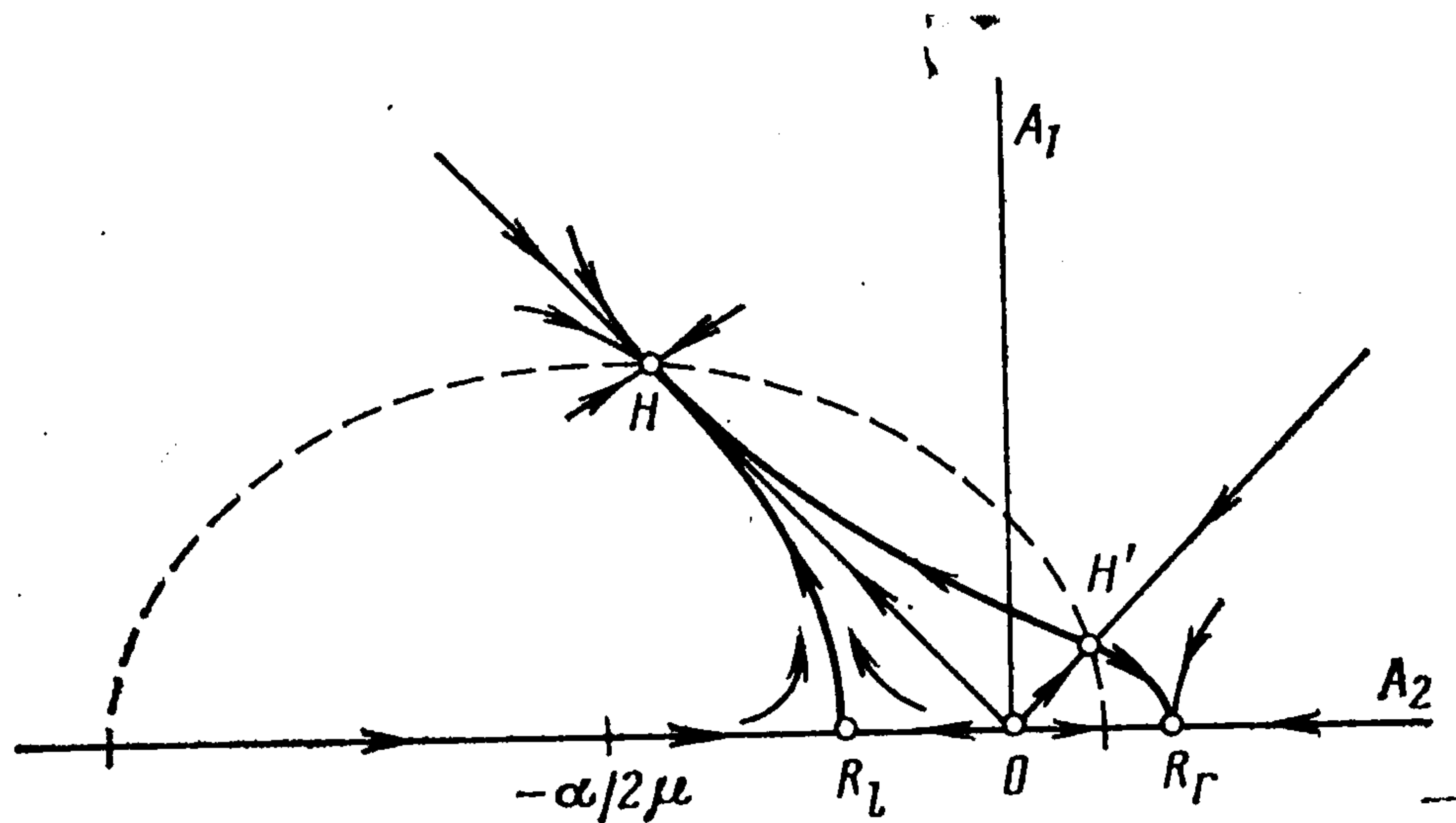
Рассмотрим теперь подсистему, получающуюся при редукции этой динамической системы на одну из указанных инвариантных плоскостей. Выберем для определенности плоскость  $A_1 = A_3$  (фиг. 1—3). Соответствующие динамические уравнения имеют вид

$$(10) \quad \begin{aligned} A_1 \dot{} &= \varepsilon A_1 - A_1^3 - 2\mu (A_1^2 + A_2^2) A_1 - 2\alpha A_1 A_2^2 \\ A_2 \dot{} &= \varepsilon A_2 - A_2^3 - 4\mu A_1^2 A_2 - 2\alpha A_1^2 A_2 \end{aligned}$$

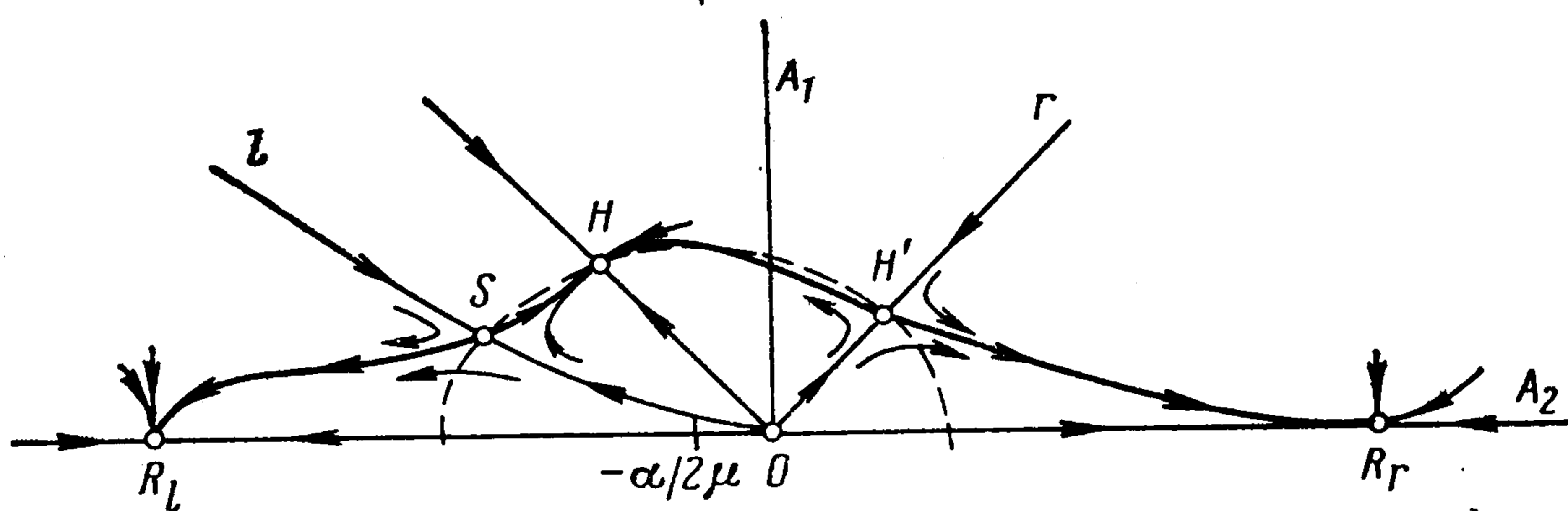
(при редукции на плоскость  $A_1 = -A_3$  получается система, отличающаяся от (10) знаком перед коэффициентом  $\alpha$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Помимо тривиальной особой точки  $A_1 = A_2 = 0$  система (10) имеет следующие особые точки [4]:

$$(11) \quad A_1 = 0, \quad A_2^2 = \varepsilon$$

$$(12) \quad \pm A_1 = A_2 = -\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + (4\mu + 1)\varepsilon}}{4\mu + 1}$$

$$(13) \quad A_1^2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_R}{2\mu + 1}, \quad A_2 = -\sqrt{\varepsilon_R} \quad \left( \varepsilon_R \equiv \frac{\alpha^2}{(\mu - 1/2)^2} \right)$$

(знаки перед  $A_1$  и радикалом в (12) выбираются независимо). Как видно из (1), точки (11) соответствуют валам, а точки (12) — гексагонам. Точки (13) соответствуют новому стационарному состоянию — «перекошенным» гексагонам.

Учитывая симметрию задачи, можно убедиться, что в трехмерном фазовом пространстве  $(A_1, A_2, A_3)$  имеется шесть особых точек типа (11), каждая из которых принадлежит одновременно двум инвариантным плоскостям, восемь особых точек типа (12), каждая из которых принадлежит одновременно трем инвариантным плоскостям, и двенадцать особых точек типа (13), через каждую из которых проходит только одна инвариантная плоскость. С учетом тривиальной особой точки в начале координат общее число особых точек равно  $6 + 8 + 12 + 1 = 27$ .

С другой стороны, система из трех кубических уравнений, получающаяся из (2) при  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ , имеет не более чем  $3^3$  действительных решений, т. е. точками (11)—(13) исчерпываются все нетривиальные особые точки системы, лежащие в фазовом пространстве  $(A_1, A_2, A_3)$ .

Разбиение этого трехмерного фазового пространства на области притяжения различных устойчивых стационарных состояний может быть синтезировано из двумерных фазовых портретов редуцированной системы типа (10), к изучению которых и перейдем. При этом особые точки (11) будем обозначать  $R_{l,r}$ , где индекс  $l$  относится к левой ( $A_2 = -\sqrt{\varepsilon}$ ), а  $r$  — к правой ( $A_2 = \sqrt{\varepsilon}$ ) точке; особые точки (12), соответствующие большим значениям  $|A|$  (верхний знак), — буквой  $H$ , а соответствующие меньшим значениям  $|A|$  (нижний знак) — буквой  $H'$ ; точки же типа (13) — буквой  $S$ .

При описании бифуркаций будем считать величину  $\alpha$  фиксированной и изучать изменение устойчивости отдельных решений по мере роста параметра надкритичности  $\varepsilon$  [4]. Кроме того, поскольку фазовая картина на фиг. 1—3 симметрична относительно оси  $A_2$ , ограничимся описанием той ее части, которая лежит в верхней полуплоскости (фазовая картина в плоскости  $A_1 = -A_3$  получается из аналогичной картины на плоскости  $A_1 = A_3$  при ее зеркальном отражении относительно оси  $A_1$ ; это обстоятельство устраняет кажущуюся асимметрию задачи, связанную с различным видом фазового портрета системы (10) в правой и левой полуплоскостях фиг. 1—3).

Анализ приводит к следующим результатам.

1°. При  $\varepsilon < \varepsilon_{\min} \equiv -\alpha^2/(4\mu + 1)$  ни одна из особых точек (11)—(13) не существует; единственной особой точкой системы (10) является тривиальная особая точка  $A_1 = A_2 = 0$  (устойчивый узел).

2°. При  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$  на фазовой плоскости  $(A_1, A_2)$  рождается сложная особая точка  $H$  ( $H'$ ) — седло-узел, которая при  $\varepsilon > \varepsilon_{\min}$  расщепляется на устойчивый узел  $H$ , соответствующий устойчивым гексагонам, и седло  $H'$ . При этом в «момент»  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$  скачком возникает конечная область притяжения к точке  $H$  ( $H'$ ). Последнее объясняется тем, что при  $0 < \varepsilon - \varepsilon_{\min} \ll |\varepsilon_{\min}|$  точка  $H$  ( $H'$ ) существует в «виртуальной» форме: траектории притягиваются к месту, где она должна возникнуть, а затем уходят в точку  $O$  по направлению, близкому к будущей неустойчивой сепаратрисе  $H'O$ ; см. фиг. 1, где дан фазовый портрет системы (10) при  $\varepsilon_{\min} < \varepsilon < 0$  (штрихами на фиг. 1—3 изображен эллипс  $(2\mu + 1)A_1^2 + 2\mu(A_2 + \alpha/2\mu)^2 = \varepsilon + \alpha^2/2\mu$ , являющийся одной из ветвей нуль-изоклины  $A_1 = 0$ , вторая ветвь которой совпадает с осью  $A_2$ ).

В области  $0 < \varepsilon - \varepsilon_{\min} \ll |\varepsilon_{\min}|$  минимальная амплитуда  $\delta A_{\min}$  возмущения, разрушающего слабоустойчивую гексагональную структуру, т. е. переводящего систему из устойчивой точки  $H$  за сепаратрису  $lH'r$  (фиг. 1), оценивается выражением

$$(14) \quad \delta A_{\min} \sim \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_{\min}}$$

Можно показать, что в данном случае в фазовом пространстве  $(A_1, A_2, A_3)$  кратчайшее расстояние от точки  $H$  до сепаратрисной поверхности есть расстояние между точками  $H$  и  $H'$ , так что оценка (14) может быть заменена строгим выражением:

$$\delta A_{\min} = 2 \sqrt{\frac{3}{4\mu + 1} (\varepsilon - \varepsilon_{\min})}$$

В общем же случае оценка  $\delta A_{\min}$  основывается на том, что при бифуркациях рассматриваемого типа направление, вдоль которого сепаратрисная поверхность

ближе всего подходит к слабоустойчивой особой точке, близко к направлению собственного вектора, связанного с наибольшим (т. е. наименьшим по абсолютной величине) характеристическим показателем этой точки. Заметим, что в момент бифуркации соответствующий характеристический показатель должен обратиться в нуль, поэтому такие векторы не могут иметь компонент, трансверсальных гиперплоскости  $I_4 = 0$ . Отсюда следует, что возмущения с  $B_j \neq 0$ , переводящие систему из слабоустойчивой особой точки через сепаратрисную поверхность, всегда имеют амплитуду большую, чем аналогичные возмущения с  $B_j \equiv 0$ . Сказанное проясняет, почему при оценке  $\delta A_{\min}$  можно ограничиться рамками трехмерного фазового пространства  $(A_1, A_2, A_3)$ .

3°. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  в «момент»  $\varepsilon = 0$  седло  $H'$  проходит через точку  $O$ , превращая ее в неустойчивый узел. При  $\varepsilon > 0$  точка  $H'$  переходит в правую полуплоскость, а из точки  $O$  рождаются две новые особые точки (11):  $R_l$  и  $R_r$ , которые в трехмерном фазовом пространстве  $(A_1, A_2, A_3)$  обладают седловой неустойчивостью вплоть до «момента»  $\varepsilon = \varepsilon_R$  (фиг. 2).

4°. При  $\varepsilon = \varepsilon_R$  из точки  $R_l$  рождаются два седла  $S$  (13), которые при  $\varepsilon > \varepsilon_R$  уходят одно в верхнюю, а другое — в нижнюю полуплоскость плоскости  $A_1 = A_3$  (фиг. 3). При этом точка  $R_l$  становится устойчивым узлом, соответствующим устойчивым валам, область притяжения к которому на плоскости  $A_1 = A_3$  ограничена устойчивой сепаратрисой седла  $S$ , отщепляющейся от полуоси  $A_2 < 0$  при  $\varepsilon = \varepsilon_R$ . Аналогичные изменения фазового портрета происходят в окрестности точки  $R_r$ , но седла, рождающиеся из нее при  $\varepsilon = \varepsilon_R$ , лежат в плоскости  $A_1 = -A_3$ .

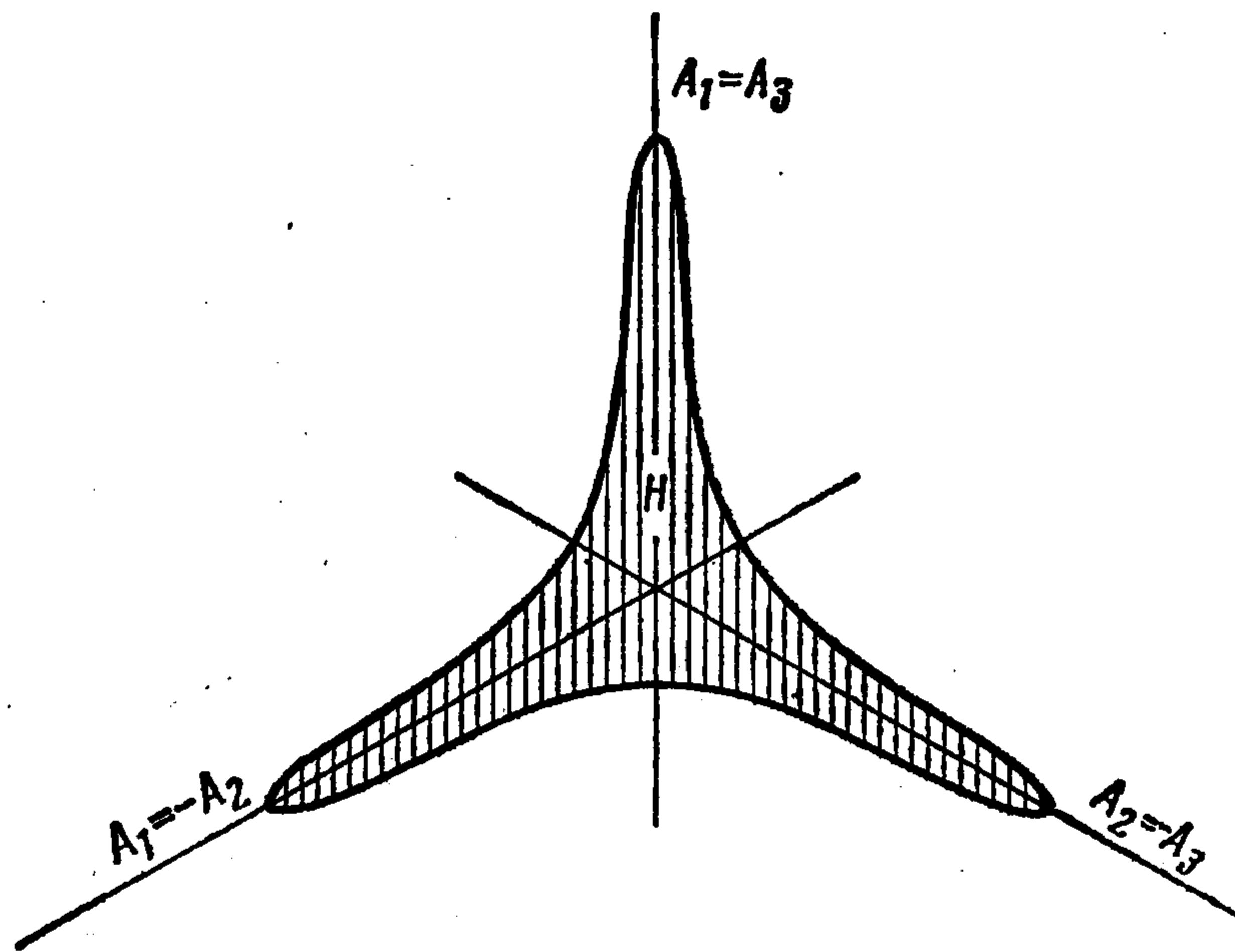
В области  $0 < \varepsilon - \varepsilon_R \ll \varepsilon_R$  величина  $\delta A_{\min}$  оценивается аналогично (14) с заменой  $\varepsilon_{\min} \rightarrow \varepsilon_R$ .

5°. При дальнейшем росте  $\varepsilon$  точка  $S$  приближается к точке  $H$  и при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max} \equiv 2(\mu + 1)\varepsilon_R$  проходит через эту точку, передавая ей седловую неустойчивость. При этом в момент бифуркации, т. е. при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ , в трехмерном фазовом пространстве  $(A_1, A_2, A_3)$  меняют знак одновременно два характеристических показателя точек  $S$ . Так, для точки  $S$ , изображенной на фиг. 3, неустойчивое собственное направление, лежащее при  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$  в инвариантной плоскости  $A_1 = A_3$ , становится при  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$  устойчивым, а устойчивое при  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$  собственное направление, не принадлежащее этой плоскости, делается при  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$  неустойчивым.

Таким образом, при  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$  единственными устойчивыми особыми точками рассматриваемой динамической системы будут точки  $R$ , соответствующие валам.

Сепаратрисные поверхности, ограничивающие при  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$  области притяжения точек  $H$  в пространстве  $(A_1, A_2, A_3)$ , имеют ось симметрии третьего порядка  $OH$ , являющуюся линией пересечения трех плоскостей симметрии. Для точки  $H$ , изображенной на фиг. 3, это плоскости  $A_1 = -A_2$ ;  $A_1 = A_3$  и  $A_2 = -A_3$ . Сечение сепаратрисной поверхности, соответствующей этой точке, плоскостью, ортогональной прямой  $OH$ , изображено на фиг. 4 (сечение области притяжения к точке  $H$  заштриховано).

При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\max}$  ( $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ ) эти сепаратрисные поверхности прижимаются к плоскостям симметрии, и при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  области притяжения к точкам  $H$  схлопываются в двумерные многообразия, каждое из которых состоит из трех секторов, лежащих в соответствующих плоскостях симметрии. Для рассматриваемой точки  $H$  (фиг. 3) в плоскости  $A_1 = A_3$  такой сектор ограничен биссектрисами первого и четвертого координатного угла.



Фиг. 4

В области  $0 < \varepsilon_{\max} - \varepsilon \ll \varepsilon_{\max}$  для величины  $\delta A_{\min}$  справедлива оценка

$$(15) \quad \delta A_{\min} \sim \varepsilon_{\max} - \varepsilon$$

Отличие (15) от корневого закона (14) обусловлено тем, что при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  ни точки  $S$ , ни точки  $H$  не рождаются и не исчезают, а только проходят одна через другую. По этой причине в законе, описывающем их перемещение в фазовом пространстве при изменении  $\varepsilon$ , точка  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  регулярна.

Авторы благодарят В. И. Арнольда, А. Б. Гивенталя, Г. М. Заславского, А. С. Моница и А. А. Непомнящего за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Segel L. A. The nonlinear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. Pt. 2. P. 359—384.
2. Busse F. H. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt. 4. P. 625—649.
3. Буссе Ф. Х. Переход к турбулентности в конвекции Релея — Бенара // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суини и Дж. Голлаба. М.: Мир. 1984. С. 124—168.
4. Golubitsky M., Swift J. W., Knobloch E. Symmetries and pattern selection in Rayleigh — Benard convection // Physica D. 1984. V. 10. No. 3. P. 249—276.